

## Planungsvorschlag zum Themenbereich „Räumliche Geometrie“ in Klasse 5

### Ziele und Schwerpunkte

#### Forderungen der Bildungsstandards

Die Schülerinnen und Schüler

- können Körper und ebene Figuren nach Eigenschaften sortieren und Fachbegriffe zuordnen,
- Körper und ebene Figuren in der Umwelt wieder erkennen,
- berechnen Volumen und Oberflächeninhalt von Würfeln und Quadern sowie aus zwei Quadern zusammengesetzte Körper,
- stellen Würfel und Quader als Netz und Schrägbild dar und erkennen Körper aus ihren entsprechenden Darstellungen,
- festigen ihr räumliches Vorstellungsvermögen,
- erkennen, beschreiben und nutzen räumliche Beziehungen.

### Planungsvorschlag

Thema	Std.	Schwerpunkte	Bemerkungen
<b>Rückblick</b>	<b>4</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Wiederholen und Systematisieren der Bezeichnungen und Eigenschaften von Körpern</li> <li>• Vertiefen des Begriffes „Netz eines Quaders bzw. Würfels“</li> <li>• Zuordnen, Vervollständigen bzw. Zeichnen von Netzen</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Unterscheidungsmerkmale: Ecken, Kanten, Begrenzungsflächen</li> <li>– Das Arbeiten mit Netzen dient vor allem der Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens.</li> </ul>
<b>6.1 Geometrische Körper – Eigenschaften von Quadern</b>	<b>2</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Identifizieren und Realisieren von Würfeln und Quadern</li> <li>• Eigenschaften von Quadern</li> </ul>	– als Zusatz: Symmetrieebenen von Quadern
<b>6.2 Schrägbilder von Quadern</b>	<b>4</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Einführen von „Schrägbild“ als Schattenbild</li> <li>• Kenntnis eines Verfahrens zum Zeichnen von Schrägbildern auf Gitterpapier, Vervollständigen und Anfertigen von Schrägbildern</li> </ul>	
<b>6.3 Berechnen des Oberflächeninhalts von Quadern</b>	<b>2</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Anwenden der Flächeninhaltsformeln für Rechtecke</li> </ul>	– Rückführung auf Bekanntes, auf Formel kann verzichtet werden
<b>6.4 Volumen von Körpern</b> Volumen von Körpern	<b>6</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Begriff Volumen (Rauminhalt) eines Körpers, Vergleichen und Bestimmen des Volumens durch Zerlegen in volumengleiche Teilkörper und Auszählen der Teilkörper</li> <li>• Entwicklung von Größenvorstellungen zu den Einheiten des Volumens</li> <li>• Umrechnen von Volumenangaben</li> </ul>	

Thema	Std.	Schwerpunkte	Bemerkungen
Berechnung des Volumens von Quadern		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Kennenlernen von Formeln für das Volumen, Anwendung der Formeln, Festigung der Arbeit mit Formeln</li> <li>• funktionale Betrachtungen</li> <li>• Sachaufgaben zur Volumenberechnung, Festigung der Vorgehensweisen zum Lösen von Sachaufgaben</li> </ul>	– Finden der Formel durch Auslegen eines Quaders
<b>6.5 Gemischte Aufgaben</b>	<b>6</b>	Auswahl von Schwerpunkten entsprechend der Klassensituation <ul style="list-style-type: none"> <li>• Integration der Kenntnisse zur Flächen- und Volumenberechnung</li> <li>• Umrechnung von Größen, Entwickeln von Größenvorstellungen</li> <li>• Ermittlung und Berechnung von Flächeninhalten und Volumina, Größenvorstellungen</li> <li>• Zeichnen bzw. Ergänzen von Schrägbildern</li> <li>• Knobelaufgaben zum räumlichen Vorstellungsvermögen</li> </ul>	
<b>Summe</b>	<b>24</b>		

## ***Hinweise zu ausgewählten Problemen***

### **Zur Entwicklung des Raumvorstellungsvermögens**

Die Entwicklung des Raumvorstellungsvermögens ist aufgrund ihrer großen Bedeutung für viele, insbesondere technische Berufe ein wesentliches Ziel des Mathematikunterrichts, das langfristig und kontinuierlich zu realisieren ist.

