Spaß mit Mathe

Möglichkeiten zur Einbeziehung von unterhaltsamen Aufgaben in den Mathematikunterricht

Zusammenstellung der Aufgaben und Lösungen:
Prof. Dr. Hans-Dieter Sill
Universität Rostock
Institut für Mathematik

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort 2

1. Mündliches Rechnen mit natürlichen Zahlen 3

1.1 Finden von Rechnungen zu Ergebnissen 3

1.1.1 Spiel 40 3

1.1.2 Interessante Rechnungen mit nur einer Ziffer 4

1.2 Rechenvorteile 6

1.3 Bilden von Summen 11

1.3.1 Bilden gleicher Summen 11

1.3.2 Spröde Zahlen 12

1.3.3 Partnertest 13

1.4 Wer gehört nicht dazu? 14

1.5 Kryptogramme 14

1.6 Magische Figuren 16

1.7 Trick zur Summe von Quadraten 17

2 Schriftliches Rechnen mit natürlichen Zahlen 20

2.1 Spaß mit der Lieblingszahl 20

2.2 Kaprekarzahlen 21

2.3 Kuriose Rechnungen 23

3 Rechnen mit Dezimalbrüchen 24

3.1 Phönixzahlen 24

4 Arbeiten mit Variablen und Termen 27

4.1 Rechnungen mit überraschenden Ergebnissen 27

4.2 Mathematische Zaubereien – Erraten von Ergebnissen 29

4.3 Mathematische Zaubereien – Erraten von gedachten Zahlen 31

4.4 Wo liegt der Fehler? 33

1 Vorwort

Es gibt eine fast unübersehbare Anzahl von populärwissenschaftlichen Büchern mit unterhaltsamen Aufgaben und interessanten Texten zu mathematischen Themen. Vieles davon ist durchaus für den „normalen“ Mathematikunterricht geeignet. Bei meinen zahlreichen Hospitationen im Unterricht habe ich es aber eher selten erlebt, dass dieses Potential genutzt wurde. Es ist ein erheblicher Aufwand erforderlich, um in der Literatur Aufgaben zu finden, die ein angemessenes Anforderungsniveau besitzen und in einer angemessenen Zeit bearbeitet werden können. Weiterhin fragen sich viele Lehrkräfte, wo sie die Zeit für unterhaltsame Aufgaben hernehmen sollen.

Mit dieser Aufgabensammlung sollen Lehrkräfte bei der Bewältigung der beiden Aufgaben unterstützt werden. Es wurden Aufgaben ausgewählt, die im normalen Unterricht von allen Schülerinnen und Schülern in den angegebenen Klassenstufen in meist kurzer Zeit bearbeitet werden können. Neben dem generellen Ziel, dass die Aufgaben Spaß machen sollen, wurden sie aber vor allem danach ausgewählt, welchen Beitrag sie zur Entwicklung des mathematischen Wissens und Könnens der Schülerinnen und Schülern leisten können. Deshalb sind die Aufgaben nach mathematischen Könnensbereichen geordnet und es werden jeweils die Lernziele angegeben, die mit ihnen zu erreichen sind.

Die Aufgaben lassen sich an verschiedenen Stellen im Unterricht einsetzen.

- Viele Aufgaben können in täglichen Übungen für ein abwechslungsreiches Kopfrechentraining eingesetzt werden.
- Viele Aufgaben sich auch in den normalen Lernprozess integrierbar.
- Eine weitere Möglichkeit besteht darin, die Aufgaben am Ende einer Stunde in 3 bis 5 Minuten als Belohnung für schnelles Arbeiten und gute Disziplin zu verwenden.

Ich bedanke mich bei den Teilnehmerinnen und Teilnehmern meiner Lehrveranstaltungen zur Elementarmathematik aus schulischer Sicht, die an der Zusammenstellung der Aufgabensammlung mitgewirkt haben sowie bei meiner Kollegin Petra Lämmel, die eine Durchsicht und Bearbeitung der Aufgaben und ihrer Lösungen vorgenommen hat.

Rostock, Dezember 2016

Hans-Dieter Sill

1. Mündliches Rechnen mit natürlichen Zahlen

1.1 Finden von Rechnungen zu Ergebnissen

1.1.1 Spiel 40

Einsatzmöglichkeiten:
alle Klassenstufen in der Sekundarstufe I oder II

Lernziele:
- Entwicklung von Kopfrechenfertigkeiten zu allen Rechenarten
- Entwicklung der Fähigkeiten im Erkennen der Struktur von Termen
- Entwicklung der Freude am Kombinieren von Zahlen

Besonderheiten der Aufgabe:
Rechenspiel mit Wettkampfcharakter

Benötigte Materialien:
Würfelbecher mit vier Würfeln

Spielanleitung:
Es wird einmal mit vier Würfeln gewürfelt und die Ergebnisse werden angesagt.
Aus diesen 4 Zahlen soll mithilfe aller Rechenoperationen und von Klammern ein Term mit dem Wert 40 gebildet werden. Es dürfen nicht zwei Zahlen zu einer neuen zusammengefasst werden.
Außer den vier Grundrechenoperationen sind je nach Klassenstufe zugelassen: Potenzieren, Wurzelziehen, Logarithmieren sowie Fakultät und Binomialkoeffizient
Die genannten Ergebnisse werden an der Tafel nach Schüler-Diktat notiert.

Mögliche Bewertungen:
Ohne Zeitvorgabe:
Der Erste, der eine richtige Lösung ansagt, erhält 2 Punkte.
Es kann auch der Zweite und Dritte noch einen Punkt erhalten.

Mit Zeitvorgabe:
Die Schüler erhalten 1 Minute Zeit. Danach erhält jeder, der einen richtigen Term gefunden hat, 2 Punkte.

Generell gilt:
Wird eine falsche Lösung angesagt, gibt es einen Minuspunkt.
Hat keiner die Zahl 40 erreicht, erhalten die, die am dichtesten an der Zahl 40 sind, einen Punkt.

Lösungen

Generelle Hinweise:
Aufgaben zur Vorbereitung auf das Spiel:
- Stelle 40 als Produkt (Summe, Differenz, Quotient) zweier Zahlen dar.
- Stelle 40 als Term mit vier natürlichen Zahlen von 1 bis 6 dar. Wiederholungen von Zahlen sind erlaubt.

Anhand dieser Aufgaben sollten folgende, oft verwendbare Zerlegungen der Zahl erkannt werden:

$$40 = 4 \cdot 10 = 5 \cdot 8 = 2 \cdot 4 \cdot 5 = 36 + 4 = 5 \cdot 7 + 5$$

Bereits in unteren Klassen kann als neuer Operator die Fakultät eingeführt werden. Es ist ausreichend, nur die Fakultäten bis zur Zahl 6 zu berechnen:

$$3! = 6 \quad 4! = 24 \quad 5! = 120 \quad 6! = 720$$

Damit lässt sich folgende, oft verwendbare Zerlegung bilden: $40 = \frac{5!}{3}$

Es gibt insgesamt 126 mögliche Würfelergebnisse. Zu einigen Ergebnissen kann man über 10 verschiedene Terme bilden. Es konnten bisher zu 22 Würfelergebnissen keine Terme gefunden werden.

Beispiellösungen:

1 1 1 1	keine Möglichkeit
2 2 2 2	keine Möglichkeit
3 3 3 3	keine Möglichkeit
4 4 4 4	$4! + \sqrt{4} \cdot \sqrt{4} \cdot 4 = \mathbf{40}$
5 5 5 5	keine Möglichkeit
6 6 6 6	$6! : (6 + 6 + 6) = \mathbf{40}$
1 2 3 5	$2 \cdot 5 \cdot (1 + 3) = (3^2 - 1) \cdot 5 = 2^3 \cdot 5 \cdot 1 = \frac{5!}{3} (2 - 1) = 1 \cdot (3! + 2) \cdot 5 = = \frac{5!}{\sqrt{3\,(1+2)}} = \binom{5+1}{3} \cdot 2$ $= \binom{5}{2} \cdot (1 + 3) = \mathbf{40}$
1 2 5 6	$5(6 + 2) \cdot 1 = (2^1 + 6) \cdot 5 = \frac{5!}{6 : 2 \cdot 1} = \frac{5!}{6 - 2 - 1} = \frac{(6-1)!}{5 - 2} = \mathbf{40}$
1 2 6 6	$(6 - 1) \cdot (6 + 2) = (6 + 1) \cdot 6 - 2 = \frac{6!}{6} : (2 + 1) = \frac{(6-1)!}{\frac{6}{2}} = \mathbf{40}$
1 3 4 5	$5 \cdot 4 \cdot (3 - 1) = (1 + 3) \cdot 5 \cdot \sqrt{4} = 5 \cdot (4 + 3 + 1) = \frac{5!}{4 - 1^3} = \binom{5}{3} \cdot 4 \cdot 1 = \mathbf{40}$
2 4 5 6	$5(6 + 4 - 2) = 5 \cdot 2 \cdot (6 - \sqrt{4}) = 4! + 2 \cdot 5 + 6 = \frac{5!}{4!} (6 + 2) = \frac{5!}{\frac{6}{4-2}} = \left(\binom{6}{4} + 5\right) \cdot 2 = \mathbf{40}$
3 3 5 6	$\frac{5!}{3 \cdot 3 - 6} = \frac{5!}{6 - \sqrt{3 \cdot 3}} = \frac{5!}{3} \cdot \frac{6}{3!} = \binom{6}{3} (5 - 3) = \mathbf{40}$
3 4 4 4	$(4 + 4) \cdot (3 + \sqrt{4}) = \sqrt{4} \cdot 4 \cdot (3 + \sqrt{4}) = \frac{(4 + \log_4 4)!}{3} = \mathbf{40}$
4 5 6 6	$5 \cdot 6 + 4 + 6 = \frac{6!}{5!} \cdot 6 + 4 = \frac{5!}{\frac{6}{6} + \sqrt{4}} = \binom{6}{5} \cdot 6 + 4 = \mathbf{40}$

1.1.2 Interessante Rechnungen mit nur einer Ziffer

Einsatzmöglichkeiten:

- ab Klasse 5/6 mit Grundrechenarten und Wurzeln
- ab Klasse 9/10 mit Logarithmen

Lernziele:

- Entwicklung der Rechenfertigkeiten mit natürlichen Zahlen
- Entwicklung des Könnens im Strukturieren von Termen
- Freude an der Arbeit mit Zahlen und der Suche nach mehreren Lösungen

Besonderheiten der Aufgabe:

Es ist zu beachten, dass Schüler der Kl. 5/6 noch nicht in der Lage sind, alle Lösungen zu finden, da sie die Wurzeln, die Logarithmusfunktion und den Fakultätsbegriff noch nicht kennen. Da diese Themen in Klasse 9 behandelt werden, bieten sich diese Aufgaben noch einmal in den Jahrgängen 9/10 an.

Aufgaben:

1. Stelle die Zahlen von 1 bis 10 jeweils mit 4-mal der Ziffer 7 dar.
Es können auch mehrere Ziffern zu einer Zahl zusammengefasst werden.

2. Stelle die Zahl 6 dar mit
a) 3 Einsen
b) 3 Zweien
c) 3 Dreien
d) 3 Vieren
e) 3 Fünfen
f) 3 Sechsen
g) 3 Sieben
h) 3 Achten
i) 3 Neunen
Die Ziffern dürfen nicht zu einer Zahl zusammengefasst werden.

