

Planungsvorschlag zum Themenbereich „Gebrochene Zahlen“ in Klasse 6

Ziele und Schwerpunkte

Forderungen der Bildungsstandards

Die Schülerinnen und Schüler

- können ein Gefühl für Zahlen entwickeln,
- können den Aufbau des Dezimalsystems verstehen,
- können die Notwendigkeit der Zahlenbereichserweiterung an Beispielen begründen,
- nutzen sinntragende Vorstellungen von gebrochenen Zahlen entsprechend der Verwendungsnotwendigkeit,
- stellen Zahlen der Situation angemessen dar,
- rechnen mit gebrochenen Zahlen, die im täglichen Leben vorkommen, auch im Kopf,
- können Messergebnisse und berechnete Größen in sinnvoller Genauigkeit darstellen,
- können gebrochene Zahlen ordnen und vergleichen,
- erkennen Beziehungen zwischen verschiedenen Darstellungsformen gebrochener Zahlen,
- nutzen zur Kontrolle Überschlagsrechnungen und andere Verfahren.

Planungsvorschlag

Thema	Std.	Schwerpunkte	Bemerkungen
2.1 Rückblick; Begriff der gebrochenen Zahl	5	<ul style="list-style-type: none"> – Wiederholung von Aspekten des Bruchbegriffes (Teile eines Ganzen, Teile einer Anzahl, Bruchteil von Größen); Ermitteln der Ausgangsgröße; gemischte Zahlen – Wiederholung des Erweiterns und Kürzens von Brüchen; Erweitern auf Zehnerbrüche; Wiederholung wichtiger Zuordnungen Dezimalbruch – Bruch – Einführung von „gebrochener Zahl“, Darstellung von Brüchen und Dezimalbrüchen auf dem Zahlenstrahl – Beispiele für bevorzugte Anwendung einer der Darstellungsarten 	<ul style="list-style-type: none"> – s. Hinweise
2.2 Gleichnamigmachen von Brüchen	2	<ul style="list-style-type: none"> – Wiederholung von „gleichnamig“ und „ungleichnamig“ – Einführen von „Hauptnenner“, Wiederholung des Verfahrens zur Bestimmung des kgV 	<ul style="list-style-type: none"> – Die Entwicklung von Fertigkeiten im Gleichnamigmachen sollte in 2.3 und 2.4 erfolgen – s. Hinweise
2.3 Vergleichen und Ordnen von ungleichnamigen Brüchen	3	<ul style="list-style-type: none"> – Wiederholung des Vergleichens gleichnamiger Brüche – Festigung des Gleichnamigmachens, Vergleichen und Ordnen ungleichnamiger Brüche, Anwendungen – Anwenden des Vergleichens beim Lösen von Ungleichungen 	

Thema	Std.	Schwerpunkte	Bemerkungen
2.4 Addieren und Subtrahieren von ungleichnamigen Brüchen	5	<ul style="list-style-type: none"> – Inhaltliches Verständnis des Verfahrens – Entwicklung sicherer Fertigkeiten im Addieren und Subtrahieren von zwei einfachen Brüchen mithilfe folgender Aufgabentypen: <ul style="list-style-type: none"> ○ Lösen formaler Rechenaufgaben ○ Umwandeln von gemischten Zahlen ○ Übersetzen von Texten ○ Lösen von Sachaufgaben ○ Lösen von Gleichungen – Festigung des Addierens und Subtrahierens von Dezimalbrüchen 	<ul style="list-style-type: none"> – Treten in einer Aufgabe Brüche und Dezimalbrüche auf, sollte auf das Arbeiten mit Dezimalbrüchen orientiert werden – <i>Diff.:</i> unterschiedliche Anzahl von Summanden – s. Hinweise
2.5 Multiplizieren von Brüchen	4	<ul style="list-style-type: none"> – Inhaltliches Verständnis des Verfahrens – Entwicklung erster Fertigkeiten im Multiplizieren von zwei einfachen Brüchen mithilfe folgender Aufgabentypen: <ul style="list-style-type: none"> ○ Lösen formaler Rechenaufgaben, auch auf Quadrate ○ Bestimmen eines Bruchteils von Größen ○ Vervielfachen von Brüchen ○ Lösen von Gleichungen ○ Inhaltsberechnungen – erste gemischte Aufgaben zur Identifizierung der Rechenart und Wiederholung der Addition und Subtraktion gemeiner Brüche 	<ul style="list-style-type: none"> – Die Gleichungen sollten durch Zerlegen in Produkte gelöst werden. – <i>Diff.:</i> unterschiedliche Anzahl der Faktoren
2.6 Dividieren durch einen Bruch	3	<ul style="list-style-type: none"> – inhaltliches Verständnis des Verfahrens – Einführung des Reziproken – Entwicklung sicherer Fertigkeiten im Dividieren von einfachen Brüchen mithilfe folgender Aufgabentypen <ul style="list-style-type: none"> ○ Lösen formaler Rechenaufgaben ○ Lösen von Sachaufgaben durch Schließen auf die Einheit und Dividieren ○ Lösen von Gleichungen 	<ul style="list-style-type: none"> – Die Sachaufgaben sollten möglichst auf zwei Arten gelöst werden: durch inhaltliche Überlegungen (z.B. proportionales Schließen) und mithilfe einer Divisionsaufgabe. – s. Hinweise
2.7 Dividieren von Dezimalbrüchen Dividieren durch eine natürliche Zahl Dividieren durch einen Dezimalbruch	8	<ul style="list-style-type: none"> – inhaltliches Verständnis des Verfahrens – Dividieren im Kopf, Dividieren durch Zehnerpotenzen, schriftliches Dividieren, Überschlag – Sachaufgaben zum Schließen auf die Einheit – inhaltliches Verständnis des Verfahrens 	<ul style="list-style-type: none"> – s. Hinweise

