

## Planungsvorschlag zum Themenbereich „Stochastik“ in Klasse 6

### Ziele und Schwerpunkte

#### Forderungen der Bildungsstandards

Die Schülerinnen und Schüler

- beschreiben Zufallserscheinungen in alltäglichen Situationen,
- sammeln systematisch Daten, erfassen sie in Tabellen und stellen sie graphisch dar, auch unter Verwendung geeigneter Hilfsmittel (wie Software),
- werten graphische Darstellungen und Tabellen von statistischen Erhebungen aus,
- interpretieren Wahrscheinlichkeitsaussagen aus dem Alltag,
- bestimmen Wahrscheinlichkeiten bei einfachen Zufallsexperimenten.

### Planungsvorschlag

Thema	Std.	Schwerpunkte	Bemerkungen
<b>3.1 Ermitteln der Anzahl von Möglichkeiten</b>	<b>3</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Lösen kombinatorischer Aufgaben durch systematisches Probieren</li> <li>• Einführung der Produktregel mit Hilfe von Baumdiagrammen und Lösen kombinatorischer Aufgaben mit der Produktregel und Baumdiagrammen, Beispiele für Mehrfachzählungen</li> <li>• Lösen von Aufgaben mit der Produktregel ohne Baumdiagramme</li> </ul>	– Zusatz: Mehrfachzählungen
<b>3.2 Zufällige Vorgänge, Wahrscheinlichkeit (Zusatz)</b>	<b>(2)</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Wiederholen der Prozessbetrachtung zufälliger Erscheinungen</li> <li>• Wiederholen des qualitativen Wahrscheinlichkeitsbegriffes und der Darstellung von Wahrscheinlichkeiten auf einer Skala</li> <li>• Einführen der Verwendung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes für Vermutungen, Veränderung der Wahrscheinlichkeit bei Zunahme von Informationen</li> <li>• Es sollten ohne explizite Einführung die Begriffe Ereignis und Ergebnismenge verwendet werden</li> </ul>	
<b>3.3 Wahrscheinlichkeit und relative Häufigkeit</b>	<b>3</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Einführen von „absolute“ und „relative Häufigkeit“; Berechnen und Vergleichen von relativen Häufigkeiten</li> <li>• Deuten einer relativen Häufigkeit als Wahrscheinlichkeit</li> <li>• Berechnen von Anteilen mit Hilfe der relativen Häufigkeit bzw. der Wahrscheinlichkeit als Vorhersage von Ereignissen</li> <li>• Durchführen eines Experimentes zum Verhältnis von relativer Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit (Verringerung der Streuung der relativen Häufigkeiten bei Serien fester Länge, Stabilität der relativen Häufigkeit in langen Versuchsreihen)</li> </ul>	– Es sollte ohne explizite Einführung der Begriff Zufallsexperiment verwendet werden.

Thema	Std.	Schwerpunkte	Bemerkungen
<b>3.4 Berechnen von Wahrscheinlichkeiten</b>	4	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Untersuchen der Gleichwahrscheinlichkeit von Ergebnissen</li> <li>• Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei gleichmöglichen Ergebnissen</li> <li>• Berechnen von Gewinnerwartungen</li> <li>• Angabe von Versuchsbedingungen bei gegebenen Wahrscheinlichkeiten</li> </ul>	– Aus Zeitgründen wird empfohlen, keine Berechnungen von Anzahlen mit kombinatorischen Mitteln vorzunehmen
<b>3.5 Arithmetisches Mittel</b>	4	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Berechnung des arithmetischen Mittels als Quotient und durch Addition der Einzelwerte</li> <li>• Berechnen des arithmetischen Mittels für Häufigkeitsverteilungen</li> <li>• Deuten des arithmetischen Mittels als Ausgleichswert und Schwerpunkt</li> <li>• Untersuchung von Eigenschaften des arithmetischen Mittels</li> </ul>	
<b>3.6 Darstellung und Auswertung von Daten</b>	4	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Lesen von Diagrammen</li> <li>• Auswerten von Daten (Beschreiben der Verteilungen, Suchen nach Ursachen für Besonderheiten der Verteilung, Prognosen, Schlussfolgerungen, Vergleich mit bisherigen Vorstellungen)</li> <li>• Festigung der Anfertigung von Strecken-, Streifen- und Stamm-und-Blätter-Diagrammen</li> <li>• Durchführen einer eigenen statistischen Untersuchung</li> </ul>	
<b>Summe</b>	<b>18</b>	•	

