

Konzept zur Entwicklung räumlichen Vorstellungsvermögens

Vorbemerkungen

Die Vorschläge sind für schulinterne Lehrpläne an Sekundarschulen in Mecklenburg-Vorpommern gedacht. Sie sind als ein Ergebnis einer schuljahresbegleitenden Lehrerfortbildung im Schuljahr 2012/13 zur Entwicklung sicheren Wissens und Könnens im räumlichen Vorstellungsvermögen entstanden. Eine Grundlage der Fortbildung war die Broschüre „Sicheres Wissen und Können - Geometrie im Raum - Sekundarstufe I“¹, aus der auch die in dieser Konzeption genannten Aufgaben stammen.

In Auswertung wissenschaftlicher Untersuchungen zur Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens (RVV) und mit Blick auf die üblichen Inhalte und vorkommenden Aufgabentypen im Mathematikunterricht wird dem Konzept der Entwicklung des RVV folgendes System von Komponenten zu Grunde gelegt:

K 1: Lesen und Anfertigen von räumlichen Darstellungen

K 2: Lesen und Herstellen von Ansichten

K 3: Arbeit mit Körpernetzen und Papierfaltungen

K 4: Zusammensetzen und Zerlegen von Körpern

K 5: Erkennen und Herstellen von Rotationen

K 6: Räumliche Orientierung

Unter sicherem Wissen und Können werden folgende Anforderungen verstanden.

K1: Lesen und Herstellen von räumlichen Darstellungen

Die Schüler können sicher

- sich den durch eine räumliche Darstellung gegebenen Körper vorstellen,
- die Blickrichtung identifizieren und durch entsprechendes Nachzeichnen von Kanten realisieren,
- sich die wahre Form der verzerrt dargestellten Seitenflächen vorstellen,
- erkennen, welche Kanten des Körpers (wahrscheinlich) gleich lang und welche Flächen (wahrscheinlich) deckungsgleich sind,
- Würfel, Quader und Würfelbauten mit geeigneten Kantenlängen auf Kästchenpapier räumlich darstellen

¹ Die Broschüre ist online unter www.mathe-mv.de verfügbar.

- sich räumliche Darstellungen zu gegebenen Ansichten (Grundrissen und Zweitafelbildern) vorstellen um sie zu zeichnen oder zu skizzieren².

K2: Lesen und Herstellen von Ansichten

Die Schüler können sicher

- zu einer gegebenen räumlichen Darstellung eines Körpers seine Ansicht von oben, von vorn oder von einer Seite identifizieren, vervollständigen, skizzieren oder zeichnen,
- Ansichten von zwei zusammengesetzten Quadern skizzieren,
- eine zweite Ansicht zu einer gegebenen Ansicht eines elementaren Körpers skizzieren.

K3: Arbeiten mit Körpernetzen und Faltungen

Die Schüler können sicher

- einfache Würfelnetze identifizieren, vervollständigen oder zeichnen
- gegenüberliegende Flächen in Würfel- und Quadernetzen identifizieren,
- Netze als Körpernetze identifizieren (nur Quader, Pyramiden, Kegel, dreiseitige Prismen),
- die Form eines einmal gefalteten und dann höchstens dreimal ausgeschnittenen Papierbogens nach dem Auseinanderfalten skizzieren.

K4: Zerlegen und Zusammensetzen von Körpern

Die Schüler können sicher

- einfache Würfelbauten in der Vorstellung zu Quadern vervollständigen,
- zwei zusammengehörende Teile eines Würfels oder Quaders erkennen,
- gefärbte Würfel oder Quader in Gedanken in Teilwürfel zerlegen und die Anzahl bestimmter Arten von Teilwürfel bestimmen.