Thema	Std.	Schwerpunkte	Bemerkungen
Periodische Dezimalbrüche		<ul style="list-style-type: none"> – Übungen zum Verschieben des Kommas, Dividieren im Kopf – Festigung der schriftlichen Division und des Überschlags – Kenntnis der Entstehung, der Schreib- und Sprechweise periodischer Dezimalbrüche – Wiederholung des Vergleichens von Dezimalbrüchen – Wiederholung des Rundens von Dezimalbrüchen 	<ul style="list-style-type: none"> – durch Vergleichen mit dem Überschlag und Durchführen einer Probe (Multiplikation) sollten das Bedürfnis zur Kontrolle weiterentwickelt werden.
2.8 Eigenschaften gebrochener Zahlen	4	<ul style="list-style-type: none"> – Rückschau auf Zahlenbereichserweiterung: <ul style="list-style-type: none"> ○ Ausführbarkeit von Rechenoperationen ○ Zusammenhang von Q_+ und N – Anwendung der Rechengesetze zum vorteilhaften Rechnen 	<ul style="list-style-type: none"> – <i>Diff.:</i> Erkenntnis der Dichtigkeit der gebrochenen Zahlen im Unterschied zu den natürlichen Zahlen – s. Hinweise
2.9 Gemischte Aufgaben	6	<p>Auswahl eines Schwerpunktes entsprechend der Klassensituation:</p> <ul style="list-style-type: none"> – Geschicktes Lösen von Aufgaben mit verschiedenen Rechenoperationen, Suchen von Fehlern – Lösen von Sachaufgaben, Knobel- und Scherzaufgaben – Projekt: Heimische Wälder – Festigung der Anzahlbestimmung – Berechnen relativer Häufigkeiten 	
Summe:	40		

Hinweise zu ausgewählten Problemen

Bildung des Begriffs der gebrochenen Zahl

Nachdem die Schüler in der Klasse 5 vielfältige Erfahrungen mit Brüchen und Dezimalbrüchen gesammelt und entsprechende Vorstellungen entwickelt haben, wird zu Beginn der Behandlung der Bruchrechnung in Klasse 6 die *Bezeichnung „gebrochene Zahl“* eingeführt. Damit muss der Schüler seine Vorstellungen zum Zahlbegriff erheblich verändern. Bisher war die Bezeichnung „Zahl“ mit den Eigenschaften der natürlichen Zahl verbunden. Insbesondere gab es für jede Zahl genau eine Darstellung mithilfe von Ziffern. Die in der Grundschule zwar versuchte Unterscheidung von *Zahl und Ziffer* ist sicher kaum von den Schülern verstanden und behalten worden. Jetzt ist eine Unterscheidung von „Zahl“ und Darstellung der Zahl notwendig. Es gibt keine eindeutige Bezeichnung einer gebrochenen Zahl mithilfe von Ziffern.

Eine erste Verwendung eines erweiterten Zahlbegriffes wurde bei der Erklärung des Dezimalbruchbegriffes vorgenommen: Zahlen mit einem Komma heißen Dezimalbrüche. Dezimalbrüche werden von Schülern noch am ehesten als Zahlen angesehen, da ihre Darstellung mithilfe von Ziffern, abgesehen von der Möglichkeit beliebig viele Nullen anzuhängen, ebenfalls eindeutig ist.

