Hans-Dieter Sill, Universität Rostock

1 Ziele und Inhalte zur räumlichen Geometrie

1.1 Bestandteile des Wissens und Könnens in der räumlichen Geometrie und Grundlagen ihrer Entwicklung

Zum *Wissen und Können in der räumlichen Geometrie* zählen wir

- Kenntnisse zu den Begriffen Würfel, Quader, Prisma, Zylinder, Pyramide, Kegel, Kugel
- Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten zum Zeichnen und Skizzieren von Schrägbildern, Grundrissen, Zweitafelbildern sowie Netzen von Körpern
- Kenntnisse zur Berechnung des Oberflächen- und Rauminhalts von Körpern
- Fähigkeiten zur Raumwahrnehmung und Raumvorstellung

Gemeinsamer Bestandteil dieser Könnensbereiche sind Fertigkeiten im Umgang mit Zeichengeräten sowie Gewohnheiten zum sauberen und exakten Arbeiten.

Bei der *Aneignung von Kenntnissen* sollten folgende Aspekte beachtet werden:

Kenntnisse werden durch Sprache vermittelt und durch Sprache zum Ausdruck gebracht. Zentraler Bestandteil der Sprache sind Wörter. Wörter haben bestimmte Bedeutungen. Verschiedene Wörter können die gleiche Bedeutung haben (Synonyme), z. B. Volumen und Rauminhalt. Die meisten Wörter haben mehrere Bedeutungen (Polysemie). Die verschiedenen Bedeutungen haben oft gemeinsame Bestandteile. So bezeichnet das Wort Würfel sowohl einen bestimmten mathematischen Körper als auch einen Gegenstand, der bei Glücksspielen verwendet werden kann. Beiden Objekten ist gemeinsam, dass sie die gleiche Anzahl von Symmetrieachsen und Symmetrieebenen haben.

Zur Beschreibung der Speicherung von Kenntnissen im Gedächtnis kann das Modell eines semantischen Netzes verwendet werden, das aus Knoten (Sinneinheiten) und Kanten (Wegstrecken bei Gedächtnisleistungen) besteht. Die Aneignung neuer Kenntnisse bedeutet dann ihre Integration in vorhandene Netze; es werden neue Sinneinheiten sowie Kanten zu vorhandenen Sinneinheiten ausgebildet.

Unter einem Begriff kann man eine festgelegte Bedeutung eines Wortes verstehen. Die Festlegung kann explizit z. B. durch eine Definition im Rahmen einer Wissenschaft oder implizit durch die Art der Verwendung des Wortes in Kontexten erfolgen.

Bei der Aneignung eines Begriffes im Mathematikunterricht geht es um die Aneignung von bestimmten Kenntnissen, d. h. um die weitere Ausbildung des semantischen Netzes der Schüler. Dabei können neue Wörter als neue Sinneinheiten angeeignet, vorhandene Wörter mit neuen Bedeutungen belegt oder weitere Verbindungen zwischen Sinneinheiten ausgebildet werden. Die Aneignung von Begriffen kann sich deshalb über einen längeren Zeitraum der schrittweisen Ausbildung der betreffenden Teile des semantischen Netzes erstrecken. Bei der Aneignung wird der Begriff oft durch einen Prototyp repräsentiert. Dies ist ein typisches Beispiel, das für den Begriff steht und beim Nennen des Wortes zuerst reaktiviert wird.

Im Prozess der Aneignung von Begriffen im Mathematikunterricht sowie bei der Überprüfung seiner Ergebnisse können zwei Grundhandlungen unterschieden werden:

- Ein vorgegebenes Objekt wird durch den Schüler oder Lehrer mit dem betreffenden Wort bezeichnet bzw. als nicht zutreffend erkannt (Begriffsidentifizierung).
- Zu dem betreffenden Wort stellt sich der Schüler einen Repräsentanten des Begriffs vor bzw. gibt ihn schriftlich, durch eine Zeichnung oder die Herstellung eines Modells an (Begriffsrealisierung).

Es kann sich in beiden Fällen um inner- als auch um außermathematische Objekte handeln.