### **Hinweise zu ausgewählten Problemen**

#### **Zur Behandlung kombinatorischer Aufgaben**

Mit Hilfe der *Zählregeln*, auch *Zählprinzipien* genannt, lassen sich kombinatorische Aufgaben lösen, ohne ein Begriffs- oder Formelsystem zu benötigen. Die Überlegungen bleiben sehr nahe am Sachverhalt, eine Verallgemeinerung oder Typisierung der Aufgaben ist nicht erforderlich. In der Schulpraxis hat sich dieser Weg als der effektivste herausgestellt. Es gibt mehrere Zählregeln. Die *Produktregel* ist dabei die wichtigste, da sie am häufigsten auftritt und Grundlage der anderen Regeln ist. Sie kann bildlich durch ein *Baumdiagramm* veranschaulicht werden. Das Baumdiagramm ist nicht nur ein Hilfsmittel zur Erfassung des Grundgedankens der Produktregel, sondern dient auch der Vorbereitung der *Pfadregeln*, die beim Lösen von wahrscheinlichkeitstheoretischen Aufgaben eine wichtige Rolle spielen. Das Baumdiagramm sollte bis zur sicheren Beherrschung der Produktregel zumindest andeutungsweise stets verwendet werden. Probleme bei der Anwendung der Produktregel ergeben sich, wenn die Entscheidungsfolge nicht dem natürlichen Handlungsablauf entspricht bzw. wenn auch Folgen in Betracht kommen, bei denen die Entscheidungen voneinander nicht unabhängig sind. In einigen Fällen kommt es bei der Anwendung der Produktregel zu *Mehrfachzählungen*. Das bei Mehrfachzählungen zu verwendende Zählprinzip wird häufig als *Quotientenregel* bezeichnet und könnte so formuliert werden: Wurde bei Anwendung der Produktregel jede der ermittelten Möglichkeiten  $m$  mal gezählt, so ist die Gesamtzahl der Möglichkeiten durch  $m$  zu dividieren.

## Prozessbetrachtung zufälliger Erscheinungen

Die in Klasse 5 eingeführten Prozessbetrachtungen zufälliger Erscheinungen unterscheiden sich von dem Vorgehen in den meisten anderen Schulbüchern und sollen deshalb etwas ausführlicher begründet werden.

Unter „Prozessbetrachtung“ wird verstanden, dass nicht ausschließlich die eingetretenen oder möglicherweise eintretenden Ergebnisse betrachtet werden, sondern der Prozess (oder synonym Vorgang) untersucht wird, in dessen Resultat die Ergebnisse eintreten können. Als zufällig wird deshalb nicht ein Ergebnis oder Ereignis bezeichnet, sondern der betreffende Vorgang, der zu diesem Ergebnis führt. Es sollte deshalb *nicht* gesagt werden zufällig ist z.B. das Würfeln einer Sechse, die Note von Karin in der Mathematikarbeit oder die Anzahl der Stunden, die Fred in der Woche in den Fernseher sieht; *sondern*: zufällige Vorgänge sind das Werfen eines Würfels, das Schreiben der Mathematikarbeit von Karin, die Entwicklung der Fernsehgewohnheiten von Fred.

Als einziges Kriterium für die Zufälligkeit eines Vorgangs ist die Existenz unterschiedlicher Ergebnismöglichkeiten anzusehen. Die Nichtvorhersehbarkeit des Ergebnisses ist ein meist anzutreffendes aber nicht notwendiges Merkmal. So kann etwa mit einem geeigneten Test kurz vor einer Mathearbeit die dann in der Arbeit geschriebene Note durchaus vorhergesagt werden.

Weiterhin gehört zur Prozessbetrachtung, dass das *Merkmal* angegeben wird, das man betrachtet. Die Zufälligkeit eines Vorganges kann deshalb nur bezüglich eines Merkmals untersucht werden. Auf die Angabe eines Merkmals wird allerdings z. T. verzichtet, wenn aus dem Zusammenhang hervorgeht, welches Merkmal gemeint ist (z.B. Werfen eines Würfels: gemeint ist Merkmal Augenzahl).

Ein wesentlicher Aspekt einer Prozessbetrachtung ist die Untersuchungen der *Bedingungen*, unter denen der Vorgang abläuft und ihr Einfluss auf die Wahrscheinlichkeit der Ergebnisse. Die Angabe der Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses hat oft nur einen Sinn, wenn auch die Bedingungen angegeben werden, unter denen das Ergebnis eingetreten ist. So hat die Augenzahl 6 nur dann die Wahrscheinlichkeit  $1/6$ , wenn es sich um einen fairen Würfel handelt. Die Angabe von durchschnittlichen Fernsehzeiten ist nur sinnvoll, wenn das Land, die Altersgruppe, die familiären und sozialen Verhältnisse, der Zeitraum u. a. Bedingungen bekannt sind.