Eine Verbindung oder gar Gleichsetzung der Begriffe Dezimalbruch und Zehnerbruch sollte vermieden werden.

Die Eindeutigkeit der Darstellung einer gebrochenen Zahl ist nur mithilfe des *Zahlenstrahls* möglich. Die verschiedenen Bezeichnungen gebrochener Zahlen erscheinen nun als verschiedene Bezeichnungen für einen Punkt. Der Zahlenstrahl (und später die Zahlengerade) hat damit eine erhebliche Bedeutung für die Entwicklung des Zahlbegriffes. Es geht nicht mehr nur um die grafische Darstellung

von (eigentlich bekannten) Zahlen, sondern mithilfe dieser Darstellung werden die Vorstellungen und Kenntnisse der Schüler zu den verschiedenen Zahlbegriffen erst herausgebildet. Die Zahlenbereichserweiterungen können als schrittweise Erforschung der Zahlengeraden aufgefasst werden. Die Zahlengerade ist sowohl Veranschaulichungs- als auch Erkenntnismittel.

Mit dem Begriff "*Bruch*" verbinden die Schüler vor allem Vorstellungen zu gemeinen Brüchen. Ein Dezimalbruch hat in ihrer Vorstellung sehr wenig mit einem Bruch zu tun, man kann höchstens beide z. T. ineinander umformen. Es ist also aus Sicht der Vorstellungen der Schüler nicht sinnvoll, die Bezeichnung „Bruch“ als Oberbegriff für gemeine Brüche und Dezimalbrüche zu verwenden, obwohl dies sprachlich nahe liegend ist.

Ein weiteres Argument gegen eine solche Begriffsbildung ist die Erweiterung des Dezimalbruchbegriffes in späteren Klassen; ein unendlicher nichtperiodischer Dezimalbruch lässt sich gerade nicht als Bruch darstellen. Eine Definition der gebrochenen Zahlen als Klassen von Brüchen sollte deshalb nicht erfolgen.

Diese schwierigen begrifflichen Zusammenhänge sollten *nicht* mit den Schülern erörtert werden. Sie können sich Vorstellungen zum Begriff der gebrochenen Zahl durch den Umgang mit diesem Begriff aneignen. Eine Möglichkeit, dies in Anwendungszusammenhängen zu tun, ist die Betrachtung von Vor- und Nachteilen der Bruch- bzw. Dezimalbruchschreibweise bei realen Sachverhalten.

Entwicklung von Fertigkeiten im Gleichnamigmachen von Brüchen

Das Gleichnamigmachen von Brüchen baut auf dem Bestimmen des kgV von Zahlen auf. Im Rahmen der Teilbarkeit sollte deshalb die Entwicklung von entsprechenden Fertigkeiten erfolgen, wobei auf das Verfahren der Vervielfachung der größten Zahl orientiert werden sollte. Je nach Stand der Fertigkeitenentwicklung und Verallgemeinerung der Verfahrenkenntnisse ist eine Reaktivierung und Festigung der Bestimmung des kgV zweier Zahlen notwendig.

Das notwendige Niveau der Fertigkeiten im Gleichnamigmachen sollte in den folgenden Anschnitten im Zusammenhang mit dem Vergleichen und Addieren/Subtrahieren herausgebildet werden.

Die Spezialfälle (Nenner teilerfremd bzw. ein Nenner ist Teiler des anderen) brauchen nicht als Extraverfahren angeeignet werden. Sie sind im Verfahren der Vervielfachung enthalten und können als Rechenvorteil behandelt werden (Erst denken, dann rechnen!).

Vergleichen und Ordnen von Brüchen

Das Vergleichen und Ordnen von ungleichnamigen Brüchen sollte vor allem zur Festigung des Gleichnamigmachens erfolgen. Das Verfahren des „Überkreuz-Multiplizierens“ ist zwar eine rationelle Methode zum Vergleichen zweier Brüche, es ist aber nicht erforderlich und wird im späteren Unterricht kaum benötigt, da Verhältnisgleichungen nur noch eine geringe Rolle spielen.

Verwendung von gemischten Zahlen und Dezimalbrüchen beim Arbeiten mit Brüchen

Die Darstellung unechter Brüche als gemischte Zahlen sollte sparsam und keineswegs konsequent erfolgen. Im späteren Unterricht und bei Anwendungen spielen gemischte Zahlen eine untergeordnete Rolle. Die Schüler sollten aber mit dieser Darstellung vertraut sein und sie als Summe aus einer natürlichen Zahl und einem (echten) Bruch deuten. Bei Umwandlungen kann dann das Verfahren der Addition von Brüchen angewendet werden.