Ein Grundproblem der Aneignung von allen Begriffen im Mathematikunterricht ist die Berücksichtigung des Wechselverhältnisses von formalen und inhaltlichen Bedeutungen. So bezeichnet der Begriff Würfel sowohl eine bestimmter Körper in der Mathematik als auch eine bestimmte Form von realen Körpern. Eine Vermittlung zwischen den konkreten Objekten und den abstrakten Begriffen erfolgt mit Hilfe materieller Modelle der Begriffe, die als Unterrichtsmittel verwendet werden. Ein Körpermodell ist einerseits ein konkretes Objekt und andererseits eine Abstraktion der Form von Objekten, die in der Praxis vorkommen.

Es sollten drei Stufen der Entwicklung der Körperbegriffe konzipiert werden, die sich in der Dominanz der Seiten des Grundverhältnisses unterscheiden.

Auf der *ersten Stufe* (Kl. 1 – 4/5) dominiert das reale Objekt. Es werden die Form der Objekte mit Hilfe einiger Merkmale beschrieben, Modelle gezeigt und die Bezeichnungen Würfel, Quader, Zylinder, Kegel, Pyramide und Kugel für typische Repräsentanten eingeführt.

In der *zweiten Stufe* (Kl. 5/6 – 8, z. T. 9) werden die Merkmale der einzelnen Körper systematisch untersucht, die bisherigen Vorstellungen zu typischen Repräsentanten verallgemeinert, Begriffsbeziehungen hergestellt, Volumen und Oberflächenberechnungen durchgeführt und Darstellungen der Körper mir verschiedenen Verfahren vorgenommen. Es dominiert in dieser Stufe der abstrakte Begriff, auch wenn bei allen Körpern bei der Einführung und insbesondere der Festigung des Stoffes Bezüge zu realen Objekten hergestellt werden.

In der *dritten Stufe* (Kl. 9 – 10, z. T. ab Kl. 8) dominiert erneut das reale Objekt. Es wird mit Hilfe der elementaren Körperbegriffe die Form realer Objekte beschrieben. Dabei können die Objekte aus elementaren Körpern zusammengesetzt sein, aus elementaren Körpern durch Entfernen von elementaren Körpern entstanden sein (z.B. Körperstümpfe) oder in ihrer Form näherungsweise elementaren Körpern oder Zusammensetzungen aus ihnen entsprechen.

1.2 Aussagen der Bildungsstandards und Rahmenpläne über Ziele und Inhalte zur räumlichen Geometrie

Bildungsstandards für den Primarbereich, 2004

Sich im Raum orientieren

- über räumliches Vorstellungsvermögen verfügen
- räumliche Beziehungen erkennen, beschreiben und nutzen
- zwei- und dreidimensionale Darstellungen von Bauwerken (z.B. Würfelgebäuden) zueinander in Beziehung setzen (nach Vorlage bauen, zu Bauten Baupläne erstellen, Kantenmodelle und Netze untersuchen)

Geometrische Figuren erkennen, benennen und darstellen

- Körper nach Eigenschaften sortieren und Fachbegriffe zuordnen
- Körper in der Umwelt wieder erkennen
- Modelle von Körpern herstellen und untersuchen (Bauen, Legen, Zerlegen, Zusammenfügen, Ausschneiden, Falten...)
- Zeichnungen mit Hilfsmitteln sowie Freihandzeichnungen anfertigen

Flächen- und Rauminhalte vergleichen und messen

- Umfang und Flächeninhalt von ebenen Figuren untersuchen
- Rauminhalte vergleichen und durch die enthaltene Anzahl von Einheitswürfeln bestimmen

Gemeinsamer Rahmenlehrplan für die Grundschule der Länder Berlin, Brandenburg, Bremen und Mecklenburg-Vorpommern, 2004

Anforderungen:

- sich im Raum orientieren und dies beschreiben
- sich nach Plänen und Beschreibungen orientieren
- Lagebeziehungen in der Ebene und im Raum erkennen, beschreiben, realisieren und verändern
- räumliche oder ebene Veränderungsprozesse ausführen und beschreiben
- Objekte aus der Umwelt beschreiben, nach ihren mathematischen Eigenschaften ordnen
- ausgewählte Körper benennen und darstellen, skizzieren, zeichnen, (zer)legen, zusammensetzen, messen, formen, falten und schneiden
- Beziehungen zwischen Körpern und ebenen Figuren beschreiben
- Lagebeziehungen im Raum erkennen, beschreiben, realisieren und verändern
- Körper bezüglich ihrer Abmessungen direkt und indirekt vergleichen

Inhalte:

kursiv: fakultative Inhalte, über Auswahl entscheidet Fachkonferenz

- links - rechts, unter - über, auf, vor - hinter, neben, innen - außen, zwischen, oben - unten
- Orientierungsübungen, Wegbeschreibungen, Karten, Stadtpläne, Lageskizzen
- *Körperschemata*, *Wahrnehmungsspiele*,
- Veränderung der Lage von Körpern vom Betrachtenden aus und von anderen Standpunkten aus
- *Objekte aus der Umwelt, mathematische Objekte*
- Kugel, Würfel, Quader, Pyramide, Kegel, Zylinder,
- Ecke, Kante, Seitenfläche, gegenüberliegende Seitenfläche
- Darstellungen von Körpern aus verschiedenen Materialien und von ebenen Figuren auf unterschiedliche Art und Weise
- Würfelbauten, Ergänzungen zu Würfelbauten, Würfelbauten nach Bauplänen und Schrägbildern,
- Freihandzeichnungen von Würfeln und Quadern
- Würfelnetze, *Netze anderer Körper, Faltfiguren*
- Einheitswürfel

Bildungsstandards für den Mittleren Schulabschluss und den Hauptschulabschluss zur Geometrie, 2003

Kursiv: nur Standard für den mittleren Abschluss

Leitidee Messen
Die Schülerinnen und Schüler

- berechnen Volumen und Oberflächeninhalt von Prisma, Pyramide, Zylinder, *Kegel und Kugel* sowie daraus zusammengesetzten Körpern,
- nehmen in ihrer Umwelt gezielt Messungen vor, entnehmen Maßangaben aus Quellenmaterial, führen damit Berechnungen durch und bewerten die Ergebnisse sowie den gewählten Weg in Bezug auf die Sachsituation.

Leitidee Raum und Form
Die Schülerinnen und Schüler

- erkennen und beschreiben geometrische Strukturen in der Umwelt,
- operieren gedanklich mit Strecken, Flächen und Körpern,
- stellen Körper (z. B. als Netz, Schrägbild oder Modell) dar und erkennen Körper aus ihren entsprechenden Darstellungen,
- *analysieren und klassifizieren geometrische Objekte der Ebene und des Raumes,*

– zeichnen und konstruieren geometrische Figuren unter Verwendung angemessener Hilfsmittel wie Zirkel, Lineal, Geodreieck oder dynamischer Geometriesoftware,

2 Sicheres Wissen und Können zu Körpern

2.1 Allgemeine Begriffe, Merkmale und Eigenschaften

Figur:

1. Bedeutungen des Wortes in der Mathematik und im Mathematikunterricht

Eine Figur ist eine Menge von Punkten und damit Oberbegriff für alle geometrischen Objekte, wie Punkte, Geraden, Ebenen, Winkel, Dreiecke usw. Es gibt ebene und räumliche Figuren. Zu den räumlichen Figuren gehören die geometrischen Körper.

Im Mathematikunterricht werden als Figuren meist die ebene Figuren Dreiecke, Vierecke, Vielecke, Kreise und daraus zusammengesetzte Figuren bezeichnet, ohne dass der Zusatz eben verwendet wird. Punkte, Strecken, Geraden, Strahlen und Winkel werden in der Regel nicht als Figuren bezeichnet. Geometrische Körper werden ebenfalls in der Regel nicht als räumliche Figuren bezeichnet, so dass die Wörter Figur und Körper im alltäglichen Gebrauch im Mathematikunterricht Nebenbegriffe sind. Auch in den aktuellen Planungsdokumenten wie Bildungsstandards und Rahmenplänen wird stets die Wortkombination „Körper und ebenen Figuren“ verwendet.