3. Stelle die Zahl 3 mit 12 Fünfen dar.
Es können auch mehrere Ziffern zu einer Zahl zusammengefasst werden.

4. Stelle die Zahl 10 mit 5 Dreien dar.
Es können auch mehrere Ziffern zu einer Zahl zusammengefasst werden.

Lösungen:

1.

$$1=\frac{77}{77}=7-7+\frac{7}{7}=\frac{7+7}{7+7}=\frac{7-7+7}{7}=\log_7 7+7-7$$

$$2=\frac{7}{7}+\frac{7}{7}=(7-7)!+(7-7)!=\log_7 7+\log_7 7=\log_7 7+\frac{7}{7}=\binom{7}{7}+\binom{7}{7}$$

$$3=\frac{7+7+7}{7}$$

$$4=\frac{77}{7}-7$$

$$5=7-\frac{7+7}{7}=(-7-7):7+7=7-\log_7(7\cdot 7)$$

$$6=\frac{7\cdot 7-7}{7}=7-7^{7-7}=\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}-\frac{7}{7}=7-\left(\frac{7}{7}\right)^7$$

$$7=\sqrt{7\cdot 7}+7-7=\sqrt{\sqrt{7\cdot 7}\cdot\sqrt{7\cdot 7}}=(7-7)\cdot 7+7=\frac{7-7}{7}+7=\frac{7!}{\left(7-\frac{7}{7}\right)!}=\binom{7}{7-7}\cdot 7$$

$$8=\frac{7\cdot 7+7}{7}=7^{7-7}+7=\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}+\frac{7}{7}=7+\left(\frac{7}{7}\right)^7=\frac{\left(\frac{7}{7}+7\right)!}{7!}$$

$$9=\frac{7+7}{7}+7=\log_7(7\cdot 7)+7$$

$$10=\frac{77-7}{7}$$

2.

a) $6=(1+1+1)!$

b) $6=2+2+2=2^2+2=2!+2!+2!$

c) $6=3\cdot 3+3=3!+3-3$

d) $6=\sqrt{4}+\sqrt{4}+\sqrt{4}=\frac{4!}{\sqrt{4\cdot 4}}=4+4-\sqrt{4}=\sqrt[3]{4+4}+4=4+\frac{4}{\sqrt{4}}=\frac{4!}{\sqrt{4\cdot 4}}=\left(4-\frac{4}{4}\right)!$

e) $6=5+(5-5)!=5+\frac{5}{5}=5+\log_5 5$

f) $6=6+6-6=\frac{6\cdot 6}{6}=\sqrt[3]{6\cdot 6\cdot 6}=6\cdot\log_6 6$

g) $6=7-(7-7)!=7-\frac{7}{7}=7-\log_7 7$

h) $6=\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{8}=\sqrt{8\cdot 8}-\sqrt[3]{8}=8-\sqrt{\sqrt{8+8}}=\left(\sqrt{8+\frac{8}{8}}\right)!$

i) $6=\sqrt{9\cdot 9}-\sqrt{9}=9-\frac{9}{\sqrt{9}}=(9-9)!\cdot(\sqrt{9})!=9-\sqrt{\sqrt{9\cdot 9}}$

3.

$$3=\frac{55}{55}+\frac{55}{55}+\frac{55}{55}$$

$$3=\frac{\frac{5}{5}+\frac{5}{5}+\frac{5}{5}}{\frac{5}{5}\cdot\frac{5}{5}\cdot\frac{5}{5}}$$

$$3=\frac{5\cdot 5+\frac{5}{5}+\frac{5}{5}}{5-5+5+5-\frac{5}{5}}$$

$$3=\log_{55}55+\log_{55}55+\log_{55}55$$

$$3=(55-55)!+(55-55)!+(55-55)!$$

$$3=\frac{5+5+5}{5-5+5-5+5-5+5-5+5}$$

4.

$$10=3\cdot 3+\frac{\sqrt{3\cdot 3}}{3}$$

$$10=\frac{33}{3}-\frac{3}{3}=\frac{33}{3}+\log_3 3$$

$$10=3+3+3+\frac{3}{3}=3+3+3+\log_3 3$$

$$10=\frac{3^3}{3}+\frac{3}{3}=\frac{3^3}{3}+\log_3 3$$

$$10=3!+3!-3+\frac{3}{3}=3!+3!-3+\log_3 3$$

$$10=\binom{3}{3}+3+3+3$$

1.2 Rechenvorteile

Einsatzmöglichkeiten:
ab Klasse 5

Lernziele:
- Festigung der Kopfrechenfertigkeiten im Multiplizieren und Addieren maximal zweistelliger Zahlen

Rechenvorteil bei Aufgabe 1
- nur anwendbar auf Multiplikation zweier Zahlen im Zahlenbereich 11 bis 19
- Zahlenbeispiele: 13 · 15 = (13 + 5) · 10 + 3 · 5 = 180 + 15 = 195
  17 · 19 = (17 + 9) · 10 + 7 · 9 = 260 + 63 = 323
- Begründung: (10 + a) · (10 + b) = 100 + 10a + 10b + ab
  = (10 + a + b) ·10 + ab
  = ((10 + a) + b) ·10 + ab

Rechenvorteil bei Aufgabe 2

- Quadrieren von Zahlen, die eine fünf an der Einerstelle haben
- für alle betreffenden Zahlen anwendbar
- nur im Zahlenbereich 15 bis 195 für die Schule sinnvoll
- Zahlenbeispiele:

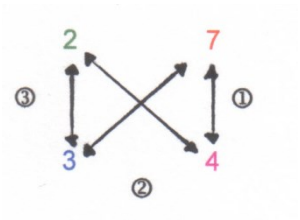
$$75^2 = 7 \cdot 8 \cdot 100 + 25 = 5625$$
$$135^2 = 13 \cdot 14 \cdot 100 + 25 = 18225$$

- Begründung:

$$\begin{aligned}(10a + 5)^2 &= 100a^2 + 100a + 25\\ &= (a^2 + a) \cdot 100 + 25\\ &= a\cdot(a + 1) \cdot 100 + 25\end{aligned}$$

Rechenvorteil bei Aufgabe 3

- Verfahren der kreuzweisen Multiplikation zweistelliger Zahlen:
  1. beide Zahlen mit Zwischenraum untereinander schreiben (später nur in Gedanken)
  2. schrittweise rechnen (s. Beispiel) und immer letzte Ziffer hinschreiben
- Beispiel: $27 \cdot 34 = 918$



① Multiplizieren der Einer:
$7 \cdot 4 = 28$, **8** hinschreiben, *2* als Übertrag merken
② Multiplizieren der Einer und Zehner(kreuzweise);
Addieren der Produkte und des Übertrags:
$2 \cdot 4 + 3 \cdot 7 + 2 = 31$, **1** hinschreiben, *3* als Übertrag merken
③ Multiplizieren der Zehner und Addieren des Übertrags:
$2 \cdot 3 + 3 = \mathbf{9}$

Rechenvorteile bei den Aufgaben 5 bis 10

Multiplikation			Division		
$\cdot 5$	$\widehat{=}$	$: 2 \cdot 10$	$: 5$	$\widehat{=}$	$: 10 \cdot 2$
$\cdot 25$	$\widehat{=}$	$: 4 \cdot 100$	$: 25$	$\widehat{=}$	$: 100 \cdot 4$
$\cdot 125$	$\widehat{=}$	$: 8 \cdot 1000$	$: 125$	$\widehat{=}$	$: 1000 \cdot 8$

Aufgaben

Aufgabe 1

Multipliziere aus.

$13 \cdot 16 =$	$11 \cdot 17 =$	$12 \cdot 17 =$
$11 \cdot 19 =$	$19 \cdot 18 =$	$18 \cdot 13 =$
$13 \cdot 17 =$	$14 \cdot 16 =$	$15 \cdot 11 =$
$14 \cdot 15 =$	$13 \cdot 12 =$	$16 \cdot 19 =$
$12 \cdot 18 =$	$17 \cdot 15 =$	$11 \cdot 12 =$

Aufgabe 2

Berechne die Quadrate.

$35^2 =$	$65^2 =$	$145^2 =$
$25^2 =$	$115^2 =$	$55^2 =$
$15^2 =$	$85^2 =$	$135^2 =$
$75^2 =$	$45^2 =$	$155^2 =$

$95^2 =$	$125^2 =$	$195^2 =$

Aufgabe 3
Multipliziere kreuzweise.

$19 \cdot 33 =$	$70 \cdot 53 =$	$18 \cdot 91 =$
$34 \cdot 61 =$	$21 \cdot 65 =$	$31 \cdot 33 =$
$47 \cdot 17 =$	$86 \cdot 14 =$	$64 \cdot 22 =$
$98 \cdot 85 =$	$27 \cdot 77 =$	$68 \cdot 74 =$
$21 \cdot 12 =$	$14 \cdot 63 =$	$80 \cdot 71 =$

Aufgabe 4
Löse die Aufgaben. Verwende die Rechenvorteile aus Aufgabe 1 bis 3.

$24 \cdot 49 =$	$135^2 =$	$16 \cdot 19 =$
$13 \cdot 17 =$	$26 \cdot 74 =$	$14 \cdot 94 =$
$77 \cdot 28 =$	$99 \cdot 11 =$	$75^2 =$
$37 \cdot 45 =$	$29 \cdot 44 =$	$73 \cdot 26 =$
$95 \cdot 95 =$	$17 \cdot 19 =$	$53 \cdot 78 =$

Aufgabe 5

$44 \cdot 5 =$	$140 \cdot 50 =$	$16 \cdot 50 =$
$82 \cdot 50 =$	$8 \cdot 25 =$	$24 \cdot 250 =$
$32 \cdot 25 =$	$120 \cdot 250 =$	$224 \cdot 5 =$
$188 \cdot 50 =$	$8 \cdot 125 =$	$56 \cdot 125 =$

Aufgabe 6

$80 : 5 =$	$145 : 5 =$	$230 : 5 =$
$825 : 5 =$	$175 : 5 =$	$780 : 5 =$

Aufgabe 7

$22 \cdot 5 =$	$48 \cdot 5 =$	$5 \cdot 268 =$
$26 \cdot 5 =$	$135 : 5 =$	$345 : 5 =$
$640 : 5 =$	$1350 : 5 =$	$5 \cdot 240 =$
$805 : 5 =$	$128 : 5 =$	$12350 : 5 =$
$56 \cdot 5 =$	$5 \cdot 98 =$	$236 : 5 =$

Aufgabe 8

$12 \cdot 25 =$	$25 \cdot 16 =$	$44 \cdot 25 =$
$36 \cdot 25 =$	$225 : 25 =$	$1200 : 25 =$
$3000 : 25 =$	$5000 : 25 =$	$28 \cdot 25 =$
$1600 \cdot 5 =$	$82\,000 : 25 =$	$325\,000 : 25 =$
$25 \cdot 36 =$	$25 \cdot 1020 =$	$76\,000 : 25 =$

Aufgabe 9

16 · 125 =	88 · 125 =	5000 : 125 =
12 000 : 125 =	120 · 125 =	2500 : 125 =

Aufgabe 10

284 · 5 =	345 : 5 =	36,4 · 0,5 =
28,1 : 0,5 =	88 · 25 =	11,3 : 25 =
56,4 · 0,25 =	36 : 0,25 =	124 · 25 =
72,6 · 0,5 =	17,4 : 0,5 =	825 : 5 =
27,2 · 0,5 =	775 : 25 =	39,4 : 0,5 =
14750 : 5 =	220 000 : 25 =	96 · 125 =
7500 : 125 =	39,4 : 0,5 =	33 · 25 =

Lösungen:

Aufgabe 1
Multipliziere aus.

13 · 16 =	208	11 · 17 =	187	12 · 17 =	204
11 · 19 =	209	19 · 18 =	342	18 · 13 =	234
13 · 17 =	221	14 · 16 =	224	15 · 11 =	165
14 · 15 =	210	13 · 12 =	156	16 · 19 =	304
12 · 18 =	216	17 · 15 =	255	11 · 12 =	132

Aufgabe 2
Berechne die Quadrate.