Es wird davon ausgegangen, dass das Raumvorstellungsvermögen in keinem direkten Zusammenhang mit anderen mathematischen Fähigkeiten steht und deshalb einer eigenen zielgerichteten Entwicklung bedarf. Obwohl die individuellen Anlagen der Schüler offensichtlich einen erheblichen Einfluss auf das entsprechende Können und seine Entwicklung haben, wird die Möglichkeit einer bedeutenden Verbesserung des Raumvorstellungsvermögens durch das planmäßige Lösen entsprechender Aufgaben nicht in Zweifel gezogen.

Infolge der unterschiedlichen Voraussetzungen der Schüler sind Möglichkeiten zur Differenzierung des Anforderungsniveaus zu planen. Dabei spielt die Zulassung von gegenständlichen oder zeichnerischen Veranschaulichungen beim Lösen der Aufgaben die wichtigste Rolle.

Es sollte im Wesentlichen eine Beschränkung auf das Arbeiten mit Würfeln erfolgen, da alle wichtigen Aufgabentypen an Würfeln realisierbar sind, Würfel leichter räumlich vorgestellt, als Modell realisiert sowie als Schrägbild gezeichnet werden können.

Die Aufgaben sollten ohne Zeitdruck meist in Partnerarbeit oder individuell gelöst werden, da es nicht um Fertigkeitentwicklung und Training von Aufgabentypen geht und die Fähigkeiten zur räumlichen Vorstellung sehr unterschiedlich sind.

Es sollten hauptsächlich solche Aufgaben behandelt werden, die ein Operieren im Kopf erfordern und zu denen leicht gegenständliche Veranschaulichungen möglich sind. Die Verwendung von Modellen (Spielwürfel, selbstgebautes Kantenmodell, Quadrate und Klebestreifen für Netze) sollte differenziert erfolgen, d. h. in der Regel erst bei Bedarf von den Schülern eingesetzt werden.

## Zum Zeichnen von Schrägbildern

Schrägbilder können als Schattenbilder bei schrägem, parallelem Lichteinfall gedeutet werden. Durch dynamische Betrachtungen kann verdeutlicht werden, dass jeder Winkel zwischen Tiefenkanten und Frontansicht und jede Länge einer Tiefenkante möglich sind. Schrägbilder sollen eine Vorstellung von dem abgebildeten Körper vermitteln. Durch Vergleich verschiedener Schrägbilder wird verdeutlicht, dass eine gute Anschaulichkeit bei einem Winkel von  $45^\circ$  und einer angenäherten Halbierung der Tiefenkanten erreicht wird. Die Bezeichnung „Schrägbild“ wird damit nicht mit dem Frontwinkel  $45^\circ$  und dem Verkürzungsverhältnis  $\frac{1}{2}$  verbunden.

Bei Schrägbildern kann nach der Richtung gefragt werden, aus der die Lichtstrahlen auf den Körper fallen. Die entspricht einer vorgestellten Blickrichtung.

Zum Zeichnen von Schrägbildern wird auf die überwiegende Verwendung von Gitterpapier orientiert. Als Frontwinkel (ohne den Begriff zu verwenden) werden  $45^\circ$  und  $135^\circ$  verwendet. Die Länge der Bilder der Tiefenkante wird auf kariertem Papier in Diagonalenlängen gemessen, ansonsten als Hälfte der Originallänge gewählt. Das Verfahren, bei dem auf drei Kästchenlängen (0,5 cm) eine Diagonalenlänge kommt, hat den Vorteil einer guten Annäherung an  $q = \frac{1}{2}$  ( $q = 0,47$ ), ist jedoch bei Verwendung von Maßangaben umständlicher (durch 3 teilbare Zahlenwerte und Umrechnung erforderlich). Es sollte trotz dieser Nachteile verwendet werden.

Die verdeckten Kanten sollten dünn gezeichnet, gestrichelt oder auch weggelassen werden. Das Dünnzeichnen wird erreicht, indem zunächst alle Kanten dünn gezeichnet und dann die sichtbaren mit einem weichen Bleistift nachgezogen werden.