2. Weitere Bedeutungen, die Gemeinsamkeiten mit dem mathematischen Begriff haben[1]

(1) Körperform eines Menschen im Hinblick auf ihre Proportioniertheit (schöne Figur)

(2) Künstlerische Darstellung eines Lebewesens (Figur aus Porzellan)

(3) Spielstein bei Brettspielen (Schachfiguren)

(4) Abbildung in einem Text (Figur 1)

(5) ein in sich abgeschlossener Bewegungsablauf beim Tanz, Eiskunstlauf, usw.

In den ersten drei Bedeutungen steht Figur zwar für ein räumliches Objekt, die Objekte sind aber vor allem Menschen oder Tiere und nicht unbelebte Gegenstände wie Würfel oder Kugeln. Die Bedeutung (4) entspricht in hohem Maße den Vorstellungen von ebenen Figuren in der Mathematik. In der Bedeutung (5) ist der dynamische Aspekt der Entstehung von ebenen Figuren enthalten.

Körper:

1. Bedeutungen des Wortes in der Mathematik und im Mathematikunterricht

(1) Ein Körper bezeichnet in der Algebra eine bestimmte Struktur, bei der in einer Menge zwei Operationen mit gewissen Eigenschaften erklärt sind. So ist etwa die Menge der rationalen Zahlen mit der Addition und Multiplikation ein algebraischer Körper.

(2) In der Geometrie bezeichnet das Wort Körper eine beschränkte dreidimensionale Punktmenge, die allseitig von endlich vielen ebenen oder gekrümmten Flächenstücken begrenzt wird. Die begrenzenden Flächenstücke gehören zum Körper.

(3) Im Mathematikunterricht werden als Körper auch bestimmte Unterrichtsmittel bezeichnet, die zur Veranschaulichung geometrischer Körper dienen und auch Körpermodelle heißen. Es gibt Vollkörper, Kantenmodelle oder Flächenmodelle.

Im Folgenden soll die Bedeutung (1) nicht mehr betrachtet werden.

---

[1] Als eine Quelle für die Bedeutungen der Wörter wurde verwendet: DUDEN : Deutsches Universalwörterbuch, 5. Aufl., Mannheim : Brockhaus, 2003 sowie die Internetenzyplopädie Wikipedia http://de.wikipedia.org/wiki/Hauptseite

2. Weitere Bedeutungen, die Gemeinsamkeiten mit dem mathematischen Begriff haben

(1) Gestalt, äußere Erscheinung, Organismus eines Menschen oder Tieres (der menschliche Körper)

(2) Rumpf als Teil eines menschlichen oder tierischen Körpers (Körpertreffer beim Boxen)

(3) Gegenstände, die ein bestimmtes Volumen, eine bestimmte Masse sowie einen bestimmten Aggregatzustand haben und aus bestimmten Stoffen bestehen (physikalischer Körperbegriff)

Der biologische Körperbegriff (1) und der physikalische Körperbegriff (3) haben mit dem mathematischen Begriff die Existenz einer Oberfläche und eines Volumens gemeinsam. Während es in der Biologie und der Physik um die so bezeichneten Objekte und eine Vielzahl ihrer Eigenschaften geht, stellt der mathematische Begriff eine ideelle Abstraktion, ein Denkmodell dar, mit dem die Form realer physikalischer (meist fester) Körper beschrieben werden kann.

Ecke, Spitze, Kante:

1. Bedeutungen der Wörter in der Mathematik und im Mathematikunterricht

Ecke:

(1) Die Eckpunkte eines n-Ecks werden auch als Ecken des n-Ecks bezeichnet.

(2) Eine körperliche Ecke ist eine räumliche Figur, die dadurch entsteht, dass ein Strahl, der von einem Punkt S ausgeht an den Seiten eines n-Ecks mit den Eckpunkten A_1, A_2, … A_n entlang gleitet. Das n-Eck liegt in einer Ebene, zu der der Punkt S nicht gehört. Der Punkt S heißt Ecke, Eckpunkt oder Scheitel.

