

## Lösungen der Aufgaben zum logischen Denken

1. Jeder der Weisen nimmt zunächst an, dass seine Stirn weiß ist. Das Lachen der anderen beiden erklärt jeder sich damit, dass die beiden über die schwarze Stirn des anderen lachen. Dann überlegt sich jeder folgendes: wenn meine Stirn weiß wäre, dann würde einer der beiden anderen, der auch annimmt dass seine Stirn weiß ist, sich wundern, dass der Dritte noch lacht, da dieser ja zwei weiße Stirnen sehen würde und kein Grund zum Lachen hätte.
2. Bert und Christine können nicht beide einen schwarzen Hut aufhaben, sonst wüsste Arne, dass er einen weißen Hut aufhat. Also muss entweder Bert oder Christine oder auch beide einen weißen Hut aufhaben.  
 Wenn Christine einen schwarzen Hut aufhätte, so wüsste Bert, dass er einen weißen Hut aufhat. Da er aber nicht die Farbe seines Hutes sagen kann, muss Christine einen weißen Hut aufhaben.
3. Vor und nach dem Umfüllen ist in beiden Gläsern die gleiche Menge an Flüssigkeit. Wenn in einem Glas mehr Saft aus dem anderen wäre, als von ihm in dem anderen, müssten unterschiedliche Mengen an Flüssigkeiten in den Gläsern sein.
4. Es müssen schrittweise alle 28 Möglichkeiten der Kombination der Zahlen von 0 bis 6 durchgegangen werden und schrittweise Fälle ausgeschlossen werden. Am Ende ergibt sich als einzige Möglichkeit die Kombination 2 und 3.
5. Eine mögliche Fragen ist: „Was würde ein Bewohner ihrer Heimatinseln sagen, wenn ich ihn fragen würde, ob ich auf der Wahrheitsinsel bin?“  
 Wenn er auf der Wahrheitsinsel ist und einen Bewohner dieser Insel trifft, würde der Befragte mit ja antworten. Trifft er einen Bewohner der Lügeninsel, der zu Gast auf der Wahrheitsinsel ist, so würde dieser auch mit ja antworten, da ein Bewohner der Lügeninsel nein sagen würde, der Befragte aber auch ein Lügner ist und deshalb ja sagen müsste.  
 Wenn er auf der Lügeninsel ist und einen Bewohner der Wahrheitsinsel trifft, der zu Gast auf der Wahrheitsinsel ist, so würde dieser auch mit nein antworten. Wenn er einen Bewohner dieser Insel trifft, würde der Befragte mit nein antworten, da ein Bewohner der Lügeninsel ja sagen würde, der Befragte aber auch ein Lügner ist und deshalb nein sagen müsste.
6. a) Der Satz „Jede Regel hat eine Ausnahme.“ ist offensichtlich auch eine Regel und hat deshalb auch eine Ausnahme, so dass nicht jede Regel eine Ausnahme hat.  
 b) Wenn der Matrose Hein sich nicht selbst rasieren würde, so müsste er sich nach dem Befehl selbst rasieren. Wenn er sich selbst rasiert, so brauchte er sich nach dem Befehl nicht rasieren.  
 c) Wenn die Menge M sich nicht selbst als Element enthält, so gehört die Menge M selbst zur Menge M. Damit enthält sie sich aber auch selbst als Element und dürfte somit nicht zur Menge gehören.
7. Negieren Sie folgende Aussagen bzw. Aussageformen. Geben Sie zwei Formulierungen an. Lösungshinweis: Generelle Formulierung der Negationen: Es nicht wahr, dass ...