Es sind keine Fertigkeiten im Zeichnen von Schrägbildern erforderlich. Das Arbeiten mit Schrägbildern sollte hauptsächlich zur Entwicklung des Raumvorstellungsvermögens genutzt werden. Die Schüler sollten jedoch das Schrägbild eines Würfels sicher zeichnen können.

Schrägbilder auf Gitterpapier sollten mit Lineal gezeichnet werden. Zur Entwicklung des Freihandzeichnens sollten auch Aufgaben zum Skizzieren von Schrägbildern auf weißem Papier aufgenommen werden.

## Zur Behandlung der Formel für den Oberflächeninhalt eines Quaders

Der mathematische Begriff „Oberfläche“ ist von seiner umgangssprachlichen Verwendung als Fläche, die „oben“ liegt (Oberfläche des Wassers, Tischoberfläche), abzugrenzen. Eine sichere Kenntnis ist nicht erforderlich, da insbesondere bei Anwendungen eine Rückführung auf die Begrenzungsflächen möglich ist.

Die Berechnung des Oberflächeninhalts von Quadern wird als komplexe Anwendung der Flächenberechnung von Rechtecken behandelt. Als Bezeichnung wird  $A_O$  verwendet (A für Flächeninhalt und O für Oberfläche). Die Formeln werden aus Beispielen verallgemeinert aber nicht als zu lernender Stoff angesehen.

## Zur Behandlung des Begriffs Rauminhalt (Volumen) und der Volumenformel für Quaders

Die Einführung der Größe Rauminhalt und die Behandlung der Volumenformel für Quader sollte analog zum Vorgehen in der Ebene erfolgen. Folgende Besonderheiten sind zu beachten:

- Die Bezeichnung „Kubikzentimeter“ wird analog zur Bezeichnung „Quadratzentimeter“ verwendet. Sie ergibt sich aus dem griechischen Wort Kubus für Würfel. Man könnte auch „Würfelzentimeter“ sagen.
- Das Auslegen von Körpern mit gekrümmten Flächen wird nicht betrachtet.
- Im Unterschied zum Flächeninhalt kann man den Rauminhalt beliebiger Körper mithilfe von Messgeräten (Messbecher) ohne direktes Ausfüllen mit Einheitswürfeln ermitteln. Handelt es sich um Hohlkörper (z. B. Gefäße) kann man das Volumen durch Umgießen von Flüssigkeiten messen, bei Vollkörpern ist dies durch Eintauchen in Messbecher möglich. Ein solches Verfahren ist bei festen Körpern oft umständlich und für große Ausmaße kaum praktikabel.
- Die Grundideen (Zusammenfassen von Einheitswürfeln, Zerlegen von  $\text{cm}^3$ , Rückführung auf Längenmessung) lassen sich in Analogie zu Inhaltsberechnung von Rechtecken finden.
- Zur verbalen Formulierung werden in Analogie zum Rechteck die Bezeichnungen Länge, Breite und Höhe verwendet. Es wird aber auch darauf hingewiesen, dass im Alltag (z. B. bei Möbeln) für

Länge und Breite häufig Breite und Tiefe verwendet wird. Breite wird also in unterschiedlichen Bedeutungen verwendet. Der Begriff Tiefe ist allerdings auch für den Mathematikunterricht (Tiefenrichtung in der Darstellenden Geometrie) von Bedeutung.

### **Zu den Beziehungen zwischen den Größen und ihren Einheiten sowie den Formeln**

Um den häufigen Verwechslungen von Flächen- und Raummaßen, von Umfangs-, Flächeninhalt- und Volumenformeln sowie von Begriffen für ebene und räumliche Figuren vorzubeugen, wurden folgende Aufgabentypen und Hinweise aufgenommen:

- Ordnen von Größenangaben unterschiedlicher Größen
- Ausführbarkeit von Additionsaufgaben mit Größen gleicher und unterschiedlicher Art
- Bestimmung der gesuchten Größenart bei Anwendungsaufgaben
- Verwendung der Einheiten  $\text{cm}^2$  bzw.  $\text{cm}^3$  zur Kontrolle der Anzahl der in der Formel enthaltenen Faktoren