Mit der Prozessbetrachtung werden folgende Ziel und Zwecke verbunden:

1. Der Zufallsbegriff der Alltagssprache (z.B. Zufall als etwas Unerwartetes oder Gleichmögliches) soll durch eine weitere Betrachtung ergänzt werden, d.h. es soll *nicht* darum gehen, die umgangssprachliche Verwendung des Zufallsbegriffes zu beseitigen.
2. Es sollen die Teilgebiete der Stochastik, nämlich Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, durch eine gemeinsame Begriffsbildung und Betrachtungsweise enger verbunden werden. Insbesondere soll auch der zufällige Charakter von Daten stärker als üblich ins Blickfeld rücken, wodurch die Interpretation der Daten bzw. der statistischen Kenngrößen ein größeres Gewicht erhalten.
3. Es soll der enge Zusammenhang stochastischer Betrachtungen zu naturwissenschaftlichen Untersuchungen verdeutlicht werden. Die Betrachtung von Vorgängen ist ein zentrales Anliegen der Naturwissenschaften. Auch naturwissenschaftliche Gesetze sind stets an bestimmte Bedingungen gebunden.
4. Mit Hilfe der Prozessbetrachtung kann man die beiden gegensätzlichen Aspekte des Wahrscheinlichkeitsbegriffes, die oft als objektiver und subjektiver Wahrscheinlichkeitsbegriff bezeichnet werden, als Aussagen über zwei Arten von Vorgängen erfassen (s. u.).
5. Die Orientierung auf die ablaufenden Vorgänge erleichtert die Analyse zusammengesetzter Ereignisse, deren Wahrscheinlichkeit mit Hilfe der Pfadregeln über das Modell zusammengesetzter (mehrstufiger) Vorgänge in oberen Klassen bestimmt werden soll.

## Zufälliger Vorgang und Zufallsexperiment

Der in der Fachwissenschaft verwendete Begriff „Zufallsexperiment“ oder „Zufallsversuch“ sollte nicht synonym mit dem Begriff „zufälliger Vorgang“ verwendet werden. Ein zufälliger Vorgang ist zunächst ein unabhängig von einer Beobachtung bzw. Untersuchung ablaufender Prozess. Ein Experiment oder Versuch ist sowohl im Denken der Schüler als auch in den Naturwissenschaften eine geplante und zielgerichtete Untersuchung einer Erscheinung bzw. eines Vorgangs. In diesem Sinne sollte unter einem Zufallsexperiment im Stochastikunterricht ebenfalls eine experimentelle Untersuchung eines zufälligen Vorgangs verstanden werden. Dazu werden in der Regel Wiederholungen des Vorgangs betrachtet (in der Statistik) bzw. durchgeführt (in der Wahrscheinlichkeitsrechnung). Die in der Fachwissenschaft angegebenen Beispiele für Zufallsexperimente stimmen mit dieser Betrachtungsweise in der Regel überein.

## Bedingungen eines Vorgangs

Es sollte im Unterricht beachtet werden, dass der Begriff „Bedingungen“ in zwei unterschiedlichen Bedeutungen verwendet wird. Es ist zwischen den *allgemeinen* Bedingungen eines Vorganges (z. B. Witterungsbedingungen beim Weitsprung) als den möglichen Einflussfaktoren und der *konkreten Ausprägung* dieser Bedingungen bei Ablauf des Vorganges (z. B. Windverhältnisse beim Anlauf) zu unterscheiden. Diese konkreten Ausprägungen sind die Ursachen für das eingetretene Ergebnis.

Ein zufälliges Ereignis hat (wenn man das allgemeine Kausalitätsprinzip anerkennt und nicht an eine Prädestination glaubt) wie jede andere Erscheinung ganz bestimmte Ursachen. Die Auffassung vieler Schüler, dass es gar keinen Zufall gäbe, weil alles Ursachen hat, ist damit durchaus begründet. Der Zufall rückt erst dann ins Blickfeld, wenn man in seinen Betrachtungen über den einzelnen, konkreten Ablauf eines Vorganges hinausgeht und den Vorgang an sich charakterisieren will, wenn Aussagen über mögliche Ergebnisse künftiger Abläufe getroffen werden sollen oder wenn man die eingetretenen Ergebnisse mehrerer Wiederholungen des Vorganges untersucht.