Aussagen	Mögliche Negationen
a) Ronny ist größer als Stefan.	– Ronny ist kleiner als Stefan oder genauso groß wie er. – Ronny ist nicht größer als Stefan.
b) Der Punkt P liegt außerhalb des	– Der Punkt ist Element des Kreises (oder

Kreises.	liegt auf dem Kreis) oder liegt innerhalb des Kreises. – Der Punkt liegt nicht außerhalb des Kreises
c) Das Quadrat von 3 ist gleich 6. (Falsche Aussage)	– Das Quadrat von 3 ist kleiner oder größer als 6. – Das Quadrat von 3 ist ungleich 6.
d) Die reelle Zahl x ist kleiner als 3.	– Die reelle Zahl x ist größer oder gleich 3. – Die reelle Zahl x ist nicht kleiner als 3.
e) Das Dreieck ABC ist gleichseitig.	– Das Dreieck ABC gleichschenkelig oder ungleichseitig. – Das Dreieck ist nicht gleichseitig.
f) Es gibt eine natürliche Zahl, die größer als ihr Kehrwert ist. (gilt für alle Zahlen außer 1)	– Für alle natürlichen Zahlen gilt, dass sie nicht größer als ihr Kehrwert sind. – Es gibt keine natürliche Zahl, die größer als ihr Kehrwert ist.
g) Für alle gebrochenen Zahlen gilt, dass ihr Kehrwert stets kleiner als die Zahl ist. (falsche Aussage)	– Es gibt eine gebrochene Zahl, deren Kehrwert größer oder gleich dieser Zahl ist. – Nicht für alle gebrochenen Zahlen gilt, dass ihr Kehrwert stets kleiner als die Zahl ist.
h) Es gibt Primzahlen, deren Quadrat wieder eine Primzahl ist. (falsche Aussage)	– Für alle Primzahlen gilt, dass ihr Quadrat keine Primzahl ist. – Es gibt keine Primzahl, deren Quadrat wieder eine Primzahl ist.
i) Primzahlen sind stets größer als 2. (falsche Aussage)	– Es gibt eine Primzahl, die kleiner oder gleich 2 ist – Nicht alle Primzahlen sind größer als 2.
j) Alle Schwäne sind weiß.	– Es gibt einen Schwan, der nicht weiß ist. – Nicht alle Schwäne sind weiß.
k) Es gibt einen Schüler, der die Note 6 hat.	– Es gibt keinen Schüler, der die Note 6 hat. – Kein Schüler hat die Note 6. – Für alle Schüler gilt, dass sie nicht die Note 6 haben.

8. Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Formulieren Sie die nicht sinnvollen Aussagen um.

Lösung: Alle Aussagen sind wahr. Bessere Formulierungen:

- Von den Zahlen 4, 5 und 6 sind höchstens zwei ungerade.
- In einem PKW finden höchstens 10 Menschen Platz.
- Ein Dreieck hat höchstens einen rechten Winkel.

9. Formulieren Sie nach Möglichkeit folgende Aussagen als Konjunktion in der sprachlichen Form „A und B“ bzw. als Adjunktion in der sprachlichen Form „A oder B“.

- Rechtecke sind Parallelogramme *und* Rhomben sind Parallelogramme.
- $\sqrt{2}$  ist größer 1 *und* kleiner 2.
- 7 ist ungerade *und* 7 ist Primzahl.
- Für  $3 \cdot 0,2$  kann man 0,6 *und* für  $3 \cdot 0,2$  kann man  $6/10$  schreiben.
- Es handelt sich nicht um eine Aussagenverbindung, da der Begriff Scheitelwinkel ein

Relationsbegriff ist.

- f) Das gesuchte Dreieck ist rechtwinklig *oder* das gesuchte Dreieck ist gleichschenkl.
- g) Die Lösungen der Ungleichung sind *entweder* größer als 5 *oder* kleiner als -1.
- h) Das Bild der Funktion  $y = 2x + 1$  ist eine Gerade *und*  $y$  ist nicht proportional zu  $x$ .
- i) Das Dreieck ABC1 erfüllt die Bedingungen der Aufgabe und das Dreieck ABC2 erfüllt die Bedingungen der Aufgabe.
- j) 2 ist gerade *und* 2 ist eine Primzahl.
- k) Ein Parallelogramm ist ein Trapez *und* ein Rechteck ist ein Trapez.
- l) Die Sonne scheint und es ist kalt.

10. In der Umgangssprache und z. T. auch in der Mathematik wird die Aussagenverbindung „A oder B“ verwendet, obwohl „entweder A oder B“ gemeint ist. Überprüfe Sie die folgenden Formulierungen.