Ecke ist also in der Mathematik sowohl eine räumliche Figur als auch ein Punkt.

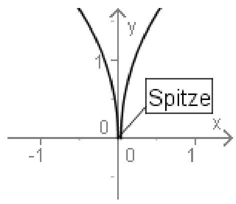
Im Mathematikunterricht wird der Begriff der räumlichen Ecke nicht behandelt.

Spitze:

(1) Mit Spitze wird der der Basis gegenüberliegende Eckpunkt eines gleichschenkligen Dreiecks bezeichnet.

(2) Spitze bezeichnet bei Pyramiden und Kegeln den gemeinsamen Punkt aller Seitenkanten bzw. Mantellinien.

(3) Mit Spitze werden bestimmte Punkte von algebraischen Kurven bezeichnet (s. Abb.).



Die Bedeutungen (1) und (2) sind auch Inhalt des Mathematikunterrichts. Die Spitze einer Pyramide ist auch eine Ecke, während die Spitze eines Kegels keine Ecke ist.

Kante:

(1) Die Strecken SA_i, $i = 1(1)n$, einer räumlichen Ecke heißen Kanten. An ebenflächig begrenzten Körpern werden als Kanten die Strecken bezeichnet, die Seiten von genau zwei Begrenzungsflächen sind.

(2) In einigen Quellen wird auch bei krummflächig begrenzten Körpern von Kanten im weiteren Sinne gesprochen, wenn zwei Flächen längs einer Kurve zusammenstoßen.

Der Begriff Kante hat also zwei unterschiedliche Bedeutungen, im engeren Sinne als eine geradlinige und im weiteren Sinne als eine auch krummlinige eindimensionale Figur.

2. Weitere Bedeutungen, die Gemeinsamkeiten mit dem mathematischen Begriff haben

Ecke:

(1) Flächen-, Raum- oder Materialstück, das von zusammenstoßenden Linien, Kanten oder Flächen begrenzt wird (vorspringende Ecken, Ecken eines Tisches)

(2) Stück einer Fläche, wo zwei Kanten aufeinander treffen (Ecke des Spielfeldes)

(3) Stelle, an der zwei Straßen zusammenstoßen (Straßenecke, um die Ecke gehen)

(4) spitz zulaufendes Stückchen (eine Ecke Käse)

(5) Stelle, an der zwei Seiten eines Raumes zusammenstoßen (in der Ecke stehen)

Eine Ecke ist den Bedeutungen (2), (3) und teilweise auch (1) Teil einer Fläche und in den Bedeutungen (5) und teilweise (1) Teil eines Raumes. Letzteres hat Gemeinsamkeiten mit dem Begriff der räumlichen Ecke in der Mathematik. In der Bedeutung (5) wird eine Ecke aber nur durch 2 Flächen gebildet, so dass auch eine Beziehung zum mathematischen Begriff der Kante besteht. In der Bedeutung (4) handelt es sich um einen Körper.

Spitze:

(1) Spitzes Ende eines Gegenstandes (Spitze einer Nadel)

(2) Ende eines spitz zulaufenden Teils (Spitze des Giebels)

(3) Oberes Teils eines hohen Objektes (Spitze des Eisberges)

(4) Höchstwert, Höchstmaß (Spitzenpreis)

Alle vier genannten Bedeutungen haben enge Beziehungen zum mathematischen Begriff der Spitze einer Pyramide bzw. eines Kegels. Die weiteren 8 Bedeutungen des Wortes (z. B. Spitze des Zuges, Spitzengruppe, spitze Bemerkung, Plauener Spitzen) haben allerdings fast keine Gemeinsamkeiten mit mathematischen Bedeutungen.

Kante:

(1) Linie, die durch zwei aneinander stoßende Flächen gebildet wird (scharfe Kante)

(2) Rand, äußere Begrenzung einer Fläche (Bettkante)

(3) Auf beiden Seiten steil abfallender Felsgrat

(4) Linie, die zwei Knoten in einem Diagramm verbindet

In diesen Bedeutungen ist eine Kante immer etwas Eindimensionales und in der Regel Geradliniges.