K5: Erkennen und Herstellen von Rotationen

Die Schüler können sicher

- eine Drehung eines Würfels um eine Achse identifizieren und realisieren,
- einen Würfel zweimal kippen und die oben liegende Augenzahl bestimmen,
- verschiedene, durch eine Rotation entstandene Lagen eines Körper, der aus zwei elementaren Körpern zusammengesetzt ist, identifizieren und realisieren.

K6: Räumliche Orientierung

Die Schüler können sicher

² Dazu müssen allerdings sichere Fähigkeiten im Lesen von Ansichten vorhanden sein, zu denen die Aufgaben erst im nächsten Abschnitt der Aufgabensammlung enthalten sind.

- die rechte und linke Seite von bis zu zwei kreuzenden Straße identifizieren,
- sich zu einer gegebenen Draufsicht oder Vorderansicht von bis zu drei elementaren Körpern die jeweils andere Ansicht vorstellen und skizzieren,
- Zuordnungen bestimmen zwischen der Darstellung eines Objektes, eines Geländes oder eines Raumes auf einer Zeichnung oder Fotografie auch einer Sicht von oben und einer Sicht von vorn.

Die Vorschläge zur Konzeption der Entwicklungsprozesse für die einzelnen Komponenten beruhen auf folgenden Überlegungen.

- Die Komponenten 1-4 können mit entsprechenden Inhalten der Rahmenpläne verbunden werden. Für die Komponenten 5 und 6, die wesentlich für die Entwicklung des RVV sind, gibt es keine entsprechenden Inhalte oder Aussagen in den aktuellen Rahmenplänen. Sie müssen deshalb zusätzlich in den schulinternen Lehrplan aufgenommen werden.
- In jeder Jahrgangsstufe sollte für eine oder zwei Komponenten eine Unterrichtseinheit (UE) zur zielgerichteten Ausbildung dieser Komponente unter Einsatz gegenständlicher Mittel oder geeigneter Software konzipiert werden. Eine solche Unterrichtseinheit sollte mindestens einer Doppelstunde umfassen.
- Neben einer expliziten Behandlung im Unterricht ist ein langfristig geplantes Konzept für tägliche Übungen erforderlich, in der alle Komponenten in sinnvoller Weise systematisch gefestigt werden. Dabei sollten stets Möglichkeiten zur Differenzierung vorhanden sein.
- Da in der Klasse 9 kein Thema zur räumlichen Geometrie in den Rahmenplänen enthalten ist, sollte die Entwicklung des RVV, die auch in dieser Jahrgangsstufe kontinuierlich fortgesetzt werden muss, nur im Rahmen der täglichen Übungen erfolgen, mit Ausnahme von Aufgaben zu Faltungen (s. unten K3).
- Die Aufgaben aus der Broschüre sollten vorrangig in täglichen Übungen eingesetzt werden. Es wurden in den Vorschlägen alle Aufgaben berücksichtigt.

Die Komponenten sollten in folgender Weise in den Unterricht integriert werden:

- K 1:** In der Klasse 5 wird im Zusammenhang mit der Einführung eines Verfahrens zum Zeichnen von Schrägbildern auf Kästchenpapier die Bezeichnung „Räumliche Darstellung“ eingeführt. Diese wird dann in Klasse 6 durch die Unterscheidung von Blickrichtungen gefestigt. In Klasse 7 werden Schrägbilder auf weißem Papier gezeichnet und Betrachtungen zur wahren Länge und Gestalt von Strecken und Flächen angestellt. In den Klassen 8-10 erfolgt eine kontinuierliche Festigung auch im Zusammenhang mit Schrägbildern der dann behandelten Körper.
- K 2:** Die Einführung in das Betrachten von Ansichten erfolgt in Klasse 7 und wird dann in den folgenden Klassen auch im Zusammenhang mit Zweitafelbildern der dann behandelten Körper kontinuierlich gefestigt.
- K 3:** Körpernetze sind aus der Grundschule bekannt und sollten auch unter Einsatz gegenständlicher Handlungen in Klasse 5 wiederholt und gefestigt werden. In den weiteren Klassenstufen sollte eine kontinuierliche Festigung im Rahmen Täglicher Übungen oder bei der Behandlung der Körper erfolgen. Spätestens in Klasse 9 sollten Aufgaben zum Falten von Papier hinzukommen.
- K 4:** Die Schüler kennen aus der Grundschule das Herstellen und Ergänzen von Würfelbauten. In der Klasse 5 sollte ebenfalls unter Einsatz von gegenständlichen Handlungen daran angeknüpft werden. In den weiteren Klassen sollten im Rahmen Täglicher Übungen eine kontinuierliche Festigung erfolgen. In Klasse 10 erfolgt im Zusammenhang mit der Behandlung von zusammengesetzten Körpern eine weitere Festigung.