35^2 =	1225	65^2 =	4225	145^2 =	21025
25^2 =	625	115^2 =	13225	55^2 =	3025
15^2 =	225	85^2 =	7225	135^2 =	18225
75^2 =	5625	45^2 =	2025	155^2 =	24025
95^2 =	9025	125^2 =	15625	195^2 =	38025

Aufgabe 3
Multipliziere kreuzweise.

19 · 33 =	627	70 · 53 =	3710	18 · 91 =	1638
34 · 61 =	2074	21 · 65 =	1365	31 · 33 =	1023
47 · 17 =	799	86 · 14 =	1204	64 · 22 =	1408
98 · 85 =	8330	27 · 77 =	2079	68 · 74 =	5032
21 · 12 =	252	14 · 63 =	882	80 · 71 =	5680

Aufgabe 4
Löse die Aufgaben. Verwende die Rechenvorteile aus Aufgabe 1 bis 3.

24 · 49 =	1176	135^2 =	18225	16 · 19 =	304	25 · 64 =	1600
13 · 17 =	221	26 · 74 =	1924	14 · 94 =	1316	65^2 =	4225
77 · 28 =	2156	99 · 11 =	1089	75^2 =	5625	12 · 17 =	204
37 · 45 =	1665	29 · 44 =	1276	73 · 26 =	1898	69 · 41 =	2829
95 · 95 =	9025	17 · 19 =	323	53 · 78 =	4134	52 · 93 =	4836

Aufgabe 5

44 · 5 =	220	140 · 50 =	7000	16 · 50 =	800
82 · 50 =	4100	8 · 25 =	200	24 · 250 =	6000
32 · 25 =	800	120 · 250 =	30 000	224 · 5 =	1120
188 · 50 =	9400	8 · 125 =	1000	56 · 125 =	7000

Aufgabe 6

80 : 5 =	16	145 : 5 =	29	230 : 5 =	46
825 : 5 =	165	175 : 5 =	35	780 : 5 =	156

Aufgabe 7

22 · 5 =	110	48 · 5 =	240	5 · 268 =	1340
26 · 5 =	130	135 : 5 =	27	345 : 5 =	69
640 : 5 =	128	1350 : 5 =	270	5 · 240 =	1200
805 : 5 =	161	128 : 5 =	25,6	12350 : 5 =	2470
56 · 5 =	280	5 · 98 =	490	236 : 5 =	47,2

Aufgabe 8

12 · 25 =	300	25 · 16 =	400	44 · 25 =	1100
36 · 25 =	900	225 : 25 =	9	1200 : 25 =	48
3000 : 25 =	120	5000 : 25 =	200	28 · 25 =	700
1600 · 5 =	40 000	82 000 : 25 =	3280	325 000 : 25 =	13 000
25 · 36 =	900	25 · 1020 =	25500	76 000 : 25 =	3040

Aufgabe 9

16 · 125 =	2000	88 · 125 =	11 000	5000 : 125 =	40
12 000 : 125 =	96	120 · 125 =	15 000	2500 : 125 =	20

Aufgabe 10

284 · 5 =	1420	345 : 5 =	69	36,4 · 0,5 =	18,2
28,1 : 0,5 =	56,2	88 · 25 =	2200	11,3 : 25 =	0,452
56,4 · 0,25 =	14,1	36 : 0,25 =	144	124 · 25 =	3100
72,6 · 0,5 =	36,3	17,4 : 0,5 =	34,8	825 : 5 =	165
27,2 · 0,5 =	13,6	775 : 25 =	31,00	39,4 : 0,5 =	78,8
14750 : 5 =	2950	220 000 : 25 =	8800	96 · 125 =	12 000
7500 : 125 =	60	39,4 : 0,5 =	78,8	33 · 25 =	825

1.3 Bilden von Summen

1.3.1 Bilden gleicher Summen

Einsatzmöglichkeiten:
Aufgabe 1 und 2 bereits in Grundschule, Aufgabe 3 nach Addition von Dezimalbrüchen

Lernziele:
- Entwicklung von Fertigkeiten im mündlichen Addieren maximal zweistelliger natürlicher und gebrochener Zahlen

Aufgaben

Aufgabe 1
Zerschneide die Zahlenkarten mit einem geraden Schnitt so, dass die Summe der Zahlen auf beiden Teilen gleich groß ist.

a)

7	3
5	9

b)

13	26
25	14

c)

5	7	9
2	6	11

d)

11	13	29
15	17	21

Aufgabe 2
Die Gutscheine sind so auf drei Personen zu verteilen, dass jeder den gleichen Geldbetrag erhält.

a)

Gut-schein	Gut-schein	Gut-schein
Gut-schein	Gut-schein	Gut-schein

b)

Gut-schein	Gut-schein	Gut-schein
Gut-schein	Gut-schein	Gut-schein

Aufgabe 3
Wie kann man die folgenden Figuren mit einem geraden Schnitt so zerlegen, dass die Summen der Zahlen in beiden Teilen gleich sind?

a)

48	35
53	66

b)

8,1	0,4
0,6	7,9

c)

0,4	2,8	
		0,9
1,7	0,6	
		3,5
	1,1	

d)

0,9	
	1,2
1,4	
	0,7

Aufgabe 4
Denke dir selbst ein Rechteck mit vier Zahlen aus, so dass beim Zerlegen mit einem geraden Schnitt die Summen der Zahlen in beiden Teilen gleich groß sind.

Lösungen:

1.

a)

7	3
5	9

b)

13	26
25	14

c)

5	7	9
2	6	11

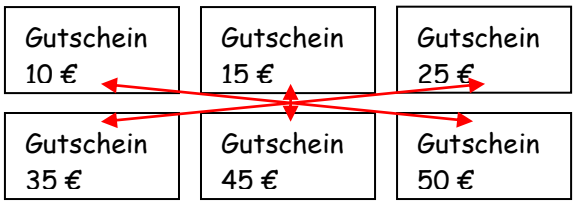
d)

11	13	29
15	17	21

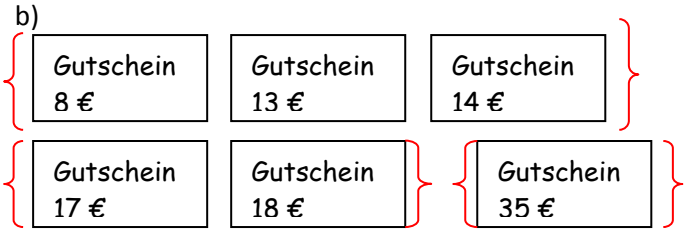
a) 7 + 5 = 3 + 9 b) 13 + 26 = 25 + 14 c) 5 + 7 + 2 + 6 = 9 + 11 11 + 13 + 29 =15 + 17 + 21

2.

a)



b)



a) 10 € + 60 € = 15 € + 45 € = 25 € + 35 €

b) 8 € + 13 € + 14 € = 17 € + 18 € = 35 €

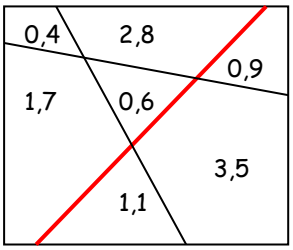
3. a)

48	35
53	66

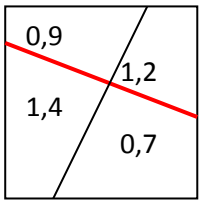
b)

8,15	0,41
0,64	7,92

c)



d)



a) 35 + 66 = 48 + 53 b) 8,15 + 0,41 = 0,64 + 7,92 c) 1,1 + 3,5 + 0,9 = 1,7 + 2,8 + 0,6 + 0,4

d) 1,4 + 0,7 = 0,9 + 1,2

1.3.2 Spröde Zahlen

Einsatzmöglichkeiten:
Ab Klasse 5, nach Addition von Dezimalbrüchen

Lernziele:
- Entwicklung der Kopfrechenfertigkeiten im Addieren und Subtrahieren von natürlichen Zahlen und Dezimalbrüchen

Aufgabe
Die Zahl einer Gruppe soll als „spröde“ bezeichnet werden, wenn sie sich nicht als Summe oder Differenz zweier anderer Zahlen der Gruppe darstellen lässt. Finde jeweils die „spröde“ Zahl.

Beispiel: 17; 5; 30; 13 (17 + 13 = 30) d. h. 5 ist spröde

a) 32; 8; 24; 28
b) 1,3; 2,3; 100; 98,7
c) 3,7; 8,1; 4,4; 3,6
d)* 3,47; 1,39; 4,85; 2,08

Lösung

a)	32; 8; 24; **28**	28 ist spröde, denn 24 + 8 = 32
b)	1,3; **2,3**; 100; 98,7	2,3 ist spröde, denn 1,3 + 98,7 = 100
c)	3,7; 8,1; 4,4; **3,6**	3,6 ist spröde, denn 3,7 + 4,4 = 8,1
d)	3,47; 1,39; 4,85; 2,08	4,85 ist spröde, denn 1,39 + 2,08 = 3,47

1.3.3 Partnertest

Einsatzmöglichkeiten:
Ab Klasse 5

Lernziele:
- Entwicklung der Kopfrechenfertigkeiten im Addieren von bis zu zweistelliger Zahlen
- Freude am Rechnen mit Zahlen und an der eigenen Entwicklung eines Zahlentricks

Aufgabe
Zwei Schüler, die überprüfen wollen, ob sie zusammenpassen, suchen in dem Schema aus jeder Zeile und jeder Spalte genau eine Zahl heraus und addieren die 5 Zahlen.
Nach dem überraschenden Ergebnis versuchen die Schüler mit Hilfe des Lehrers, eine Erklärung dafür zu finden.

2	8	15	2	12
6	12	19	9	16
14	20	27	17	24
9	15	22	12	19
3	9	16	6	13

Lösung
Wenn die Schüler richtig addiert haben, erhalten beide das Ergebnis 66.
Das selbständige Finden einer Erklärung für dieses überraschende Ergebnis ist allerdings nur mit zielgerichteten Hinweisen des Lehrers möglich.
So könnte als erstes der Hinweis erfolgen, sich Vereinfachung zur zunächst ein Quadrat aus 2 x 2 Zahlen anzusehen, also z. B. das Quadrat oben links. Die Anwendung des Auswahlverfahrens ergibt 2 + 12 = 6 + 8 = 14. Dann muss sicher der Hinweis erfolgen, dass die Zahlen jeweils Summe von 2 Zahlen sind, die am Rand der Tabelle standen. Da sich die Zahl 2 nur als Summe 1 + 1 schreiben lässt, können die anderen Zahlen leicht gefunden werden:

2	8
6	12

	1	7
1	2	8
5	6	12

Nun können die Schüler auch die übrigen Zahlen an den Rändern finden und erhalten:

	1	7	14	4	11
1	2	8	15	5	12
5	6	12	19	9	16
13	14	20	27	17	24
8	9	15	22	12	19
2	3	9	16	6	13

Als Lösung des Zahlentricks ergibt sich damit:
Man sucht 10 Zahlen, deren Summe 66 ergibt. Diese 10 Zahlen teilt in zwei Gruppen zu je 5 Zahlen auf berechnet daraus ein Additionstabelle. Wenn aus dieser Tabelle aus jeder Zeile und jeder Spalte genau eine Zahl ausgewählt wird und diese 5 Zahlen addiert werden, ergibt sich wieder die Summe aller 10 Zahlen.
Beispiel:
66 = 1 + 7 + 14 + 4 + 11 + 1 + 5 + 13 + 8 + 2
5 + 12 + 27 + 19 + 3 =
(1 + 4) + (5 + 7) + (13 + 14) + (11 + 8) + (1 + 2) = 66

	1	7	14	4	11
1	2	8	15	5	12
5	6	12	19	9	16
13	14	20	27	17	24
8	9	15	22	12	19
2	3	9	16	6	13

1.4 Wer gehört nicht dazu?

Einsatzmöglichkeiten:
Ab Klasse 6, nach Behandlung der Teilbarkeit

Lernziele:
- Schulung des logischen Denkens, insbesondere zur Negation von Aussagen
- Entwicklung der Kopfrechenfertigkeiten im Multiplizieren natürlicher Zahlen durch Zerlegen von Zahlen bis 100

Aufgabe
Fünf Zahlen haben jeweils eine gemeinsame Eigenschaft bezüglich der Teilbarkeit. Gib diese Eigenschaft an und nenne die Zahl, die diese Eigenschaft nicht hat.

a) {4; 8; 24; 33; 42; 44}
b) {15; 25; 40; 50; 60; 72}
c) {7; 14; 28; 49; 57; 98}
d) {12; 24; 32; 42; 66; 90}
e) {13; 19; 21; 28; 49; 97}
f) {16; 25; 27; 49; 64; 81}
g)* {7; 11; 13; 19; 21; 23}
h)* {26; 65; 79; 130; 143; 169}

Lösung:
Es gibt mehrere zutreffende Antworten. Es sind jeweils nur 2 angegeben.