Aussagenverbindung	logische Form
a) Die Tante kommt am Sonnabend oder Sonntag zu Besuch.	entweder A oder B
b) Zahlen, die auf 0 oder 5 enden, sind durch 5 teilbar.	entweder A oder B
c) Wenn für zwei reelle Zahlen $a, b$ gilt $a \cdot b = 0$ , so ist $a = 0$ oder $b = 0$ .	A oder B

11. Finden Sie möglichst viele verschiedene Formulierungen der folgenden Sätze.

Implikation	eine sprachliche Variante
a) Wenn eine Zahl auf 4 endet, dann ist sie durch 2 teilbar.	Eine Zahl ist durch 2 teilbar, falls sie auf 4 endet. (s. a. Aufgabe 14)
b) Wenn $\alpha$ und $\beta$ Scheitelwinkel sind, dann sind sie gleich groß.	Zwei Winkel sind gleich groß, wenn sie Scheitelwinkel sind.
c) Wenn zwei Dreiecke kongruent zueinander sind, sind entsprechende Winkel gleich groß.	Aus der Kongruenz zweier Dreiecke folgt, dass die entsprechenden Winkel gleich groß sind.
d) Wenn eine Zahl kleiner ist als $-5$ , dann ist sie auch kleiner als $-3$ .	Dass eine Zahl kleiner ist als $-5$ , ist hinreichend dafür, dass sie auch kleiner ist als $-3$ .

12. Formulieren Sie folgende Aussagen als Implikationen.

Aussage	Aussage als Implikation
a) Alle geraden Zahlen sind durch 2 teilbar.	Wenn eine Zahl gerade ist, dann ist sie durch 2 teilbar.
b) Jedes gleichwinklige Dreieck ist auch gleichseitig.	Wenn ein Dreieck gleichwinklig ist, dann ist es auch gleichseitig.
c) Jedes Rechteck ist ein Parallelogramm.	Wenn eine Figur ein Rechteck ist, dann ist es auch ein Parallelogramm.
d) Winkel, deren Schenkel paarweise senkrecht aufeinander stehen, sind kongruent.	Wenn die Schenkel zweier Winkel paarweise senkrecht aufeinander stehen, dann sind sie kongruent zueinander.
e) Dreiecke, die in drei Seiten übereinstimmen, sind kongruent zueinander.	Wenn Dreiecke in drei Seiten übereinstimmen, dann sind sie kongruent zueinander.
f) Zueinander kongruente Dreiecke sind zueinander ähnlich.	Wenn Dreiecke kongruent zueinander sind, dann sind sie auch zueinander ähnlich.

13. Kreuzen Sie an, ob die Bedingung notwendig oder hinreichend ist.

	notwendig	hinreichend	
a) Dass das Dreieck ABC drei kongruente Seiten hat, ist		X	dafür, dass es gleichschenkelig ist.
b) Die Teilbarkeit einer natürlichen Zahl durch 17 ist	X		für die Teilbarkeit dieser Zahl durch 34.
c) Die Teilbarkeit einer natürlichen Zahl durch 26 ist		X	für die Teilbarkeit dieser Zahl durch 13.
d) Die Bedingung, dass das Viereck ABCD vier kongruente Seiten hat, ist	X		dafür, dass es ein Quadrat ist.
e) Die Bedingung, dass das Viereck ein Rechteck ist, ist		X	dafür, dass es ein Parallelogramm ist.
f) Die Bedingung $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$ ist	X	X	dafür, dass $x^2 + px + q = 0$ eine Doppellösung hat.

14. Entscheiden Sie, ob die Aussagen 1. bis 6. logisch gleichwertig sind zum Satz:

Wenn eine Zahl durch 4 teilbar ist, so ist sie auch durch 2 teilbar.

Lösung: Alle Aussagen sind logisch gleichwertig zum Satz.