- K 5:** Aufgaben zum Erkennen und Herstellen von Rotationen sollten schwerpunktmäßig in Klasse 8 behandelt werden. Für diese anspruchsvollen Aufgaben sind die Verwendung gegenständlicher Veranschaulichungen und auch geeigneter Software erforderlich. Ein Schwerpunkt der Festigung dieser Komponente sollte dann in den Täglichen Übungen in der Klasse 9 erfolgen.
- K 6:** Aufgaben zur räumlichen Orientierung sollten bereits in Klasse 5 behandelt werden, insbesondere zur Rechts-Links-Beziehung. In der Klassenstufe 6 sollte eine entsprechende Unterrichtseinheit zur räumlichen Orientierung geplant werden. Ein Schwerpunkt der Festigung dieser Komponente sollte in den Täglichen Übungen in der Klasse 9 liegen.

Vorschläge für die Jahrgangsstufen

Klasse 5/6

Rahmenplan für die Jahrgangsstufen 5 und 6 an der Regionalen Schule sowie an der Integrierten Gesamtschule, 2010

Eingangsvoraussetzungen Kl. 4: (nur RVV)

- Beziehungen erkennen, beschreiben und nutzen räumliche Anordnungen, Wege, Pläne, Ansichten
- setzen zwei und dreidimensionale Darstellungen von Bauwerken (z. B. Würfelgebäuden) zueinander in Beziehung
- können nach Vorlage bauen, zu Bauten Baupläne erstellen und Kantenmodelle und Netze untersuchen
- stellen (bauen, legen, zerlegen, zusammenfügen, ausschneiden, falten ...) Modelle von Körpern und ebenen Figuren her und untersuchen diese

Curriculare Standards am Ende der Jahrgangsstufe 6 (nur RVV)

- skizzieren Schrägbilder, entwerfen Netze von Würfeln und Quadern und stellen die Körper her
- benennen und charakterisieren ebene Figuren sowie Körper (Vierecke, Dreiecke, Kreise, Quader, Würfel) und identifizieren sie in ihrer Umwelt

Themenbereiche Kl. 5/6: (alles zur räumlichen Geometrie)

Quader, Würfel, Pyramide

- Ecken, Kanten und Flächen
- Körpernetze und Schrägbilder
- Oberflächeninhalt und Volumen von Quadern, Spezialfall Würfel, Formeln

Vorschläge für schulinternen Lehrplan (nur RVV):