		Mögliche Antworten (gemeinsame Eigenschaft; Zahl)	
a)	{4; 8; 24; 33; 42; 44}	durch 2 teilbar; 33	nicht durch 12 teilbar; 24
b)	{15; 25; 40; 50; 60; 72}	durch 5 teilbar; 72	nicht durch 9 teilbar; 72
c)	{7; 14; 28; 49; 57; 98}	durch 7 teilbar; 57	nicht durch 4 teilbar; 28
d)	{12; 24; 32; 42; 66; 90}	durch 6 teilbar; 32	nicht durch 11 teilbar; 66
e)	{13; 19; 21; 28; 49; 97}	nicht durch 2 teilbar; 28	nur in 2 Faktoren zerlegbar; 28
f)	{16; 25; 27; 49; 64; 81}	Quadratzahl; 27	nicht durch 5 teilbar; 25
g)*	{7; 11; 13; 19; 21; 23}	nicht in Faktoren zerlegbar; 21	nicht durch 3 teilbar; 21
h)*	{26; 65; 79; 130; 143; 169}	durch 13 teilbar, 79	in Faktoren zerlegbar; 79

1.5 Kryptogramme

Einsatzmöglichkeiten:
Ab Klasse 5

Lernziele:
- Festigung der Kopfrechenfertigkeiten mit natürlichen Zahlen
- Festigung der Eigenschaften von Rechenoperationen
- Lösen von Aufgaben durch Probieren

Hinweise zu den Aufgaben:
Ein Kryptogramm besteht aus einer oder aus mehreren Gleichungen, in denen alle oder einige Ziffern oder auch Operationszeichen fehlen. Die fehlenden Ziffern oder Operationszeichen sind durch Zeichen (Buchstaben oder Figuren) ersetzt. Für diese Zeichen sind Ziffern so einzusetzen, dass die im

Kryptogramm enthaltenen Gleichungen alle richtig sind. Dabei gilt, dass gleiche Zeichen für gleiche Ziffern stehen.
Man benötigt keine speziellen Methoden für das Entschlüsseln von Kryptogrammen. Wer die Grundrechenarten beherrscht, kann sie lösen. Es gibt keinen allgemeinen Lösungsweg, man muss sich für jedes Rätsel eine neue Strategie überlegen. Man kommt mit einer Kombination aus Probieren und logischem Schließen zum Ziel.
Kryptogramme sind meist sehr anspruchsvoll, die folgenden Beispielen können aber leicht im Kopf gelöst werden.

Aufgaben:

1. Löse die folgenden Kryptogramme. Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Ziffern.
   a) AA + B = BCC
   b) AA · ABA = AAAA
   c) AB − BA = A

2. Setze für ☐ jeweils ein Operationszeichen ein, so dass eine wahre Aussage entsteht.
   a) 35 ☐ 10 ☐ 7 = 52
   b) 75 ☐ 25 ☐ 0 = 50
   c) (1 ☐ 0) ☐ 1 = 0
   d) (8 ☐ 6) ☐ 2 = 1

3. Setze in den Gleichungen für a, b, c eine der Zahlen 2, 3, 4 oder 6 ein, so dass wahre Aussagen entstehen. Die Zahlen a, b, c sollen stets verschieden sein.
   a) a − b − c = 0
   b) a + b − c = 1
   c) a + b − c = 3
   d) a + b − c = 4
   e) a − b + c = 5
   f) a + b − c = 7
   g) a + b − c = 8
   h) a + b + c = 9

4. Setze für die Zeichen eine der Zahlen 0 bis 9 ein. Gleiche Zeichen bedeuten gleiche Zahlen, verschiedene Zeichen bedeuten verschiedene Zahlen.

a) ☐2 : 4 = △
b) ☐9 + ☐8 = 3△
c) 5 · 1△ = 6☐
d) ☐3 : △ = 7
*e) 2△ + ☐☐ = △8
*f) ○○ + △ = △☐☐
g) ☐○ + 8 = 3△
− − −
1▽ + △ = 1△
1○ + 3 = ☐▽
h) ○ + ○ = ☐
+ · ·
○ · ○ = ☐
☐ · ☐ = ▽△
*i) ○ · ▽ = ☐⌓
: : :
△ · ☐ = ☐
○ · ☐ = △2

Lösungen

1.
   a) 99 + 1 = 100
   b) 11 · 101 = 1111
   c) 98 – 89 = 9

2.
   a) 35 + 10 + 7 = 52
   b) 75 − 25 + 0 = 50
   c) (1 · 0) · 1 = 0
   d) (8 − 6) : 2 = 1

3.
   a) 6 − 4 − 2 = 0
   b) 3 + 4 − 6 = 1
   c) 2 + 4 − 3 = 3
   d) 6 + 2 − 4 = 4
   e) 4 − 2 + 3 = 5
   f) 6 + 4 − 3 = 7
   g) 6 + 4 − 2 = 8
   h) 2 + 3 + 4 = 9

4. a) 32 : 4 = 8 b) 19 + 18 = 37 c) 5 · 12 = 60

d) 63 : 9 = 7 *e) 25 + 33 = 58 *f) 99 + 1 = 100

g) 27 + 8 = 35 h) 2 + 2 = 4 *i) 4 · 9 = 36

	–	–	–	+	·	·	:	:	:
	10 +	5 =	15	2 ·	2 =	4	1 · 3 =	3
	17 +	3 =	20	4 ·	4 =	16	4 · 3 =	12

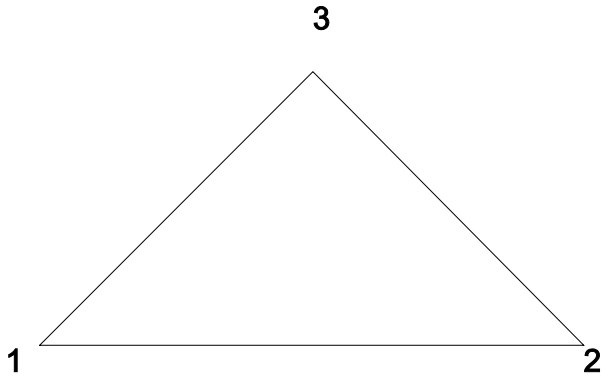
1.6 Magische Figuren

Einsatzmöglichkeiten:
Ab Klasse 5

Lernziele:
- Festigung der Kopfrechenfertigkeiten mit natürlichen Zahlen
- Festigung der Eigenschaften von Rechenoperationen
- Lösen von Aufgaben durch Probieren

Aufgaben

1. Verteile die Zahlen 4, 5, 6, 7, 8, 9 so auf die Seiten des Dreiecks, so dass die Summe der Zahlen an jeder Seite 17 ergibt.



2. Wenn in einem Quadrat aus Zahlen die Summen in den Spalten, Zeilen und Diagonalen immer gleich sind, spricht man von einem „magischen“ Quadrat.
Welche Zahlen fehlen, damit sich ein magisches Quadrat ergibt?

		13
10	12	
11		

3. Ergänze die magischen Quadrate.

a)

12		16
	10	

Ergänze das Quadrat so, dass waagerecht, senkrecht und diagonal die Summe stets 30 beträgt!

b)

10			89
95			
			21
31	83		21

Ergänze das Quadrat so, dass waagerecht, senkrecht und diagonal die Summe stets 151 beträgt! Verwende dazu die Zahlen 12; 15; 16; 19; 20; 24; 25; 27 und 96! Welches besondere Datum ist im Quadrat enthalten?

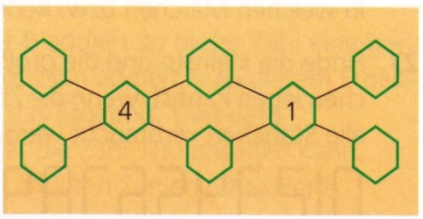
c)

	9	

Trage die ungeraden Zahlen zwischen 0 und 18 so in das Quadrat ein, dass waagerecht, senkrecht und diagonal die Summe stets 27 beträgt!

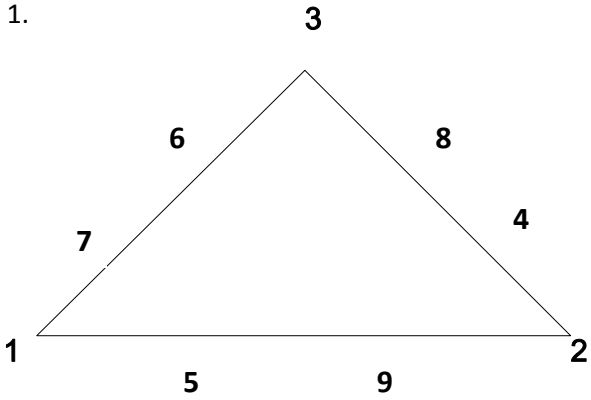
4.

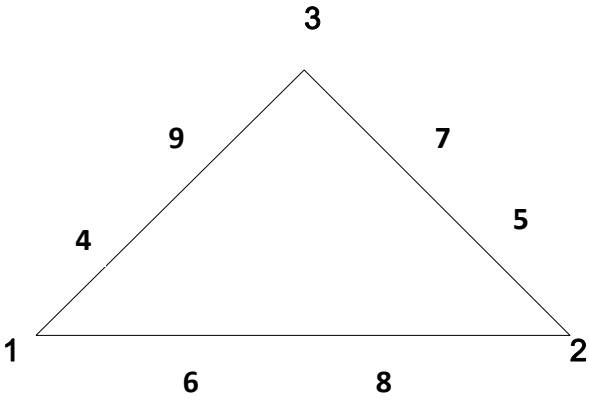
Setze die Zahlen 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7 und 8 ein!
Die Summe von jeweils drei miteinander verbundenen Waben in einer Reihe soll immer 14 sein!



Lösungen

1.





2.

15	8	13
10	12	14
11	16	9

3. a)

12	2	16
14	10	6
4	18	8

b)

10	25	27	89
95	24	12	20
15	19	96	21
31	83	16	21

c)

3	17	7
13	9	5
11	1	15

4. Die Zahlen lauten von links nach rechts:

2 7 5
4 1
3 8 6

1.7 Trick zur Summe von Quadraten

Einsatzmöglichkeiten:
In Klasse 5 werden Potenzen und im Speziellen auch Quadratzahlen besprochen. Als Einführung in dieses Stoffgebiet lässt sich der Trick gut verwenden, denn zur Durchführung werden lediglich Berechnungen der Quadratzahlen im kleinen Einmaleins benötigt.
Außerdem kann der Trick jederzeit als Übung des Kopfrechnens herangezogen werden, besonders wenn überprüft werden soll, ob es für jede Zahl zwischen 1 und 200 funktioniert.