Aussage	Sprachliche Variante
1. Eine Zahl, die durch 4 teilbar ist, ist auch durch 2 teilbar.	(3)
2. Für alle Zahlen gilt, ist eine Zahl durch 4 teilbar, so ist sie auch durch 2 teilbar.	
3. Die Teilbarkeit durch 4 ist eine hinreichende Bedingung für die Teilbarkeit durch 2.	(6)
4. Die Teilbarkeit durch 2 ist eine notwendige Bedingung für die Teilbarkeit durch 4.	(7)
5. Jede natürliche Zahl ist durch 2 teilbar, wenn sie durch 4 teilbar ist.	(5)
6. Eine Zahl ist nur dann durch 4 teilbar, wenn sie durch 2 teilbar ist.	(8)

15. In der Umgangssprache wird manchmal die Aussagenverbindung „wenn A, dann B“ im Sinne „A genau dann, wenn B“ verwendet. Bei welchen Formulierungen könnte dies der Fall sein?

Lösung: Dies könnte bei allen der Fall sein, wenn auch die Umkehrung (als Kontraposition) als wahr angesehen wird.

Aussage (Implikation)	Umkehrung
a) Wenn morgen die Sonne scheint, gehe ich baden.	Wenn die Sonne nicht scheint, gehe ich nicht baden.
b) Wenn Peter 16 Jahre alt geworden ist, kann er einen Personalausweis beantragen.	Wenn Peter noch nicht 16 Jahre alt ist, kann er keinen Personalausweis beantragen.
c) Wenn Claudia das Abitur geschafft hat, dann möchte sie studieren.	Wenn Claudia das Abitur nicht geschafft hat, kann sie nicht studieren.

16. Geben Sie eine andere Formulierung der Aussagen an, bei der die Worte „und“, „oder“, „wenn, dann“, „es gibt“, „für alle“ verwendet werden.

a) Die Zahl 24 ist durch 6 und durch 8 aber nicht durch 7 teilbar.	Die Zahl 24 ist durch 6 und durch 8 und nicht durch 7 teilbar.
b) Obwohl 2 eine ganze Zahl ist, ist sie	2 ist eine ganze Zahl und 2 ist eine

auch eine gebrochene Zahl.	gebrochene Zahl.
c) Die Lösungen der Ungleichung $x^2 > 9$ sind teils größer als 3 teils kleiner als $-3$ .	Für alle Lösungen der Ungleichung $x^2 > 9$ gilt: $x$ ist entweder größer als drei oder kleiner als $-3$ .
d) Jedes Quadrat ist auch ein Rechteck.	Für alle Quadrate gilt, dass sie auch Rechtecke sind.
e) Die Gegenwinkel in einem Parallelogramm sind gleich groß.	Für je zwei Winkel in einem Parallelogramm gilt: Wenn sie Gegenwinkel sind, dann sind sie gleich groß.

17. Überlegen Sie, ob bei den folgenden Sätzen der zweite (bzw. die weiteren) die Umkehrung des ersten Satzes ist. Ist das nicht der Fall, formulieren Sie eine korrekte Umkehrung.

- a) 1) Wenn Peter die Meisterprüfung bestanden hat, bekommt er mehr Lohn.  
2) Peter bekommt mehr Lohn, wenn er die Meisterprüfung bestanden hat.  
**Lösung:** Es wurde nur die Satzteile vertauscht. Die korrekte Umkehrung müsste heißen:  
Wenn Peter mehr Lohn bekommt, hat er die Meisterprüfung bestanden.
- b) 1) Alle Handballspieler der Schule, die ein schlechtes Zeugnis bekommen, müssen aus der Mannschaft ausscheiden.  
2) Alle Schüler der Schule, die ein gutes Zeugnis bekommen, müssen in die Mannschaft eintreten.  
**Lösung:** Es wurde der Inhalt durch Negation der Handlungen geändert. Die korrekte Umkehrung müsste heißen: Alle Handballspieler der Schule, die aus der Mannschaft ausscheiden, haben ein schlechtes Zeugnis bekommen.
- c) 1) Sind zwei Winkel Stufenwinkel und sind die geschnittenen Geraden zueinander parallel, so sind die beiden Winkel kongruent.  
2) Sind zwei Winkel Stufenwinkel und sind die beiden Winkel kongruent, so sind die geschnittenen Geraden zueinander parallel.  
**Lösung:** Es ist eine mögliche Umkehrung.
- d) 1) Alle Zahlen, deren Quersumme durch 9 teilbar ist, sind durch 9 teilbar.  
2) Durch 9 teilbar sind alle Zahlen, deren Quersumme durch 9 teilbar ist.  
**Lösung:** Das ist nur eine Umstellung des Satzes. Die korrekte Umkehrung müsste heißen: Alle Zahlen, die durch 9 teilbar sind, haben eine durch 9 teilbare Quersumme.  
3) Wenn alle Zahlen durch 9 teilbar sind, so ist deren Quersumme auch durch 9 teilbar.  
**Lösung:** Unsinnige Aussage  
4) Alle Zahlen, deren Quersumme nicht durch 9 teilbar ist, sind nicht durch 9 teilbar.  
**Lösung:** richtig, es ist die Kontraposition der Umkehrung.
- e) 1) Wenn eine Gerade  $g$  durch den Mittelpunkt eines Kreises geht, so schneidet sie diesen Kreis in zwei Punkten.  
2) Wenn eine Gerade einen Kreis nicht in zwei Punkten schneidet, so geht sie nicht durch den Mittelpunkt des Kreises.  
**Lösung:** Das ist die Kontraposition des Satzes. Die korrekte Umkehrung müsste heißen:  
Wenn ein Kreis durch eine Gerade in zwei Punkten geschnitten wird, dann geht die Gerade durch den Mittelpunkt des Kreises.