## Ergebnis und Ereignis

Im strengen Sinne ist in der Wahrscheinlichkeitsrechnung zwischen *Ergebnis* und *Ereignis* zu unterscheiden. Ein Ergebnis oder Resultat sind die Ausprägungen des Merkmals (z. B. die aufgetretene Augenzahl beim Werfen eines Würfels). Die Gesamtheit aller Ergebnisse wird als Ergebnismenge bezeichnet. Ereignisse sind Teilmengen der Ergebnismenge bzw. könne als Aussagen über die Ergebnisse (z. B. "Die Augenzahl ist zwei." oder "Die Augenzahl ist gerade") bezeichnet werden. An diese Unterschiede sollte die Schüler durch eine entsprechende Begriffsverwendung durch den Lehrer erst schrittweise herangeführt werden. Der Begriff Ergebnis sollte zunächst bevorzugt werden, da die Schüler intuitiv mit "Ereignis" die Vorstellung von etwas Besonderem verbinden.

## Der Wahrscheinlichkeitsbegriff

Ausgangspunkt für die Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes beim Schüler, die in Klasse 5 begann, sollten die intuitiven Vorstellungen der Schüler zum Begriff „wahrscheinlich“ als etwas mit ziemlicher Sicherheit Eintretendes sein. Mit der Frage "Was ist wahrscheinlicher?" wurden diese Vorstellungen erweitert und führten zum Vergleich von Wahrscheinlichkeiten. Die Vergleiche beruhen auf subjektiven Schätzungen, Vergleiche von Anzahlen möglicher Ergebnisse oder Erkennen von Teilmengenbeziehungen. Nach dem Umgang mit den Begriffen "gleichwahrscheinlich" sowie "mehr oder weniger wahrscheinlich" erfolgte der Übergang zur qualitativen Charakterisierung des Erwartungsgefühls durch den Begriff "Wahrscheinlichkeit". Wahrscheinlichkeit als Maß für die Erwartung des Eintretens eines Ereignisses lässt sich innerhalb der Extreme "unmöglich" und "sicher" z. B. durch die Ausprägungen sehr geringe Wahrscheinlichkeit (unwahrscheinlich), geringe Wahrscheinlichkeit (wenig wahrscheinlich), 50%ige Wahrscheinlichkeit (wahrscheinlich), sehr hohe Wahrscheinlichkeit (sehr wahrscheinlich) charakterisieren. Zur Visualisierung und Darstellung der Lösung der Aufgaben kann man eine Wahrscheinlichkeitsskala verwenden, auf der Punkte markiert werden, die den geschätzten Wahrscheinlichkeiten entsprechen.

Nach der Einführung der gebrochenen Zahlen kann die Wahrscheinlichkeitsskala in Klasse 6 als Teil des Zahlenstrahls aufgefasst und jeder Wahrscheinlichkeit eine Zahl zwischen 0 und 1 zugeordnet werden.

Als weitere Anwendung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes sollte in Klasse 6 die Angabe von Wahrscheinlichkeiten für Vermutungen (Hypothesen) erstmalig an Beispielen betrachtet werden. Damit wird die Entwicklung eines zweiten Aspektes des Wahrscheinlichkeitsbegriffes vorbereitet, der große Bedeutung für stochastische Schlussweisen hat. Die beiden gegensätzlichen Aspekte des Wahrscheinlichkeitsbegriffes können als Wahrscheinlichkeit von Ergebnissen zweier unterschiedlicher Arten von zufälligen Vorgängen aufgefasst werden:

- A: Vorgänge, die noch nicht beendet sind, d.h. die noch gar nicht angefangen haben bzw. deren Ablauf noch andauert , z.B. Werfen eines Würfels, Wachstum von Getreideähren,
- B: Vorgänge, die bereits abgelaufen sind, deren Ergebnisse aber nicht oder nur teilweise bekannt sind, z.B. Diagnose einer Krankheit, Fehlersuche in einem defekten Gerät, Beurteilung der Güte eines Würfels.

Im Fall A wird mit der Angabe von Wahrscheinlichkeiten für die möglichen Ergebnisse deren mögliches Eintreten bewertet.

Im Fall B läuft ein Erkenntnisprozess ab, der die Bestimmung des vorhandenen Zustands zum Gegenstand hat und zu dessen Bedingungen die vorhandenen Informationen und der Wissensstand des Untersuchenden gehören. Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses gibt in diesem Fall die Sicher-

heit an, mit der das Ergebnis eingetroffen ist bzw. der jeweilige Zustand vorliegt. Mit der Zunahme von Informationen ändern sich in der Regel die Wahrscheinlichkeiten.