Lernziele:
- Berechnungen der Quadratzahlen von 1 bis 10
- Kopfrechenübungen
- Addieren zweier zweistelliger Zahlen im Kopf
- Üben des systematischen Probierens
- Erkennen von Zahlenmustern

Besonderheiten der Aufgabe:
Aufgaben mit überraschendem Ergebnis, Zaubertrick

Benötigte Materialien:
ein beliebiges Buch

Der Trick
Der Vorführende behauptet, von einem Buch mit über 200 Seiten, das erste Wort auf jeder Seite auswendig zu wissen. Er bittet einen der Zuschauer, sich eine beliebige Zahl zwischen 1 und 200 zu denken. Von dieser Zahl soll er im Kopf die Summe der Quadrate der einzelnen Ziffern bilden und die so entstandene neue Zahl seinem Nebenmann ins Ohr flüstern. Dieser hat erneut von allen Ziffern der genannten Zahl die Quadrate zu bilden, sie zu addieren und die Summe seinem Nachbarn zuzuflüstern.
Da beim Erreichen der Zahl 1 der Prozess des Bildens neuer Zahlen abbrechen würde, soll derjenige, dem eine 1 zugeflüstert wird, die Zahl 2 weitergeben. Nachdem mindestens 10 Zuschauer an dieser Aktion beteiligt waren, kann einer (oder auch mehrere nach ihm folgende) seine gebildete Zahl laut bekannt geben und der "Gedächtniskünstler" nennt sofort das erste Wort der entsprechenden Seite.

Aufgaben

a) Untersuche alle Zahlen von 1 bis 200 mit dieser Vorschrift auf systematische Weise. Was stellst du fest?
b) Erkläre mit den Ergebnissen von a) den Zaubertrick.

Lösung

Die Lösung kann durch *systematisches Probieren* gefunden werden. Die Anzahl der Fälle mit zunächst 200 zu betrachtenden Zahlen ist recht umfangreich, deshalb sollte man sich um ein rationelles Aufschreiben bemühen und stets überlegen, ob sich die Anzahl der Fälle reduzieren lässt. Man probiert zunächst die Zahlen von 2 bis 9 systematisch durch und erhält die folgenden Zahlenketten.

2 - 4 - 16 - 37 - 58 - 89 - 145 - 42 - 20 - 4 - 16 - ...

3 - 9 - 81 - 65 - 61 - 37 - 58 - ...

4 - 16 - ...

5 - 25 - 29 - 85 - 89 - ...

6 - 36 - 45 - 41 - 17 - 50 - 25 - 29 - 85 - 89 - ...

7 - 49 - 97 - 130 - 10 - 1 - 2 - 4 - ...

8 - 64 - 52 - 29 - 85 - 89 - ...

9 - 81 - 65 - 61 - 37 - ...

Zu erkennen ist, dass man stets in den Zyklus der 8 Zahlen 4; 16, 37, 58; 89; 145; 42 und 20 gelangt. Sofern diese Regel für alle Zahlen von 1 bis 200 gilt ist der Trick gefunden. Der Künstler kennt also nicht die ersten Worte aller Seiten, sondern nur die dieser 8 Seiten.
Damit ist klar, dass der Trick ergiebiger ist als manch anderer, denn man kann ihn mehrmals durchführen, ohne ihn sofort zu durchschauen, da man ja nicht immer bei derselben Zahl landet. Allerdings muss man um sicherzugehen sämtliche Zahlen zwischen 1 und 200 überprüfen, wobei es keine allgemeine Vorschrift zur Kontrolle gibt. Das ist eine Fleißarbeit, die man nicht unbedingt im normalen Unterricht machen sollte, es sei denn man bespricht einen Lösungsweg und verteilt die Aufgaben in der Klasse. Hierzu kann man eine Tabelle anlegen, in der getestete Zahlen nur abgehakt werden:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		v	v	v	v	v	v	v	V	v
1	v						v	v		
2	v					v				v
3							v	v		
4			v							v
5	v		v						V	
6		v			v	v				
7										
8		v				v				v
9								v		
10										
11										
12										
13	v									
14						v				
15										
16										
17										
18										
19										

Als effizientes Vorgehen können die Schüler sich folgende Punkte überlegen:

- Alle in den überprüften 8 Zahlenfolgen schon vorgekommenen Zahlen können bereits abgehakt werden.
- Da 16 in der Summe der Quadrate ihrer Ziffern das gleiche ergibt wie 61 können zusätzlich Zahlen als getestet angesehen werden, die die gleichen Ziffern haben. Damit brauchen nur Zahlen auf und oberhalb einer Diagonalen getestet werden. (s. u. für Zahlen größer 100)
- Nun werden die restlichen Zahlen untersucht und es sind jeweils 2 Zahlen abstreichbar. Dabei ist es nur notwendig auf irgendeine bekannte Zahl zu stoßen, z.B. folgt aus 14 die 17 und diese ist abgehakt. Oft genügt ein Schritt, aber in anderen Fällen sollten die Zahlenfolgen unbedingt mitnotiert werden, da dabei bisher unbekannte Zahlen auftauchen, die ebenfalls sofort in der Tabelle markiert werden können, z.B. 19 - 82 - 68 - 100 - 1 - 2 - …)
- Will man sich die Arbeit teilen, sollte man genau darauf achten wie man teilt, damit genannte Vorteile nicht verloren gehen.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10										
11										
12										
13										
14										
15										
16										
17										
18										
19										

So ist die Überprüfung der vielen Zahlen in relativ kurzer Zeit und nur mit Hilfe vom Kopfrechnen zu bewältigen. Allerdings müssen die Lösungsstrategien im Vorhinein besprochen werden, was Zeit kostet, aber im Rahmen eines Exkurses zu vorteilhaftem Arbeiten möglich wäre.

2 Schriftliches Rechnen mit natürlichen Zahlen

2.1 Spaß mit der Lieblingszahl

Einsatzmöglichkeiten:
Klasse 5/6, schriftliche Multiplikation

Lernziele:
- Entwicklung der Freude am Umgang mit Zahlen und an der Suche nach Gesetzmäßigkeiten in Zahlenmustern
- Entwicklung der Rechenfertigkeiten und des Verfahrens der schriftlichen Multiplikation

Besonderheiten der Aufgabe:
Aufgabe mit einem überraschenden Ergebnis

Benötigte Materialien:
Arbeitsblatt für die Lieblingszahl und die Lösungen

Aufgaben

Für alle Aufgaben:
Von den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ist meine **Lieblingszahl**: ___
Versuche nach jeder Rechnung eine Begründung für das überraschende Ergebnis zu finden.

Aufgabe 1
Multipliziere deine Lieblingszahl mit 3, anschließend mit 37 und nenne mir das Ergebnis dieser Aufgabe. Ich sage dir dann, welche Lieblingszahl du dir gedacht hast.

Aufgabe 2
Ich möchte, dass du dir eine einstellige Zahl denkst, die du dann mit 41 und dann noch mit 271 multiplizierst. Sage mir das Ergebnis und ich rate dann deine gedacht einstellige Zahl.

Aufgabe 3
Denke dir eine einstellige Zahl, multipliziere sie mit 273 und dann mit 407. Nenne mir das Ergebnis und ich sage dir, welche Zahl du dir gedacht hast.

Aufgabe 4
Fast jeder Mensch hat eine Lieblingszahl. Durch eine einfache Rechenoperation könnte ich die Lieblingszahl z. B. eines Freundes vervielfachen.
Denke dir eine einstellige Lieblingszahl, schreibe die Zahl 12345679 auf einen Zettel, multipliziere sie anschließend mit 9 und dann mit der gedachten Lieblingszahl und nenne mir das Ergebnis.

Lösungen

Aufgabe 1
Der Trick dieser Aufgabe besteht darin zu erkennen, dass $3 \cdot 37 = 111$ ergibt.
Das Vielfache von 111 ergibt die Lieblingszahl.
Beispiel: genannte Zahl $888 = 111 \cdot 8$
8 ist gedachte Zahl

Aufgabe 2
Das Verfahren ist analog zur ersten Aufgabe, nur dass das Ergebnis von $41 \cdot 271 = 11111$ ist.
Das Vielfache von 11 111 ergibt die Lieblingszahl.
Beispiel: genannte Zahl $44\,444 = 11\,111 \cdot 4$
4 ist gedachte Zahl

Aufgabe 3
Das Ergebnis von 273 · 407 = 111 111.
Beispiel: 333 333 = 111 111 · 3
3 ist gedachte Zahl

Aufgabe 4
Man schreibt auf einen Zettel zunächst die Zahl 1 2 3 4 5 6 7 9. Wichtig ist, dass die 8 fehlt!
Beispiel: Lieblingszahl 4
4 · 9 · 12345679 = 444444444
Die Lieblingszahl erscheint nun in neunfacher Ausfertigung.

Einsatz als Spiel: Erraten der Lieblingszahl oder Üben des sauberen Schreibens einer besonders undeutlich geschriebenen Zahl von 1 bis 9 (8 ist ausgeschlossen)

Weiterführende Frage:
Gibt es auch einen Trick mit folgenden Zahlen:

a) 1111 (11 · 101)
b) 1 111 111 (239 · 4649)
c) 11 111 111 111 (11 · 73 · 101 · 137)

2.2 Kaprekarzahlen

Einsatzmöglichkeiten:

- ab Klasse 5/6, schriftliche Subtraktion mit großen Zahlen
- Beweisaufgabe ab Klasse 8

Lernziele:

- Entwicklung der Freude am Umgang mit Zahlen und an der Suche nach Gesetzmäßigkeiten in Zahlenmustern
- Entwicklung der Rechenfertigkeiten und des Verfahrens der schriftlichen Subtraktion

Besonderheiten der Aufgabe:
Aufgaben mit einem überraschenden Ergebnis

Hinweise zur Aufgabe
Kaprekarzahlen beschreiben eine interessante Eigenschaft von Zahlen. Sie wurden im Jahr 1949 von dem indischen Mathematiker Shri Dattathreya Ramachandra Kaprekar, 1905-1986 entdeckt und lassen sich durch fortgesetzte Subtraktionen finden.

Wie findet man Kaprekarzahlen?
Man nehme eine beliebige Zahl, bei der nicht alle Ziffern gleich sind und ordne die Ziffern der Größe nach absteigend. Von der so entstehenden Zahl subtrahiere man die Zahl, die bei aufsteigender Anordnung der Ziffern entsteht. Mit der neuen Zahl wird die Rechnung so lange wiederholt, bis sich nach der Subtraktion wieder die vorherige Zahl ergibt. Dies ist dann eine Kaprekarzahl.
Ergibt sich als Differenz eine Zahl mit weniger Ziffern als die Ausgangszahl, werden für die fehlenden Ziffern Nullen verwendet.
Beispiele:

1) geg.: 123
größte Zahl: 321
kleinste Zahl: 123

321 – 123 = 198
981 – 189 = 792

2) geg.: 2405
größte Zahl: 5420
kleinste Zahl: 0245

5420 – 0245 = 5175
7551 – 1557 = 5994

Aufgaben

Ab Klasse 5:

1. Beginne mit einer beliebigen dreistelligen Zahl und führe die fortgesetzte Subtraktion so lange durch, bis sich die Zahl nicht mehr ändert.
   Probieren auch mit anderen dreistelligen Zahlen.
2. Beginne mit einer beliebigen vierstelligen Zahl und führe die fortgesetzte Subtraktion so lange durch, bis sich die Zahl nicht mehr ändert.
   Probieren auch mit anderen vierstelligen Zahlen.
3. Untersuche, ob es auch zweistellige Kaprekarzahlen gibt.
4. Untersuche, ob es auch fünfstellige Kaprekarzahlen gibt.