18. Formulieren Sie folgende Äquivalenzen. Verwenden Sie:

- bei 1) bis 4) A: Die Zahl ist durch 3 teilbar. B: Die Zahl ist durch 5 teilbar.
- bei 5) und 6) A: Eine Zahl ist durch 4 teilbar. B: Eine Zahl ist durch 2 teilbar.
- bei 7)  $x$ : Primzahl  $H(x)$ :  $x$  ist ungerade.
- bei 8)  $x$ : reelle Zahl  $H(x)$ :  $x$  ist durch 0 teilbar.
- bei der Lösung die Formulierung: Die folgenden Aussagen sind logisch äquivalent zueinander.

Aufgabe	Die folgenden Aussagen sind logisch äquivalent zueinander:
1) $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$	Die Zahl ist nicht durch 3 und durch 5 teilbar. Die Zahl ist nicht durch 3 oder nicht durch 5 teilbar.
2) $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$	Die Zahl ist nicht durch 3 oder 5 teilbar. Die Zahl ist nicht durch 3 und nicht durch 5 teilbar.
3) $\neg(A \wedge B) \equiv A \rightarrow \neg B$	Die Zahl ist nicht durch 3 und durch 5 teilbar. Wenn die Zahl durch 3 teilbar ist, dann ist sie nicht durch 5 teilbar.
4) $A \vee B \equiv \neg A \rightarrow B$	Die Zahl ist durch 3 teilbar oder durch 5 teilbar. Wenn die Zahl nicht durch 3 teilbar ist, dann ist sie durch 5 teilbar
5) $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$	Wenn eine Zahl durch 4 teilbar ist, dann folgt daraus, dass sie auch durch 2 teilbar ist. Eine Zahl ist nicht durch 4 oder durch 2 teilbar.
6) $A \rightarrow B \equiv \neg B \rightarrow \neg A$	Wenn eine Zahl durch 4 teilbar ist, dann folgt daraus, dass sie durch 2 teilbar ist. Wenn eine Zahl nicht durch 2 teilbar ist, dann ist sie auch nicht durch 4 teilbar.
7) $\neg \forall x   H(x) \equiv \exists x   \neg H(x)$	Nicht für alle Primzahlen x gilt dass sie ungerade sind. Es gibt eine Primzahl x für die gilt, dass sie gerade ist.
8) $\neg \exists x   H(x) \equiv \forall x   \neg H(x)$	Es gibt keine reelle Zahl x, die durch 0 teilbar ist. Für alle reellen Zahlen x gilt, dass sie nicht durch 0 teilbar sind.

19. Welche der Aussagen B bis K sind logisch äquivalent zu A und welche sind wahr?

A: Peripheriewinkel über demselben Bogen eines Kreises sind gleich groß.

**Lösungen:**

A<sub>1</sub> ...  $\alpha$  und  $\beta$  sind Peripheriewinkel in demselben Kreis.

A<sub>2</sub> ...  $\alpha$  und  $\beta$  liegen über demselben Bogen eines Kreises.