Klasse, Thema	Ziele und Inhalte des Unterrichts	Komp.	Aufgaben aus Broschüre (S./Nr.)	Bemerkungen
Kl. 5 Spiegelung	<ul style="list-style-type: none"> • Skizzieren der Ansicht eines flachen Gegenstandes (Fenster, Tür, Regal, Tor) von der anderen Seite • Wiederholung der Rechts-Links-Beziehung 	K 6	Zeichnen von Objekten auf Folie, Betrachten von der anderen Seite	Einführung der Betrachtungsweise
		K 6		
Kl. 5, Geometrie im Raum	<ul style="list-style-type: none"> • Wiederholen „Netz eines Quaders bzw. Würfels“ • Zuordnen, Vervollständigen bzw. Zeichnen von Netzen 	K 3		<ul style="list-style-type: none"> – Wiederholung Grundschule – Herstellen von Netzen zur Differenzierung
	<ul style="list-style-type: none"> • Einführen von „Schrägbild“ als Schattenbild • Einführen eines Verfahrens zum Zeichnen von Schrägbildern auf Kästchenpapier • Vervollständigen und Anfertigen von Schrägbildern 	K 1		– verwenden von „Räumliche Darstellung“
	<ul style="list-style-type: none"> • Ermitteln des Volumens von Würfelbauten • Ergänzen von Würfelbauten • Zerlegen von Würfeln und Quadern 	K 4		<ul style="list-style-type: none"> – Wiederholung Grundschule – Verwenden von Holzwürfeln
Kl. 5, Tü	<ul style="list-style-type: none"> • Aufgaben zur Rechts-Links-Beziehung • Arbeit mit Netzen • Schrägbilder auf Gitterpapier • Zerlegen von Würfeln und Quadern 	K 6	73/1	–
		K 3	64/1, 2; 65/4, 5	
		K 1	53/7; 54/9	
		K 4	68/1; 69/4, 5	
Kl. 6, Geometrie im Raum	<ul style="list-style-type: none"> • Wiederholung der Schrägbilddarstellung von Quadern • Schrägbilder von Pyramiden • Erkennen räumlicher Darstellungen • Vervollständigen und Anfertigen von Schrägbildern • Identifizieren und Realisieren von „Blickrichtungen“ • UE zur räumlichen Orientierung 	K 1		– Verwenden von Kantenmodellen
		K 6		– Verwenden von Körpermodellen
Kl. 6, Tü	• Arbeit mit Schrägbildern	K 1	51/1, 2; 52/3; 54/8	–
	• Arbeit mit Netzen	K 3	64/3	–
	• Zerlegen von Würfeln und Quader	K 4	69/6, 7	–
	• Aufgaben zur räumlichen Orientierung	K 6	73/2, 74/4	–

Klasse 7

Rahmenplan Mathematik für die Jahrgangsstufen 7 bis 10 des nichtgymnasialen Bildungsgangs, 2011

5.2.5 Körperdarstellungen (L3)

Die Schülerinnen und Schüler

- stellen von ebenflächig begrenzten Körpern in senkrechter Zweitafelprojektion und als Schrägbilder dar,
- zeichnen und identifizieren Körpernetze,
- *untersuchen die wahre Größe und Gestalt geometrischer Figuren.*

Rahmenplan Gymnasium, Integrierte Gesamtschule, Jahrgangsstufen 7 – 10, 2002

6.2.5 Körperdarstellung

Ziele:

Die Schüler wiederholen, festigen und vertiefen ihr Wissen und Können beim Darstellen geometrischer Körper, insbesondere Quader, Pyramide und daraus zusammengesetzter Körper, und im Erkennen dieser geometrischen Körper aus ihren Darstellungen.

Sie entwickeln ihr räumliches Anschauungsvermögen weiter.

Verbindliche Inhalte	Hinweise
Darstellen von ebenflächig begrenzten Körpern <ul style="list-style-type: none">– senkrechte Zweitafelprojektion– Schrägbilder– Kavalierperspektive	<ul style="list-style-type: none">– Betrachtungen zur wahren Größe und Gestalt von geometrischen Figuren– Körpernetze

Vorschläge für schulinternen Lehrplan Kl. 7 (alle Bildungsgänge, nur RVV)

Thema	Ziele und Inhalte des Unterrichts	Komp.	Bemerkungen
Reaktivierung	• Wiederholung der Darstellung von Schrägbildern im Gitterraster	K 1	
	• Wiederholung der Arbeit mit Netzen	K 3	
Schräge Parallelprojektion	• Einführen von Breiten-, Tiefen- und Höhenlinien sowie Ansichten eines Körpers	K 2	–
	• Schrittfolge zum Zeichnen bzw. Skizzieren von Schrägbildern auf weißem Papier	K 1	–
	• Zeichnen von Schrägbildern	K 1	–
Zweitafelprojektion	• Einführen von Grundriss eines Körpers	K 2	–