Ab Klasse 8:

5. Begründe, dass es genau eine dreistellige Kaprekarzahl gibt.

Lösungen

Aufgaben 1 und 2

1. Ausgangszahl: 123
   321 – 123 = 198
   981 – 189 = 792
   972 – 279 = 693
   963 – 369 = 594
   954 – 459 = 495

2. Ausgangszahl: 2405
   5420 – 0245 = 5175
   7551 – 1557 = 5994
   9954 – 4599 = 5355
   5553 – 3555 = 1998
   9981 – 1899 = 8082
   8820 – 0288 = 8532
   8532 – 2358 = 6174

Aufgabe 3

Zweistellige Startzahlen führen in den Zyklus 09, 81, 63, 27, 45, 09, ...

Aufgabe 4

Fünfstellige Startzahlen führen in die Zyklen
53955, 59994
oder 63954, 61974, 82962, 75933, 63954, ...
oder 83952, 74943, 62964, 71973, 83952, ...

Aufgabe 5

Voraussetzung: dreistellige Zahl abc gegeben, mit den Ziffern $a \neq b \neq c$ und $a < b < c$
Bildungsvorschrift für Kaprekarzahlen: cba – abc = def

Behauptung: Es existiert genau eine Kaprekarzahl:

Beweis:

Variante I: $100a + 10b + c - (100c + 10b + a) = 99(a - c)$
da $a \neq c$ gibt es folgende 9 Ergebnisse für $a - c = 1, 2, 3, \ldots. 9$
mit $99(a - c)$ ergeben sich folgende dreistellige Zahlen.
198; 297; 396; 495; 594; 693; 792; 891
Einzelprüfungen ergeben immer die Kaprekarzahl 495

Variante II:

$$\begin{array}{rrrl} a & b & c & \text{mit } a > b > c \\ -c & b & a & \\ \hline a-(c+1) & 9 & 10+c-a & \end{array}$$

→ Eine Ziffer muss 9 sein. Dies kann nur a sein, da a die größte Ziffer ist.

→ Ergebnis hat die Ziffern $d = 8 - c$ $e = 9$ und $f = 1 + c$

Die erste oder letzte Ziffer muss wieder c oder b sein
1. Fall: $8 - c = c$ und $1 + c = b \rightarrow c = 4$ und $b = 5$
2. Fall: $8 - c = b$ und $1 + c = c \rightarrow$ Wid.

2.3 Kuriose Rechnungen

Einsatzmöglichkeiten:

- ab Klasse 5/6, schriftliches Rechnen mit natürlichen Zahlen

Lernziele:

– Festigung der Fertigkeiten im mündlichen und schriftlichen Rechnen mit natürlichen Zahlen
– Entwicklung der Freude am Umgang mit Zahlen sowie an der Suche nach Gesetzmäßigkeiten in Zahlenmustern

Aufgaben:

1. Berechne und suche nach Zusammenhängen der Zahlen oder Ziffern in der Aufgabe.
a) $1738 \cdot 4 =$
b) $186 \cdot 39 =$
c) $198 \cdot 27 =$

2. Berechnen und suche nach Besonderheiten der Zahlen oder Ziffern in der Aufgabe.
a) $35853^2 =$
b) $84648^2 =$
c) $121^2 =$
d) $11^2 =$
e) $111^2 =$
f) $1111^2 =$
g) $11111^2 =$
h) $8^3 =$

3. Berechne und vergleiche, suche nach Besonderheiten und Mustern.
a) $9 + 9$ und $9 \cdot 9$
b) $47 + 2$ und $47 \cdot 2$
c) $24 + 3$ und $24 \cdot 3$
d) $497 + 2$ und $497 \cdot 2$
e) $12 \cdot 42$ und $21 \cdot 24$
f) $24 \cdot 84$ und $42 \cdot 48$
g) 12^2 und 21^2
h) 13^2 und 31^2

4. Berechne und vergleiche, suche nach Besonderheiten und Mustern.
Findest du weitere Rechnungen dieser Art?
a) $95 : 5$ und $9 + 5 + 5$
b) $36 : 3$ und $3 + 6 + 3$
c) $35 : 7$ und $3 – 5 + 7$
d) $72 : 4$ und $7 \cdot 2 + 4$
e) $45 : 15$ und $4 – 5 – 1 + 5$
f) $121 : 11$ und $12 – 1 + 1 – 1$

5. Schreibe hinter eine beliebige dreistellige Zahl die gleiche Zahl noch einmal, sodass eine sechsstellige Zahl entsteht. Dividiere diese Zahl durch 7, dann das Ergebnis durch 11 und das dann erhaltene Ergebnis durch 13. Was stellst du fest?
Suche nach einer Erklärung für das überraschende Ergebnis.

Lösungen

1.
a) $1738 \cdot 4 = 6952$
b) $186 \cdot 39 = 7254$
c) $198 \cdot 27 = 5346$

Besonderheiten: In jeder Aufgabe treten die Ziffern von 1 bis 9 jeweils genau einmal auf.

2.

a) $35853^2 = 1285437609$ Im Ergebnis treten alle Ziffern von 0 bis 9 genau einmal auf.
b) $84648^2 = 7165283904$ Im Ergebnis treten alle Ziffern von 0 bis 9 genau einmal auf.
c) $121^2 = 14641$ Das Ergebnis ist eine Spiegelzahl.
d) $11^2 = 121$ Das Ergebnis ist eine Spiegelzahl.
e) $111^2 = 12321$ Das Ergebnis ist eine Spiegelzahl.
f) $1111^2 = 1234321$ Das Ergebnis ist eine Spiegelzahl.
g) $11111^2 = 123454321$ Das Ergebnis ist eine Spiegelzahl.
h) $8^3 = 512$ 8 ist die Quersumme der Kubikzahl 512.

3.

a) $9 + 9$ und $9 \cdot 9$
b) $47 + 2$ und $47 \cdot 2$
c) $24 + 3$ und $24 \cdot 3$
d) $497 + 2$ und $497 \cdot 2$
e) 12^2 und 21^2
f) 13^2 und 31^2

} Die Ergebnisse haben vertauschte Ziffernfolgen.

g) $12 \cdot 42$ und $21 \cdot 24$ Die Ziffern in der Aufgaben sind vertauscht, die Ergebnisse sind gleich.
h) $24 \cdot 84$ und $42 \cdot 48$ Die Ziffern in der Aufgaben sind vertauscht, die Ergebnisse sind gleich.

4.

a) $95 : 5$ und $9 + 5 + 5$
b) $36 : 3$ und $3 + 6 + 3$
c) $35 : 7$ und $3 – 5 + 7$
d) $72 : 4$ und $7 \cdot 2 + 4$
e) $45 : 15$ und $4 – 5 – 1 + 5$
f) $121 : 11$ und $12 – 1 + 1 – 1$

} Die Reihenfolgen der Ziffern in den Aufgaben sind gleich.
Die Ergebnisse sind gleich.
Als Zwischenergebnisse treten auch negative Zahlen auf.

Weitere Beispiele:
$2 + 2 = 2 \cdot 2 = 4$; $12 : 4 = 1 – 2 + 4 = 3$; $25 : 5 = 2 \cdot 5 – 5 = 5$

5. Es ist $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$ und $abc \cdot 1001 = abc\,abc$.

3 Rechnen mit Dezimalbrüchen

3.1 Phönixzahlen

Einsatzmöglichkeiten:
ab Klasse 6 nach Behandlung der periodischen Dezimalbrüche

Lernziele:
- Entwicklung der Freude am Umgang mit Zahlen und an der Suche nach Gesetzmäßigkeiten in Zahlenmustern
- Entwicklung der Rechenfertigkeiten, insbesondere zum Verfahrens der schriftlichen Multiplikation
- Umwandeln von gemeinen Brüchen in periodische Dezimalbrüche durch schriftliche Division

Benötigte Materialien:
Es sollten Papierstreifen mit den 6-, 16- und 18-stelligen Phönixzahlen für den Lehrer und für Schüler bereitgestellt werden.

Aufgaben

Aufgabe 1:

a) Es gibt Zahlen mit einer ganz besonderen Eigenschaft, auf Grund derer sie den Namen „Phönixzahlen“ erhielten. Phönix ist ein Vogel in der griechischen Mythologie.
Die kleinste Phönixzahl ist 142 857. Multipliziere diese Zahl mit den Zahlen 2, 3, 4, 5, 6 und 7 und versuche Besonderheiten in den Ergebnisse zu erkennen.

b) Finde die Geschichte des Vogels „Phönix“ heraus und erläutere, warum die Zahl 142 857 wohl nach ihm benannt ist.

c) Untersuche weitere Eigenschaften der Phönixzahl 142 857. Bilde dazu z. B. Zweier- und Dreiergruppen ihrer Ziffern.

d) Wandle den Bruch $\frac{1}{7}$ in einen Dezimalbruch um und suche nach Beziehungen zur Zahl 142 857.

Aufgabe 2:

Die Phönixzahl 142 857 kannst du für einen Zaubertrick verwenden. Schreibe dazu die Ziffern mit etwas Abstand auf einen Papierstreifen und klebe ihn zu einem Ring zusammen, so dass die Ziffern sich innen befinden und so nicht sichtbar sind.
Bitte nun einen Zuschauer mit einem Würfel eine beliebige Zahl von 2 bis 6 zu würfeln (Bei einer Eins wird noch einmal gewürfelt) und damit die Zahl 142 857 schriftlich zu multiplizieren.
Bestimme im Kopf die letzte Ziffer des Ergebnisses und schneide den Ring an der betreffenden Stelle durch. Dann kannst du den erstaunten Zuschauer das Ergebnis der Rechnung präsentieren.

Aufgabe 3:

a) Die nächstgrößere Phönixzahl ist 0 588 235 294 117 647. Die führende Null muss bei den folgenden Rechnungen mit betrachtet werden.
Untersuche die „Phönixeigenschaft“ dieser Zahl, indem du sie mit den Zahlen 2, 3, 4, … multiplizierst. Bis zu welcher Zahl bleibt die Eigenschaft erhalten?

b) Die dritte Phönixzahl ist 052 631 578 947 368 421. Mit dieser 18-stelligen Zahl kannst du wieder einen Zaubertrick analog zur Aufgabe 2 durchführen. Dieses Mal musst du 3 Würfel verwenden und die Augenzahlen addieren, um so eine beliebige Zahl von 3 bis 18 zu erhalten. Mit dieser Augensumme muss dann ein Zuschauer die Phönixzahl multiplizieren. Du kannst dann wieder durch Zerschneiden des Bandes an der richtigen Stelle den Zuschauern das Ergebnis präsentieren.

c) Ermittle die Periode der Dezimalbrüche $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{11}$; $\frac{1}{13}$; $\frac{1}{17}$; $\frac{1}{19}$ und stelle fest, ob es Phönixzahlen sind.

Lösungen

Informationen zu Phönixzahlen:

Eine Phönixzahl oder in der Fachsprache eine zyklische Zahl ist eine n-stellige natürliche Zahl (wobei meist Nullen am Anfang mit zu berücksichtigen sind), welche die folgende ungewöhnliche Eigenschaft besitzt. Bei der Multiplikation dieser Zahl mit einer natürlichen Zahl von 1 bis n entsteht eine Zahl, in der die gleichen Ziffern wie in der Ausgangszahl in zyklischer Reihenfolge vertauscht auftreten.
Zyklische Zahlen sind Perioden von periodischen Dezimalbrüchen, die bei der Umwandlung von Brüchen der Form $\frac{1}{p}$ entstehen, wobei p stets eine Primzahl ist. Zyklische Zahlen entstehen zum Beispiel für p = 7; 17; 19; 23, 29, 47, 59, 61, 97, 109, 113, 131 und 149. Es ist bis heute nicht bekannt, wie viele zyklische Zahlen es gibt. Vermutlich sind es unendlich viele.