Mit Wahrscheinlichkeiten können Prognosen für zukünftige Ereignisse abgegeben werden. Man kann z.B. angeben, was am ehesten zu erwarten ist, ob alle Möglichkeiten gleichwahrscheinlich sind oder was wohl kaum eintreffen wird.

Wahrscheinlichkeiten können aber auch dazu dienen, eingetroffenen Ereignisse zu bewerten. Ist die Wahrscheinlichkeit groß, so ist das Ergebnis keine Überraschung. Ist die Wahrscheinlichkeit klein, so ist Anlass zur Freude oder zur Verwunderung.

### **Das Verhältnis von Wahrscheinlichkeit und relativer Häufigkeit**

Aus dem bisherigen ist ersichtlich, dass der Wahrscheinlichkeitsbegriff nicht über die Stabilität der relativen Häufigkeit eingeführt werden sollte wie es in den meisten Lehrbüchern geschieht, sondern es werden Vorstellungen zum Wahrscheinlichkeitsbegriff vor der Beschäftigung mit relativen Häufigkeiten entwickelt. Untersuchungen zur relativen Häufigkeit von Ergebnissen in langen Versuchsserien sind für die Vertiefung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes allerdings von großer Bedeutung. Es sollten dabei folgende Zusammenhänge beachtet und entsprechend erste Erkenntnisse erarbeitet bzw. erste Einsichten vermittelt werden:

- Der Vergleich von Wahrscheinlichkeiten und relativen Häufigkeiten ist nur für den Fall A der Verwendung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes von Bedeutung (s. o.). Im Fall B ist eine Ermittlung relativer Häufigkeiten nicht möglich, da der Vorgang ja beendet ist und es um die Bestimmung der Ergebnisse geht.
- Eine Wahrscheinlichkeitsangabe hat im Fall A (und der soll im Folgenden nur betrachtet werden) immer einen prognostischen und theoretischen Charakter. Es ist eine allgemeine Aussage über eine Eigenschaft eines realen Vorgangs, die Prognosen für seine möglichen Ergebnisse gestattet. Wahrscheinlichkeitsaussagen sind Metabetrachtungen, die nicht an tatsächliche Geschehnisse gebunden sind.
- Die relative Häufigkeit ist ein empirischer Wert, der sich auf der Grundlage von konkreten Ergebnissen durchgeführter oder abgelaufener Vorgänge ergibt. Die Angabe von relativen Häufigkeiten ist an eine konkrete Anzahl von Wiederholungen des Vorgangs und damit an tatsächliche Ereignisse gebunden.
- Die numerischen Werte der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses und seiner relativen Häufigkeit liegen oft dicht bei einander bzw. sind identisch. Dies legt die Gefahr einer inhaltlichen Gleichsetzung nahe.
- Ist die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses unbekannt, kann durch wiederholte Durchführung des Vorgangs unter gleichen allgemeinen Bedingungen mit Hilfe der relativen Häufigkeit ein Näherungswert für die Wahrscheinlichkeit angegeben werden. In diesen Fall sind Wahrscheinlichkeit und relative Häufigkeit numerisch identisch. Allerdings sollte der Schüler erleben, dass sich die relative Häufigkeit mit ändernder Versuchszahl verändert, während die Wahrscheinlichkeit immer gleich bleibt. Man wählt nur immer einen neuen Näherungswert.
- Mit größer werdender Anzahl der Wiederholung eines Vorgangs unter den gleichen Bedingungen werden die Schwankungen der relativen Häufigkeit um die Wahrscheinlichkeit immer geringer. Diese Gesetzmäßigkeit wird Gesetz der großen Zahlen genannt bzw. als Stabilität der relativen Häufigkeit oder stochastische Konvergenz bezeichnet. Diese Konvergenz darf nicht mit der numerischen Konvergenz einer Zahlenfolge gleichgesetzt werden.
- Mit der ausschließlichen Betrachtung einer Folge von relativen Häufigkeiten kann das Gesetz der großen Zahlen nicht vollständig erfasst werden. Hinzu kommt, dass die Schüler solche Beobachtungen sehr selten im Alltag erleben. Weitaus häufiger erleben sie eine relativ geringe Anzahl von Wiederholungen eines Vorgangs, aus der sie Schlussfolgerungen über die Wahrscheinlichkeit ableiten. Deshalb sollte ein Experiment durchgeführt werden (AH S. 15), mit die Schwankungsbreite der relativen Häufigkeit bei einer bestimmten kleinen Anzahl von Wiederholungen erlebt werden kann.

Ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses bekannt, so kann eine Prognose für seine relative Häufigkeit bei einer bestimmten Anzahl von Wiederholungen des Vorgangs angegeben werden. Diese Interpretation der Wahrscheinlichkeit heißt *Häufigkeitsinterpretation*. Sie liefert gute Vorstellungen von der Bedeutung und auch der Größe einer Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses.

## Arithmetisches Mittel

Zwischen den Begriffen Durchschnitt und arithmetisches Mittel wird nicht unterschieden, da es wesentliche inhaltliche und formale Gemeinsamkeiten gibt und die Unterschiede in der Begriffsverwendung aus statistischer Sicht gering sind.

Obwohl das arithmetische Mittel in der Statistik nur ein möglicher Mittelwert neben dem Zentralwert und dem Dichtemittel ist, sollte zur begrifflichen Vereinfachung der Begriff Mittelwert synonym für arithmetisches Mittel verwendet werden, wie es in fast allen Lehrbüchern üblich ist. Mittelwert und Zentralwert sind damit Nebenbegriffe und können später als statistische Kenngrößen der Lage einer Verteilung bezeichnet werden.

Es kann davon ausgegangen werden, dass die Schüler den Begriff Durchschnitt aus dem täglichen Leben kennen und z. T. auch bereits Durchschnitte (Zensuredurchschnitt) berechnet haben. Dies sollte bei der Einführung beachtet werden.

Es werden zwei Modelle zum inhaltlichen Verständnis des arithmetischen Mittels angegeben, die auch im Unterricht materialisiert werden sollten. Das arithmetische Mittel kann einmal als Ausgleichswert (mittlerer Wasserstand: Wasser in verschiedenen Röhren, gleichmäßig verteilen) und einmal als Schwerpunkt einer Masseverteilung (Brett mit verschiedenen Massestückchen in gleichen Abständen, im Schwerpunkt unterstützt, dadurch Gleichgewicht) gedeutet werden. Insbesondere das Gleichgewichtsmodell kann zur inhaltlichen Begründung von Eigenschaften und Grenzen der Anwendung des Durchschnitts verwendet werden.

Folgende inhaltlichen Eigenschaften und Anwendungsaspekte sollten an Beispielen verdeutlicht werden. Eine Systematisierung und Festigung kann erst in späteren Klassenstufen erfolgen.

- Mit dem Durchschnitt kann man verschiedenen Verteilungen durch eine Zahl charakterisieren und damit vergleichen. Insbesondere kann man die Werte einer Stichprobe mit den (bekannten) Werten der Grundgesamtheit vergleichen.
- Mit der Reduzierung auf den Durchschnitt gehen aber auch viele Besonderheiten und Aussagen verloren. Es kann dadurch auch zu falschen oder verzerrten Einschätzungen kommen.
- Ein Durchschnitt ist dann besonders aussagekräftig, wenn alle Merkmalsausprägungen den gleichen Wert oder den gleichen Abstand haben und die Häufigkeitsverteilung die Form einer Glocke hat.
- Der Durchschnitt liegt nicht immer in der Mitte, muss nicht der häufigste Wert sein und braucht auch nicht zu den Merkmalsausprägungen zu gehören.

## Statistische Untersuchungen und zufällige Vorgänge

Die Prozessbetrachtung zufälliger Erscheinungen sollte auch bei der Durchführung bzw. Auswertung statistischer Untersuchungen eine Rolle spielen. Dadurch werden Betrachtungen zum Hintergrund der Daten und zu Ursachen für die Art und Verteilung der Daten angeregt. Es sind jedoch folgende Unterschiede zu den Betrachtungen zu beachten, die im Rahmen der Wahrscheinlichkeitsrechnung durchgeführt werden:

- In der Wahrscheinlichkeitsrechnung geht man von Vorgängen aus, die beliebig oft unter gleichen Bedingungen wiederholt werden können. Dafür gibt es in der Erfahrungswelt der Schüler als Beispiele vor allem die Glücksspiele mit den "Zufallsgeneratoren" Würfel, Münze, Urne, Glücksrad. Die Wiederholung eines Vorganges kann nacheinander erfolgen (einen Würfel dreimal werfen) oder auch in gleichwertiger Weise durch parallelen Verlauf des gleichen Vorgangs (drei Würfel einmal werfen). Bei der Betrachtung mehrstufiger Vorgänge stellt man sich die Erscheinungen immer als nacheinander ablaufende Prozesse vor.
- Bei statistischen Untersuchungen besteht die Wiederholung in der Regel im gleichzeitigen Verlauf der Vorgänge (z.B. Entwicklungsprozesse von Einstellungen und Gewohnheiten). Die Gleichheit der Bedingungen muss erst untersucht werden, bevor man Grundgesamtheiten von Vorgängen bilden kann. Genau gleiche Bedingungen bei allen Vorgängen gibt es praktisch nicht, sie können nur im wesentlichen gleich sein. Auch bei einem nacheinander Ablaufen der Vorgänge (z.B. Weitsprünge eines Schülers, Schulwegzeiten eines Schülers im Laufe eines Monats) sind die Ausprägungen der Bedingungen bei jedem Ablauf anders.
- Im Unterschied zu den zufälligen Vorgängen im Rahmen der Wahrscheinlichkeitsrechnung laufen bei statistischen Untersuchungen die Vorgänge auch nach der Erfassung ihrer Ergebnisse weiter.

- Während in der Wahrscheinlichkeitsrechnung der Vorgang selbst meist klar erkennbar ist und angegeben wird (Werfen eines Würfels, Drehen eines Glücksrades, Ziehen aus einer Urne), ist dies in der Statistik nicht der Fall. Vielfach wird in Lehrbüchern fälschlicherweise der Messvorgang als der zufällige Vorgang (Zufallsexperiment) bezeichnet (z.B. Messung der Lebensdauer einer Glühlampe). Dies ist nahe liegend, da als „Experiment“ ja eine statistische Untersuchung geplant und durchgeführt wird, die zu unterschiedlichen Ergebnissen führen kann. Der eigentliche Vorgang bleibt dadurch aber außerhalb der Betrachtungen, was zu einer Verarmung der Auswertung der Daten führt, die sich dann nur auf die Angabe der Ergebnisse und Bestimmung von Kenngrößen oder bestimmter Auffälligkeiten beschränkt. Erst die Betrachtung des Vorgangs (z.B. Produktionsprozess einer Glühlampe) und seiner Bedingungen erlaubt eine tiefere und weiterführende Auswertung.

Um die Unterschiede auch bei der grafischen Darstellung zufälliger Vorgänge zu berücksichtigen, wurden der Beschreibung statistischer Untersuchungen der Fall zeitlich parallel laufender Vorgänge zu Grunde gelegt (mehrere parallele Pfeile) und der weitere Verlauf der Vorgänge nach der Messung der Ergebnisse im Rahmen einer statistischen Untersuchung veranschaulicht, indem ein zu den Pfeilen senkrechter Strich den Zeitpunkt der Messung angeben soll.

### **Auswertung statistischer Daten**

Beim Auswerten der Datensätze sollten die Schüler möglichst oft erleben, dass die Beschäftigung mit den Zahlen spannend sein kann, dass viel mehr herauszulesen ist als man auf den ersten Blick sieht, dass Zusammenhänge und Hintergründe sichtbar werden können, dass hinter den Zahlen oft einzelne menschliche Schicksale und Probleme stehen, dass neue Fragen aufgeworfen werden können u. a. m. Bei der Auswertung sollte man deshalb nicht bei einer reinen Beschreibung stehen bleiben, sondern nach Zusammenhängen, Tendenzen und Ursachen suchen.

Es könnten z.B. etwa folgende konkrete Fragen aufgeworfen werden:

- Ist die Klasse im Schnitt groß, normal oder klein? Welche Schüler sind groß, normal oder klein?
- Stimmen die Berufswünsche mit der Häufigkeit der Berufe überein? Wo liegen mögliche Ursachen für Abweichungen?
- Wie viel Zeit braucht ein Schüler im Schnitt für den Schulweg im Vergleich mit anderen Tätigkeiten? Wie groß sind die Unterschiede zwischen den Schülern? Woran liegt das?

Das Lesen und Interpretieren von Tabellen und Diagrammen wird mit Blick auf die Anforderungen im täglichen und beruflichen Leben als wichtiger als das selbständige Anfertigen angesehen. Es handelt sich um komplexe und z. T. anspruchsvolle Handlungen, deren Herausbildung nicht dem Selbstlauf überlassen werden kann.