Zu den sicheren Kenntnissen, die auch beim Arbeiten mit Brüchen gefestigt werden sollten, gehört die Kenntnis von Zuordnungen bestimmter Brüche zu Dezimalbrüchen. Die Schüler sollten folgende Zuordnungen sicher beherrschen:

$$\frac{1}{2} = 0,5 \quad \frac{1}{4} = 0,25 \quad \frac{3}{4} = 0,75 \quad \frac{1}{5} = 0,2 \quad \frac{1}{10} = 0,1; \quad \text{ sowie die Vielfachen von } \frac{1}{5} \text{ und } \frac{1}{10} .$$

Diese Beziehungen können beim Vergleichen sowie den Rechenoperationen mit Brüchen oft zum vorteilhaften Rechnen verwendet werden. Sie spielen weiterhin eine wichtige Rolle in der Prozentrechnung.

Im Zusammenhang mit der Behandlung der Rechenoperationen mit Brüchen sollten nach einer ersten Festigung auch die Verfahren zum Rechnen mit Dezimalbrüchen wiederholt und gefestigt werden. Die Dezimalschreibweise von Ergebnissen sollte vor allem bei Größenangaben erfolgen.

Verständnis der Rechenverfahren

Für viele Schüler bleibt das Rechnen mit Brüchen ein verständnisloses und ausschließlich formales Hantieren mit Gebilden, die aus Zähler, Bruchstrich und Nenner bestehen. Während jedes Verfahren bei seiner isolierten Übung durchaus beherrscht werden kann, werden bei gemischten Aufgaben oder Wiederholungen häufig die einzelnen Verfahrenselemente durcheinander gebracht und sinnlos miteinander verknüpft. Grundlage für ein inhaltliches Verständnis der Rechenverfahren sind die inhaltlichen Vorstellungen zu den einzelnen Aspekten des Bruchbegriffes. Sie werden bei den verschiedenen Rechenverfahren in unterschiedlicher Weise angesprochen.

Ein inhaltliches Verständnis der Rechenverfahren ist sowohl für die aktuelle Beherrschung als auch für die Bewältigung komplexer Anforderungen sowie bei den selbständigen Reaktivierungen von Bedeutung. Ein Verständnis der Verfahren trägt zur Motivierung und zu einem planvolleren Vorgehen der Schüler bei. Ein inhaltliches Verständnis kann oft auf verschiedenen Wegen erreicht werden. Ein gute und effektive Möglichkeit sind einprägsame, möglichst visualisierte Beispiele, die zusammen mit den allgemeinen Verfahrensschritten abgespeichert werden können. Der Schüler kann sich an diesen Beispielen die Sinnhaftigkeit des Verfahrens selbst verdeutlichen und bei späteren Wiederholungen sogar das Verfahren aus dem Beispiel rekapitulieren.

Spezialfälle der Rechenverfahren

Bei allen Rechenoperationen treten gewisse *Spezialfälle* auf, die meist mit Auftreten natürlicher Zahlen verbunden sind. Es wird angesichts der knappen Zeit und der ohnehin schon großen Vielfalt der anzueignenden Verfahren nicht für sinnvoll gehalten, diese Spezialfälle gleichberechtigt bei der Einführung des Verfahrens zu behandeln und spezielle Schrittfolgen zu vermitteln. Die Schüler sollten daran gewöhnt werden, in solchen Fällen die Aufgabe als Problem anzusehen und unter Verwendung heuristischer Verfahrenskennnisse zu lösen. Meist ist die Anwendung des Rückführungsprinzips möglich.

Lösen von Gleichungen

Das Lösen von Gleichungen ist eine geeignete Methode zur Festigung der Rechenverfahren durch Anwendung auf eine neue Fragestellung. Es kann als Umkehraufgabe zur Anwendung der Verfahren aufgefasst werden. Gleichzeitig können die Kenntnisse und Sprechweisen beim Umgang mit Gleichungen und Methoden zum inhaltlichen Lösen von Gleichungen gefestigt werden.

Addition und Subtraktion von ungleichnamigen Brüchen

Beim Addieren und Subtrahieren von Brüchen werden die Vorstellungen von Brüchen als Teile eines Ganzen für das inhaltliche Verständnis benötigt.

Als *einprägsames Beispiel* kann die Aufgabe $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ gewählt werden, die sich durch ein Zusammenfügen zweier Teile derselben Einheit (z.B. Füllvorgang) visualisieren lässt.

Als *Spezialfälle* des Verfahrens sollten die Addition bzw. Subtraktion einer natürlichen Zahl und die Umwandlung gemischter Zahlen in unechte Brüche und umgekehrt behandelt werden.