Aufgabe 1 und 2:

a)

2 · 142 857 = 285 714	5 · 142 857 = 714 285
3 · 142 857 = 428 571	6 . 142 857 = 857 142
4 · 142 857 = 571 428	7 · 142 857 = 999 999

Die Ziffern der Phönixzahl treten in den ersten 5 Produkten in vertauschter Reihenfolge auf.

b) Der Vogel Phönix soll der Sage zufolge im Abstand von mehreren hundert Jahren erscheinen, bei Sonnenaufgang in der Glut der Morgenröte verbrennen und aus seiner Asche verjüngt wieder auferstehen. Bei der Multiplikation entstehen die Ziffern der Phönixzahl immer wieder „aus ihrer Asche“ und durch zyklische Vertauschung „verjüngt“

c)

Es gilt: 14 = 2 · 7 28 = 4 · 7 57 = 8 · 7 + 1

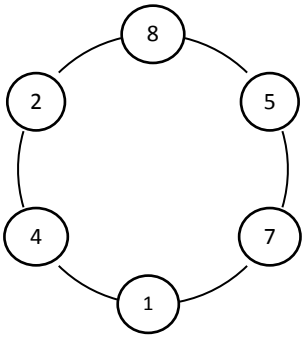
1 + 4 + 2 + 8 + 5 + 7 = 27 und 2 + 7 = 9 14 + 28 + 57 = 99 142 + 857 = 999

142 857 = 143 · 999 = 9 · 11 · 13 · 37

Aus der Beziehung 142 857 143 · 7 = 1 000 000 001 lassen sich Zaubertricks gewinnen.

Man kann die Ziffern kreisförmig anordnen. Zwei gegenüberliegende Ziffern ergeben zusammen immer 9.

Die Ziffern findet man auch auf der Tastatur eines Taschenrechners oder der Zehnertastatur bei einem PC in den beiden linken Ziffernspalten.



d) Es ist: 1 : 7 = $0,\overline{142857}$ Unsere Phönixzahl ist also die Periode des Dezimalbruchs von $\frac{1}{7}$.

Aufgabe 3:

a) Bei einer Multiplikation mit einer Zahl von 2 bis 16 ergeben sich die Ziffern der Ausgangszahl in zyklisch vertauschter Reihenfolge.

b) Die Produkte der Zahl p = 052 631 578 947 368 421 mit den Zahlen 3 bis 18 lauten:

3p = 1 578 947 368 421 052 63	4p = 21052 631 578 947 368 4	5p = 2 631 578 947 368 42105
6p = 31 578 947 368 4210 52 6	7p = 368 421 052 631 578 947	8p = 421 052 631 578 947 368
9p = 47 368 421 052 631 578 9	10p = 52 631 578 947 368 421 0	11p = 578 947 368 421 052 631
12p = 631 578 947 368 421 052	13p = 68 421 052 631 578 947 3	14p = 7 368 421 052 631 578 94
15p = 78 947 368 421 052 631 5	16p = 8 421 052 631 578 947 36	17p = 8 947 368 421 052 631 57
18p = 947 368 421 052 631 578		

c) Es ist: 1 : 9 = $0,\overline{1}$ 1 : 11 = $0,\overline{09}$ 1 : 13 = $0,\overline{076923}$

1 : 17 = $0,\overline{0588235294117647}$ 1 : 19 = $0,\overline{052631578947368421}$

Die Zahlen 1, 09 und 076923 sind keine Phönixzahlen.

Die Perioden der Brüche mit den Nennern 17 und 19 sind die Phönixzahlen aus a) und b).

4 Arbeiten mit Variablen und Termen

4.1 Rechnungen mit überraschenden Ergebnissen

Einsatzmöglichkeit:

- Klasse 5/6 natürliche Zahlen
- ab Klasse 8 Termumformungen

Lernziele:

– Festigung der Fertigkeiten im mündlichen und schriftlichen Rechnen mit natürlichen Zahlen
– Festigung der Fertigkeiten im algebraischen Beschreiben von Zahlen
– Festigung der Fertigkeiten im Umformen von Termen
– Entwicklung der Freude am Umgang mit Zahlen und Variablen sowie an der Suche nach Gesetzmäßigkeiten in Zahlenmustern

Aufgaben:

Aufgabe 1:

a) Berechne. Was stellst du fest?
   (1) 20 – 02
   (2) 31 – 13
   (3) 42 – 24
b) Finde weitere Differenzen mit dem gleichen Ergebnis.
c) Suchen nach einer Begründung für die überraschenden Ergebnisse.

Aufgabe 2:

a) Berechne und vergleiche die Produkte.
   (1) $12 \cdot 42$ und $21 \cdot 24$
   (2) $24 \cdot 84$ und $42 \cdot 48$
b) Verallgemeinere die Rechnung und suche alle Produkte aus zweistelligen Zahlen mit dieser Eigenschaft.

Aufgabe 3:

a) Berechne und vergleiche.
   (1) $3^2 + 4^2$ und 5^2
   (2) $10^2 + 11^2 + 12^2$ und $13^2 + 14^2$
b) Suche nach einer Verallgemeinerung der Rechnungen und finde die nächste Gleichung der gleichen Art.
c) Findest du eine allgemeine Darstellung dieser Art von Gleichungen mithilfe von Variablen?

Lösungen

Aufgabe 1:

Die Aufgaben sollten im Kopf gelöst werden. Eine Begründung des überraschenden Ergebnisses kann durch Betrachtung aller Fälle oder durch Arbeiten mit Variablen erfolgen.

a) Das Ergebnis ist stets 18.

b) Alle weiteren Fälle:

$53 – 35 = 18$
$64 – 46 = 18$
$75 – 57 = 18$
$86 – 68 = 18$
$97 – 79 = 18$

c) Begründung mit Variablen:

Für $10a + b$ mit $b = a – 2$ und $0 \leq b \leq 7$ gilt:
$10a + b – 10b + a = 9a – 9b = 9a – 9(a – 2) = 9a – 9a + 18 = 18$

Aufgabe 2:
Die Verallgemeinerung mit Variablen führt auf eine Gleichung mit drei Variablen. Da nur Lösungen im Bereich der einstelligen natürlichen Zahlen gesucht sind, kann man alle Lösungen durch systematisches Probieren finden.

1. a) Die Ergebnisse sind:

(1) $12 \cdot 42 = 21 \cdot 24 = 504$

(2) $24 \cdot 84 = 42 \cdot 48 = 2016$

b) 1. Fall: Wie in den Beispielen sind die Einerstellen gleich.

$(10a + b)\cdot(10c + b) = (10b + a)\cdot(10b + c)$

$\rightarrow 100ac + b^2 + 10bc + 10ab = 100b^2 + ac + 10ab + 10bc$

$\rightarrow 99ac = 99b^2$

$\rightarrow ac = b^2$

alle Lösungen:

a	b	c	ab · cb	ba · bc	Produkt
1	2	4	12 · 42	21 · 24	504
1	3	9	13 · 93	31 · 39	1209
2	4	8	24 · 84	42 · 48	2016
4	6	9	46 · 96	64 · 69	4416

2. Fall: Alle 4 Ziffern sind verschieden.

$(10a + b)\cdot(10c + d) = (10b + a)\cdot(10d + c)$

$\rightarrow 100ac + bd + 10bc + 10ad = 100bd + ac + 10ad + 10bc$

$\rightarrow 99ac = 99bd$

$\rightarrow ac = bd$

alle Lösungen:

a	b	c	d	ab · cd	ba · dc	Produkt
1	2	6	3	12 · 63	21 · 36	756
1	2	8	4	12 · 84	21 · 48	1008
1	3	6	2	13 · 62	31 · 26	806
1	4	8	2	14 · 82	41 · 28	1148
2	3	6	4	23· 64	32 · 46	1472
2	3	9	6	23 · 96	32 · 69	2208
2	4	6	3	24 · 63	42 · 36	1512
2	6	9	3	26 · 93	62 · 39	2418
3	4	8	6	34 · 86	43 · 68	2924
3	6	8	4	36 · 84	63 · 48	3024

Aufgabe 3:

a) Es ist $3^2 + 4^2 = 5^2$ und $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$

b) Die nächste Gleichung lautet: $21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$

c) Als allgemeine Darstellung dieser Art von Gleichungen ist möglich:

$$n^2 + (n + 1)^2 + (n + 2)^2 + \ldots + (n + k)^2 = (n + k + 1)^2 + (n + k + 2)^2 + \ldots + (n + 2k)^2$$

Durch geschicktes Zusammenfassen ergibt sich folgende allgemeine Lösung:

$$n = k\,(2k + 1)$$

Damit ergeben sich folgende erste Werte für n und k:

k	1	2	3	4	5
n	3	10	21	36	55

4.2 Mathematische Zaubereien – Erraten von Ergebnissen

Einsatzmöglichkeiten:

- ab Klasse 8 nach Behandlung der Termumformungen
- Üben und Festigen von Termumformungen und Rechenfertigkeiten

Lernziele:

- Festigung der Fertigkeiten im mündlichen und schriftlichen Rechnen mit natürlichen Zahlen
- Festigung der Fertigkeiten im algebraischen Beschreiben von Zahlen
- Festigung der Fertigkeiten im Umformen von Termen
- Entwicklung der Freude am Umgang mit Zahlen und Variablen sowie an der Suche nach Gesetzmäßigkeiten in Zahlenmustern

Besonderheiten der Aufgabe:
Es handelt sich um Zaubertricks, die vorgeführt und dann erraten werden sollten. Wenn der Trick gleichzeitig mit mehreren Personen oder zweimal nacheinander mit einer Person durchgeführt wird, ist schnell erkennbar, das sich immer die gleiche Zahl ergibt, woraus die Frage entsteht, warum das so ist.
Es ist darüber hinaus möglich, noch weitergehende „Verpackungen“ der Aufgaben vorzunehmen. Beispielsweise könnte man behaupten, ein beliebiges Buch auswendig zu kennen. Um diese Behauptung zu überprüfen, wird entsprechend der Rechenvorschrift eine „zufällige“ Seitenzahl ermittelt, deren Inhalt dann (nach entsprechender Vorbereitung) wiedergegeben werden kann.

Aufgaben

Aufgabe 1
Man denke sich eine einstellige natürliche Zahl,
addiere zu ihr 8,
verdreifache die Summe und
addiere 26.
Dann wird das Doppelte der gedachten Zahl subtrahiert,
bei der erhaltenen Zahl die Einerziffer weg gestrichen und
die dann verbleibende Zahl zu 14 addiert.

Aufgabe 2
Man denke sich eine zweistellige natürliche Zahl und
subtrahiere von ihr 8.
Die erhaltene Zahl wird von 100 subtrahiert und
vom Ergebnis subtrahiere man 21.
Danach addiere man den Nachfolger der gedachten Zahl und dividiere die Summe durch 8.

Aufgabe 3
Man denke sich eine zweistellige gerade Zahl und schreibe sie auf.
Davor schreibe man die Hälfte der gedachten Zahl.
Die so entstandene neue Zahl wird durch 3 dividiert und
es wird die gedachte zweistellige Zahl addiert.
Die erhaltene Summe wird durch 2 dividiert und
der so erhaltenen Quotienten durch die gedachte Zahl.
Dann addiere man 4.

Aufgabe 4
Man denke sich eine natürliche Zahl kleiner als 10,
multipliziere sie mit 4,
addiere zum Ergebnis 3 und
multipliziere die Summe mit 3.
Dann wird das Doppelte der gedachten Zahl subtrahiert,
die erste Ziffer des Ergebnisses gestrichen,
zum verbliebenen Rest 7 addiert und
aus der Summe die Quadratwurzel gezogen.