Thema	Ziele und Inhalte des Unterrichts	Komp.	Bemerkungen
	• Identifizieren und Zeichnen von Grundrissen	K 2	–
	• Identifizieren von Rissen	K 2	–
	• Zeichnen von Zweitafelbildern von Quadern	K 2	
	• Konstruktion der wahren Länge von Strecken	K 1	

Thema	Komp.	Aufgaben aus Broschüre (S./Nr.)	Bemerkungen
TÜ	K 1	52/5; 53/6; 54/10	–
	K 2	58/1; 59/3,4 ; 60/5; 61/7; 62/10 63/12;	–
	K 3	66/8, 9	–

In den TÜ sollten alle in den vorherigen Schuljahren betrachteten Komponenten eine Rolle spielen.

Klasse 8

Rahmenplan Mathematik für die Jahrgangsstufen 7 bis 10 des nichtgymnasialen Bildungsgangs, 2011

5.3.5 Körperberechnung

Die Schülerinnen und Schüler

- berechnen das Volumen und den Oberflächeninhalt von Prismen und Zylindern und stellen diese Körper dar,
- führen Berechnungen an einfachen zusammengesetzten Körpern aus.

Rahmenplan Gymnasium, Integrierte Gesamtschule, Jahrgangsstufen 7 – 10, 2002

6.3.5 Körperberechnung

Ziele:

Die Schüler verstehen die Formeln zur Berechnung des Volumens und des Oberflächeninhaltes der betrachteten Körper und können sie beim Lösen von Sachaufgaben sicher anwenden. Dabei wiederholen und festigen sie grundlegendes geometrisches Wissen und Können.

Verbindliche Inhalte	Hinweise
Prismen und Zylinder - Prisma, Zylinder, gerade und schief - Darstellen der Körper - Satz des Cavalieri	

- Berechnen des Volumens und des Oberflächeninhaltes der Körper - Berechnungen an einfachen zusammengesetzten Körpern	
--	--

Vorschläge für schulinternen Lehrplan Kl. 8 (alle Bildungsgänge, nur RVV)

Thema	Ziele und Inhalte des Unterrichts	Komp.	Bemerkungen
Reaktivierung	• Wiederholung der Darstellung von Schrägbildern und Zweitafelbildern	K 1	
	• Wiederholung der Arbeit mit Netzen	K 3	
Begriff und Darstellung von Prismen und Zylindern	• Schrägbilder liegender Prismen und Zylinder	K 1	–
	• Vervollständigen bzw. Zeichnen einfacher Zweitafelbilder von Prismen und Zylindern	K 2	–
Gemischte Übungen	• Einführung zum Erkennen und Herstellen von Rotationen	K 5	– Verwenden realer Objekte (Spielwürfel) und Software

Thema	Komp.	Aufgaben zum SWK (S./Nr.)	Bemerkungen
TÜ	K 1	54/11; 55/13	–
	K 2	62/9	–
	K 3	65/6; 66/7, 10	–
	K 4		–
	K 5	70/1, 3; 71/5, 6	–

In den TÜ sollten alle in den vorherigen Schuljahren betrachteten Komponenten eine Rolle spielen.