Zu den auszubildenden Teilhandlungen gehören:

- Identifizieren der Größen, Objekte oder Merkmale, die dargestellt werden,
- Erfassen der Einteilungen der Achsen (Größenart, Einheit, Skalierung, größte kleinste Werte),
- Ablesen von Daten (exakt oder näherungsweise, sinnvolle Genauigkeit),
- Ablesen von Unterschieden zwischen Merkmalsausprägungen, Erkennen von Verdoppelungen oder Halbierungen,
- Erkennen von Trends bei Zeitreihen, Vergleich von unterschiedlichen Zuwächsen in gleichen Zeitabschnitten,
- Erkennen der größten und kleinsten Häufigkeiten (Maxima und Minima der Verteilung)
- Auswahl sinnvoller Vergleichsgrößen.

### **Art des Datenmaterials**

Es sollten solche Datensätze bevorzugt werden, die

- Probleme aus dem Leben oder Umfeld der Schüler erfassen,
- für Schüler fassbar und vorstellbar sind bzw. durch anschauliche Vergleiche vorstellbar gemacht werden können,
- neue und interessante Informationen für die Schüler enthalten oder
- Informationen enthalten, die für die Entwicklung des Territoriums des Landes, der Gesellschaft oder der Menschheit von Bedeutung sind, wobei die Fassbarkeit für Schüler dieser Jahrgänge beachtet werden muss.

Besonders geeignet sind in dieser Hinsicht Daten zum Menschen und seiner Entwicklung, zur Ernährung, Datensätze aus der Schule, geographische Daten aus dem Territorium, Daten zu Tieren, Umwelt- und Mülldaten, Daten zu Verkehrsproblemen oder ausgewählte Daten zu globalen Problemen.

## Durchführung eigener statistischer Untersuchungen

Selbst erfasste Daten besitzen für die Befähigung zum Umgang mit statistischen Daten einen besonderen Wert. Die Schüler besitzen eine bessere Beziehung zu den Daten. Sie können die einzelnen Werte identifizieren, nach Ursachen für Besonderheiten im Datensatz suchen und sind eher motiviert, verbale Einschätzungen oder eine allgemeine Charakterisierung vorzunehmen. Sie können Probleme bei der Auswahl einer Stichprobe oder der Aufstellung eines Fragebogens erleben.

Es wird zwischen Miniprojekten, die im Laufe einer oder höchstens zwei Stunden durchgeführt und ausgewertet werden können und Projekten für eine längere Bearbeitungszeit, etwa im Rahmen einer Projektwoche unterschieden. Als Miniprojekte sind geeignet:

- Geburtsdaten in der Klasse, Probleme: Warum ist es nicht eine gleichmäßige Verteilung? Wann werden die meisten Kinder geboren? Warum gerade in dieser Zeit?
- Anzahl der Geschwister, Probleme: Vergleich mit der durchschnittlichen Familiengröße möglich? Probleme der demographischen Entwicklung
- Körpergröße, Probleme: Vergleich mit der durchschnittlichen Körpergröße und ihrer Streuung bei Schülerinnen und Schülern dieses Alters
- Experimente mit Zufallsgeneratoren, Probleme: Bestätigung, Korrektur und Begründung für erwartete Häufigkeiten, Konsequenzen für Glücksspiele
- Art und Häufigkeit des mitgebrachten oder in der Schule erworbenen Frühstücks der Schüler der Klasse, Probleme: Vergleich mit Orientierungen für eine gesunde Ernährung,
- Befragung der Eltern zum benutzten Verkehrsmittel für den Arbeitsweg, Probleme: Zusammenhänge zwischen Entfernung, Verkehrsmittel und Zeit zur Arbeit
- Anzahl der Vokale und Konsonanten in einem deutschen, englischen und italienischem Text, Probleme: Vergleich mit Durchschnittszahlen, Konsequenzen oder Ursachen für Klang der Sprache

Alle diese Projekte besitzen den Vorteil, dass sie mit der nächsten Klasse in gleicher Weise durch den Lehrer durchgeführt werden können, wodurch sich der höhere Vorbereitungsaufwand und die Einarbeitung in eine spezielle Sachthematik auf längere Sicht rentiert. Als größere Projekte über mehrere Unterrichtsstunden sind vor allem Untersuchungen im Rahmen der Schule geeignet. Untersuchungen darüber hinaus, etwa Verkehrszählungen, erfordern einen wesentlich höheren Aufwand wie z.B. Genehmigungen von Behörden und sind oft weniger gut auswertbar, da Informationen schwer beschaffbar sind. Größere Projekte, die dann auch auf der Schulebene ausgewertet werden, sind in den folgenden Jahren kaum wiederholbar.