Aufgabe 5
Eine beliebige dreistellige Zahl z wird aufgeschrieben, deren erste und letzte Ziffer sich um mindestens zwei unterscheiden.
Anschließend wird eine neue Zahl durch Umkehren der Reihenfolge der Ziffern von z gebildet und die kleinere von der größeren Zahl subtrahiert.
Durch Umkehren der Reihenfolge der Ziffern der erhaltenen Differenz d wird eine neue Zahl gebildet und zu d addiert.

Lösungen

Aufgabe 1

Trick: Das Ergebnis ist stets 19.

Algebraische Begründung: gedachte Zahl: n;

$$\text{Term: } ((n + 8)\cdot 3 + 26) - 2\cdot n = 3\cdot n + 24 + 26 - 2\cdot n = 50 + n$$

Streicht man nun die Einerziffer des Ergebnisses weg, so bleibt immer die Zahl 5 als Rest. Addiert man dazu die Zahl 14, so ergibt sich als Summe 19.

Finden von Lösungsideen:
- Es ist eine direkte Übersetzung des Textes mithilfe einer Variablen möglich.
- Im Term 50 + n muss n als Einerziffer erkannt werden.

Aufgabe 2

Trick: Das Ergebnis ist stets 11.

Algebraische Begründung: gedachte Zahl: n

$$\text{Term: } 100 - (n - 8) - 21 + (n + 1) = 100 - n + 8 - 21 + n + 1 = 88$$

Das Ergebnis ist für jede zweistellige natürliche Zahl die Zahl 88. Dividiert man diese durch 8, so ergibt sich als Quotient 11.

Finden von Lösungsideen:
- Es ist eine direkte Übersetzung des Textes mithilfe einer Variablen möglich.

Trick: Das Ergebnis ist stets 13.

Algebraische Begründung: gedachte Zahl: n;

$$\text{Term: } \{[(n + 100 \cdot \frac{n}{2}) : 3 + n] : 2\} : n = 18n : 2n = 9$$

Das Ergebnis ist also für jede zweistellige gerade natürliche Zahl die Zahl 9. Addiert man zu dieser Zahl die Zahl 4, so ergibt sich als Summe 13.

Finden von Lösungsideen:
- Es ist eine direkte Übersetzung des Textes mithilfe einer Variablen möglich, wobei die

gedachte Zahl nicht als zweistellige Zahl geschrieben werden muss.

- Um auf die Übersetzung des Textes „Davor schreibe man die Hälfte der gedachten Zahl.“ zu kommen, kann mit konkreten Zahlen probiert werden.

Aufgabe 4

Trick: Das Ergebnis ist stets 4.

Algebraische Begründung: gedachte Zahl: n

Term: $(4 \cdot n + 3) \cdot 3 - 2 \cdot n = 12n + 9 - 2n = 10n + 9$

Das Ergebnis ist eine zweistellige Zahl, deren Zehnerziffer die gedachte Zahl und deren Einerziffer die Zahl 9 ist. Streicht man nun die erste Ziffer des Ergebnisses weg, so bleibt immer die Zahl 9 als Rest. Addiert man dazu die Zahl 7 und zieht aus der Summe anschließend die Quadratwurzel, so ergibt sich

$\sqrt{9+7} = \sqrt{16} = 4.$

Finden von Lösungsideen:

- Es ist eine direkte Übersetzung des Textes mithilfe einer Variablen möglich.

Aufgabe 5

Trick: Das Ergebnis ist stets 1089.

Algebraische Begründung: gedachte Zahl: abc

a	b	c	a > c
- c	b	a	
a-c-1	9	10+c-a	
10+c-a	9	a-c-1	
10	8	9	

Finden von Lösungsideen:

- Eine dreistellige Zahl kann in der Form 100a + 10 b + c oder abc beschrieben werden. Bei Verwendung der ersten Darstellungsart merkt man bald, dass die Rechnungen sehr umständlich werden, obwohl sie auch zum Ziel führen.
- Die Darstellung der Differenzen der Ziffern kann durch Probieren mit Zahlen gefunden werden.

4.3 Mathematische Zaubereien – Erraten von gedachten Zahlen

Einsatzmöglichkeiten:

- ab Klasse 8, nach Behandlung der Termumformungen

Lernziele:

- Entwicklung der Freude am Umgang mit Variablen
- Aufstellen von Termen zu verbalen Rechenvorschriften
- Entwicklung von Fertigkeiten im Umformen von Termen (Auflösen von Klammern, Ausklammern, Multiplikation von Summen)
- Finden von Lösungsideen durch Analyse der Struktur von Termen und durch Probieren

Besonderheiten der Aufgaben:

Es handelt sich um Zaubertricks, die mehrmals vorgeführt und dann begründet werden sollten.

Aufgaben

1. Denkt euch ein beliebiges Datum (Tag und Monat), multipliziert die Zahl, die den Tag angibt, mit 3 und addiert zu diesem Produkt 7. Verdreifacht dann die erhaltene Summe und addiert die Tageszahl. Die so ermittelte Zahl multipliziert mit 10 und addiert die Monatszahl.
   Nennt mir das Ergebnis und ich errate das gedachte Datum.
2. Multipliziert eure Schuhgröße (als ganze Zahl) mit 2, addiert zum Ergebnis 39, multipliziert die Summe mit 50, addiert die Zahl 66 und subtrahiert euer Geburtsjahr.
   Nennt mir das Ergebnis, ich errate die Schuhgröße und welchen Geburtstag ihr in diesem Jahr feiert bzw. schon gefeiert habt.
3. Bildet das Produkt einer beliebigen einstelligen Zahl mit 9, subtrahiert das Ergebnis vom Zehnfachen eures Alters.
   Nennt mir das Ergebnis und ich errate das Alter.
4. Multipliziert euer Alter mit einer beliebigen einstelligen Zahl. Addiert zu diesem Produkt die Summe aus Alter und der gedachten Zahl und nennt mir das Ergebnis.
   Ich errate aus dieser einen Zahl sowohl das Alter als auch die gedachte Zahl.
   Hinweis: Die gedachte einstellige Zahl sollte eine Bedeutung haben, z. B. bei Jugendlichen die Zahl der gewünschten Kinder.

Lösungen

Aufgabe 1

Trick: Vom Ergebnis wird 210 subtrahiert, dann geben die ersten beiden Ziffern den Tag und die zweiten den Monat an.

algebraische Beschreibung: Tag: t; Monat: m $[(3t + 7) \cdot 3 + t] \cdot 10 + m = 100t + m + 210$

Finden von Lösungsideen:

- Übersetzen des Textes mithilfe von Variablen, wobei die Tages- und Monatszahl nicht als zweistellige Zahlen geschrieben werden müssen
- Erkennen der Vorschrift durch Einsetzen von konkreten Werten für t und m

Aufgabe 2

Trick: Die ersten beiden Stellen geben die Schuhgröße und die letzten beiden bei das Alter an, das in dem aktuellen Jahr erreicht wird bzw. schon erreicht worden ist. Die Zahl 66 ist die Differenz aus dem aktuellen Jahr (hier 2016) und dem Jahr 1950, sie muss also jedes Jahr geändert werden.

Als Schuhgröße sollte das europäische System vorgegeben werden. Die Person darf nicht älter als 99 Jahre sein.

algebraische Beschreibung: Schuhgröße: s; Geburtsjahr: a

$$(s \cdot 2 + 39) \cdot 50 + 66 – a = 100s + 1950 + 66 – a = 100s + 2016 – a$$

Finden von Lösungsideen:

- Übersetzen des Textes mithilfe von Variablen, wobei die Schuhgröße und das Geburtsjahr nicht als mehrstellige Zahlen geschrieben werden müssen
- Erkennen der Vorschrift durch Einsetzen von konkreten Werten für s und a, auch $a > 99$

Aufgabe 3

Trick: Vom Ergebnis wird die Einerziffer abgetrennt und zur restlichen Zahl addiert, es ergibt sich das Alter.

algebraische Beschreibung: beliebige einstelligen Zahl: n; Alter: a

$$9n - 10a = 10n - 10a + n = 10(n - a) + n$$

Finden von Lösungsideen:

- Übersetzen des Textes mithilfe von Variablen, wobei das Alter nicht als zweistellige Zahl geschrieben werden muss
- Finden des Tricks durch systematisches Probieren mit bekannten Zahlen (auch n = 0) und erkennen der Gesetzmäßigkeit und der Struktur des Endterms
- davon ausgehend Finden einer Möglichkeit zur geschickten Zerlegung des Terms

Aufgabe 4

Trick: Die vom Zuschauer genannte Zahl wird um 1 erhöht und dann in zwei Faktoren zerlegt. Von jedem Faktor wird 1 subtrahiert und man erhält die gesuchten Zahlen. Da die Zerlegung in Faktoren nicht eindeutig ist, muss das richtige Zahlenpaar mit Hilfe von Zusatzinformationen (geschätztes Alter, vermutliche Zahl der gewünschten Kinder) ermittelt werden.

algebraische Beschreibung: einstelligen Zahl: n; Alter: a $\quad a \cdot n + a + n + 1 = (a + 1)(n + 1)$

Finden von Lösungsideen:

- Übersetzen des Textes mithilfe von Variablen, wobei das Alter nicht als zweistellige Zahl geschrieben werden muss
- Finden des Tricks durch systematisches Probieren mit bekannten Zahlen (auch n = 0) und erkennen der Gesetzmäßigkeit und der Struktur des Endterms oder
- Finden Tricks durch Betrachtung des Terms für n = 1:
  $$a + a + 1 + 1 = 2a + 2 = 2(a + 1) = (1 + 1)(a + 1)$$
- nach Finden der Vermutung und Nachweis durch Ausmultiplizieren von (a + 1) (n + 1)

4.4 Wo liegt der Fehler?

Einsatzmöglichkeiten:

- Klasse 8, Rechnen mit Gleichungen, äquivalente Umformungen

Lernziele:

- Anwendung der Kenntnisse zu äquivalenten Umformungen
- Förderung des kritischen und aufmerksamen Denkens

Aufgaben

Finde den Fehler in den folgenden Rechnungen.

a)

$$-20 = -20$$
$$16 - 36 = 25 - 45$$
$$16 - 36 + \frac{81}{4} = 25 - 45 + \frac{81}{4}$$
$$\left(4 - \frac{9}{2}\right)^2 = \left(5 - \frac{9}{2}\right)^2$$
$$4 - \frac{9}{2} = 5 - \frac{9}{2}$$
$$4 = 5$$

b)

$$a = b \quad | \cdot a$$
$$a^2 = ab \quad | + a^2 - 2ab$$
$$a^2 + a^2 - 2ab = ab + a^2 - 2ab$$
$$2(a^2 - ab) = a^2 - ab \quad | :(a^2 - ab)$$
$$2 = 1$$

Lösungen

a)

$$-20=-20$$

$$16-36=25-45$$

$$16-36+\frac{81}{4}=25-45+\frac{81}{4}$$

Fehler: Radizieren ist keine Äquivalenzumformung!

b)

$$\left(4-\frac{9}{2}\right)^2=\left(5-\frac{9}{2}\right)^2$$

$$4-\frac{9}{2}=5-\frac{9}{2}$$

$$4=5$$

Fehler: Division durch Null!
wenn a = b dann a² - ab = 0

$$a=b \quad | \cdot a$$

$$a^2=ab \quad |+a^2-2ab$$

$$a^2+a^2-2ab=ab+a^2-2ab$$

$$2(a^2-ab)=a^2-ab \quad |:(a^2-ab)$$

$$2=1$$