A<sub>3</sub> ... Die Scheitel von  $\alpha$  und  $\beta$  liegen auf dem Kreis.

A<sub>4</sub> ...  $\alpha$  und  $\beta$  liegen über gleichlangen Bögen eines Kreises.

A<sub>5</sub> ...  $\alpha$  und  $\beta$  sind gleich groß.

Aussagen	Logische Struktur	wahr	Bezug zur Aussage A
A: Peripheriewinkel über demselben Bogen eines Kreises sind gleich groß.	$A_1 \wedge A_2 \rightarrow A_5$	ja	
B: Wenn $\alpha$ und $\beta$ Winkel über demselben Bogen eines Kreises sind und ihre Scheitel auf dem Kreis liegen, dann sind sie gleich groß.	$A_2 \wedge A_3 \rightarrow A_5$	ja	inhaltlich andere Formulierung des Satzes
C: Gleichgroße Peripheriewinkel eines Kreises liegen über demselben Bogen eines Kreises.	$A_1 \wedge A_5 \rightarrow A_2$	nein	eine Umkehrung von A
D: Wenn $\alpha$ und $\beta$ Winkel über demselben Bogen eines Kreises sind, dann sind sie gleich groß.	$A_2 \rightarrow A_5$	nein	Vernachlässigung einer Voraussetzung
E: Winkel sind dann gleich groß, wenn sie Peripheriewinkel über demselben Bogen eines Kreises sind.	$A_1 \wedge A_2 \rightarrow A_5$	ja	sprachliche Variante von A
F: Wenn $\alpha$ und $\beta$ Peripheriewinkel über	$A_2 \wedge A_4 \rightarrow A_5$	ja	Verallgemeine-

gleichlangen Bögen eines Kreises sind, dann sind es gleichgroße Winkel.			rung von A
G: Wenn zwei Winkel eines Kreises gleich groß sind, so sind es Peripheriewinkel über gleichlangen Bögen.	$A_5 \rightarrow A_2 \wedge A_4$	nein	eine Umkehrung von F
H: Wenn zwei Winkel eines Kreises nicht gleich groß sind, dann sind es nicht Peripheriewinkel über demselben Bogen eines Kreises.	$\neg A_5 \rightarrow \neg (A_1 \wedge A_2)$	ja	Kontraposition von A
I: Wenn $\alpha$ und $\beta$ gleich groß sind und über demselben Bogen liegen, dann sind es Peripheriewinkel eines Kreises, dem dieser Bogen angehört.	$A_5 \wedge A_1 \rightarrow A_2$	nein	eine Umkehrung von A
J: Wenn zwei Winkel nicht über demselben Bogen eines Kreises liegen und nicht Peripheriewinkel dieses Kreises sind, dann sind diese Winkel nicht gleich groß.	$\neg A_1 \wedge \neg A_2 \rightarrow \neg A_5$	nein	
K: Wenn zwei Winkel verschieden groß sind, dann sind es nicht Peripheriewinkel oder sie liegen nicht über demselben Bogen eines Kreises.	$\neg A_5 \rightarrow \neg A_1 \vee \neg A_2$	ja	Kontraposition von A

20. Welche der Aussagen B bis F sind äquivalent zu A?

	logische Struktur	Äquivalent zu A	wahr
A: Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt.	$A \rightarrow B$		
B: Wenn Geraden Mittelsenkrechten eines Dreiecks sind, dann schneiden sie einander in einem Punkt.	$A \rightarrow B$	ja	ja
C: Wenn Geraden nicht Mittelsenkrechten eines Dreiecks sind, dann schneiden sie einander nicht in einem Punkt.	$\neg A \rightarrow \neg B$	nein	nein
D: Wenn Geraden einander nicht in einem Punkt schneiden, dann sind es keine Mittelsenkrechten eines Dreiecks.	$\neg B \rightarrow \neg A$	ja	ja
E: Wenn Geraden einander in einem Punkt schneiden, dann sind sie Mittelsenkrechten eines Dreiecks.	$B \rightarrow A$	nein	nein
F: Wenn die Mittelsenkrechten eines n-Ecks sich in einem Punkt schneiden, dann ist das n-Eck ein Dreieck.		nein	nein