Multiplikation von Brüchen

Die Multiplikation kann aus der Verwendung von Brüchen *zur Angabe von Bruchteilen einer Größe* abgeleitet werden. Als *Musterbeispiel* ist die Aufgabe $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ geeignet, die als Bestimmen der Hälfte von einem Viertel gedeutet werden kann. Das *Kürzen* der Zähler und Nenner vor dem Multiplizieren sollte als Teilschritt sofort direkt in das Verfahren einbezogen werden, wenn auch bei den ersten Übungen noch nicht gekürzt zu werden braucht und aus Sicht der mathematischen Definition der Multiplikation ein Kürzen nicht erforderlich ist.

Als *Spezialfälle* sollten die Multiplikation mit natürlichen Zahlen (Vervielfachen von Brüchen) sowie das Bestimmen von Bruchteilen einer Größe behandelt werden.

Division durch einen Bruch

Das Verfahren zur Division von Brüchen kann in wenigen Schritten ohne langwierige Erklärungen aus der Auffassung eines Bruches als *Divisionsaufgabe* abgeleitet werden. Dabei ist allerdings ein Umgehen mit Doppelbrüchen erforderlich. Dieser Zugang ist aber im späteren Unterricht in folgenden Hinsichten verwendbar.

- Doppelbrüche treten bei einigen Anwendungen auf.
- Es wird das Erweitern verallgemeinert, als Erweiterungszahlen sind auch Brüche möglich.
- Es wird das Beseitigen bzw. Rationalmachen des Nenners eines Bruches durch Erweitern vorbereitet.

Zum weiteren Verständnis des Rechenverfahrens und zur Festigung der Aspekte der Division sollten Verteilssituationen bzw. Aufteilsituationen betrachtet werden, z. B.:

- 1 Liter Saft auf Viertellitergefäße verteilen
- ein 1 m langes Band in Stücke zu $\frac{1}{4}$ m aufteilen (zerschneiden)

Die Aufgaben sind anschaulich lösbar, wenn sich die Größe vollständig in die kleineren Teile teilen lässt und sich damit als Ergebnis eine natürliche Zahl ergibt.

Als Musterbeispiel sind die Aufgaben $1 : \frac{1}{4} = 4$ oder $1 : \frac{1}{2} = 2$ geeignet.

Als wichtige Vertiefung des Verfahrens sollten Verhältnisse (Quotienten) zweier Größen als Normierung (Bezug) der einen Größe (Dividend) auf eine Einheit der anderen Größe (Divisor) betrachtet werden, z.B.

- $\frac{1}{2}$ kg Fleisch kostet 2,98 €. Was kostet 1 kg?
- Für 45 km braucht Mario $\frac{3}{2}$ Liter Benzin. Wie weit kann er mit 1 Liter fahren?

Als *Spezialfälle* sollten die Division mit natürlichen Zahlen (als Dividend und Divisor) behandelt werden.

Division von Dezimalbrüchen

Im Unterschied zum Rechnen mit Brüchen ist es sinnvoll, das Dividieren durch eine natürliche Zahl gesondert zu behandeln, da dieses Verfahren ein Bestandteil des allgemeinen Verfahrens ist.

Inhaltliches Verständnis für das Verfahren der Division durch eine natürliche Zahl kann beim Dividieren von Größenangaben durch Umrechnen in kleinere Einheiten erreicht werden. Das Verschieben des Kommas beim Dividieren durch einen Dezimalbruch kann durch Übergang zur Bruchschreibweise der Divisionsaufgabe und geeignetes Erweitern verständlich gemacht werden.

Als Musteraufgaben wären $0,4 : 2 = 0,2$ und $0,4 : 0,2 = 4 : 2 = 2$ geeignet.

Behandlung der Rechengesetze

Wie bereits in der Klasse 5 werden die *Rechengesetze* vor allem unter dem Aspekt ihrer Anwendung zum vorteilhaften Rechnen behandelt. Ihre explizite Formulierung und Benennung ist nicht erforderlich.

Von den in Klasse 5 im Zusammenhang mit dem mündlichen Rechnen behandelten *Rechenvorteilen* sollten das geeignete Vertauschen der Reihenfolge, das Zerlegen von Zahlen in der Nähe von Vielfachen von 10 und das Multiplizieren bzw. Dividieren mit 5 und 25 wiederholt werden.

Diese Rechenvorteile sollten als *Linienführung* bis zur Klasse 10 immer wieder aufgegriffen werden, um die Schüler an ein überlegtes und effizientes Aufgabenlösen zu gewöhnen und die Kopfrechenfertigkeiten zu bewahren.