Klasse 9

Rahmenplan Mathematik für die Jahrgangsstufen 7 bis 10 des nichtgymnasialen Bildungsgangs, 2011

keine Aussagen

Rahmenplan Gymnasium, Integrierte Gesamtschule, Jahrgangsstufen 7 – 10, 2002

keine Aussagen

Vorschläge für schulinternen Lehrplan Kl. 9 (alle Bildungsgänge, nur RVV)

Thema	Komp.	Aufgaben zum SWK (S./Nr.)	Bemerkungen
TÜ	K 1	52/4; 55/12; 56/14, 15	–
	K 2	58/2; 61/6 (neue Aufgabe)	–
	K 3	Faltungen: 67/11, 12, 13	– gegenständliche Handlungen erforderlich
	K 4		–
	K 5	71/4; 72/7-11	–
	K 6	75/5-7; 76/8; 77/9, 10; 78/11	–

Klasse 10

Rahmenplan Mathematik für die Jahrgangsstufen 7 bis 10 des nichtgymnasialen Bildungsgangs, 2011

5.5.5 Körperberechnungen (L2, L3)

Die Schülerinnen und Schüler

- operieren gedanklich mit Strecken, Flächen und Körpern,
- stellen ebene geometrische Figuren im kartesischen Koordinatensystem dar,
- stellen Körper (z. B. als Netz, Schrägbild oder Modell) dar und erkennen Körper aus ihren entsprechenden Darstellungen,
- analysieren und klassifizieren geometrische Objekte der Ebene und des Raumes,
- beschreiben und begründen Eigenschaften und Beziehungen geometrischer Objekte (wie Symmetrie, Kongruenz, Ähnlichkeit, Lagebeziehungen) und nutzen diese im Rahmen des Problemlösens zur Analyse von Sachzusammenhängen,
- berechnen Volumen und Oberflächeninhalt von Zylinder, Kegel und Kugel sowie von daraus zusammengesetzten Körpern.

Rahmenplan Gymnasium, Integrierte Gesamtschule, Jahrgangsstufen 7 – 10, 2002

6.5.3 Körperberechnung

Ziele:

Die Schüler kennen die Formeln zur Volumen- und Oberflächenberechnung von Pyramiden, Kreiskegeln, Kugeln, Pyramiden- und Kegelstümpfen und können sie sicher anwenden. Sie entwickeln ihr räumliches Vorstellungsvermögen weiter.

Verbindliche Inhalte	Hinweise
Pyramide und Kreiskegel	- Tetraeder
- Volumen und Oberflächeninhalt	<i>Zusatz:</i> reguläre Polyeder
Kugel: Volumen und Oberflächeninhalt	

Pyramidenstumpf und Kegelstumpf - Volumen und Oberflächeninhalt	- parallele Grund- und Deckfläche <i>Zusatz:</i> ähnliche Körper
Lösen von Sachaufgaben	- zusammengesetzte Körper

Vorschläge für schulinternen Lehrplan Kl. 10 (alle Bildungsgänge, nur RVV)

Thema	Ziele und Inhalte des Unterrichts	Komp.	Bemerkungen
Reaktivierung	<ul style="list-style-type: none"> • Erkennen von Prismen und Zylindern aus Schräg- und Zweitafelbildern • Schrägbildern und Zweitafelbildern von Prismen und Zylindern • Arbeit mit Netzen 	K 1 K 2 K 3	
Begriff und Darstellung von Pyramiden und Kegeln	• Zeichnen von Netzen, Schräg- und Zweitafelbildern von Pyramiden	K 1 – 3	–
	• Zeichnen von Netzen, Schräg- und Zweitafelbildern von Kegeln	K 1 – 3	–
Zerlegen und Ergänzen von Körpern	• Zerlegen und Ergänzen von Körpern ohne Berechnungen	K 4	–
	• Zeichnen von Schrägbildern zusammengesetzter Körper	K 4	–
	• Pyramiden- und Kegelstümpfe	K 4	–

Thema	Komp.	Aufgaben zum SWK (S./Nr.)	Bemerkungen
TÜ	K 1	57/16, 17	–
	K 2	58/2; 62/8; 63/11	–
	K 4	68/2, 3	–

In den TÜ sollten alle in den vorherigen Schuljahren betrachteten Komponenten eine Rolle spielen.