Fläche, Begrenzungsfläche, Oberfläche, Grundfläche, Deckfläche, Seite, Seitenfläche, Mantelfläche, Grundkanten, Seitenkanten:

1. Bedeutungen der Wörter in der Mathematik und im Mathematikunterricht

Eine *Fläche* ist eine zusammenhänge Punktmenge im dreidimensionalen Raum mit bestimmen Eigenschaften. Eine Fläche kann eben (zweidimensional) oder gekrümmt sein.

Die begrenzenden Flächen eines Körpers heißen auch *Begrenzungsflächen*. Ihre Gesamtheit wird als *Oberfläche* des Körpers bezeichnet.

Bei Prismen, die keine Quader sind, bei Zylindern sowie bei Pyramiden- und Kegelstümpfen wird unabhängig von der räumlichen Lage des Körpers eine bestimmte Begrenzungsfläche als *Grundfläche* und die zu ihr parallele als *Deckfläche* bezeichnet. Die Bezeichnungen sind also untereinander austauschbar. Pyramiden und Kegel haben nur eine Grundfläche.

Mit *Seite* wird in der ebenen Geometrie eine Strecke bezeichnet, die zu einem n-Eck gehört (z. B. die Seiten eines Dreiecks). In der räumlichen Geometrie spricht man bei der Mehrtafelprojektion vom Seitenriss bzw. von der Seitenansicht von rechts bzw. von links.

Die Bezeichnung *Seitenfläche* wird in zwei Bedeutungen verwendet.

(1) Es ist eine der Begrenzungsfläche eines beliebigen ebenflächigen Körpers.

(2) Bei Körpern, die eine Grundfläche haben, werden die übrigen Begrenzungsflächen, sofern sie nicht Deckfläche sind, als Seitenflächen bezeichnet.

Bei Körpern, die eine Grundfläche haben, wird die Gesamtheit der Seitenflächen als *Mantelfläche* bezeichnet.

Bei ebenflächig begrenzten Körpern, die eine Grundfläche haben, werden die Seiten der Grundfläche als *Grundkanten* und die Seiten der Seitenflächen, sofern sie nicht Grundkante sind, als *Seitenkanten* bezeichnet.

2. Weitere Bedeutungen, die Gemeinsamkeiten mit dem mathematischen Begriff haben

Das Wort *Fläche* bezeichnet

(1) einen flachen nach Länge und Breite ausgedehnten Bereich (Tischfläche)

(2) eine flache Außenseite eines Gegenstandes (Fläche des Würfels)

Das Wort *Oberfläche* wird im Alltag in zwei unterschiedlichen Bedeutungen verwendet.

(1) obere Begrenzungsfläche eine Flüssigkeit oder eines Gegenstandes (die Oberfläche des Sees, die Oberfläche des Tisches)

(2) Gesamtheit aller Begrenzungsflächen eines Gegenstandes (Oberfläche der Erde, Körperoberfläche)

Grundfläche bezeichnet die untere ebene Fläche eines Körpers oder eines Raumes (Grundfläche des Zimmers). Das Wort *Deckfläche* wird außerhalb der Mathematik kaum verwendet.

Das Wort *Seitenfläche* wird außerhalb der Mathematik wenig verwendet, dafür hat das Wort Seite u. a. folgende, dem Wort Seitenfläche entsprechende Bedeutungen.

(1) eine von mehreren ebenen Flächen, die einen Körper begrenzen (die untere Seite der Kiste, die Seiten eines Würfels)

(2) linke, rechte, vordere oder hintere Fläche eines Raumes oder eines Gegenstandes (eine Seite des Zimmers, die Seiten der Kassette)

(3) linker oder rechter flächiger Teil eines Gegenstandes (linke Seite des Autos)

(4) eine von beiden Flächen eines bedruckten Blattes (Buchseite)

(5) Partie des menschlichen oder eines tierischen Körpers (auf seiner linke Seite)

Die Bedeutungen (1) bis (4) beinhalten den Aspekt der Fläche direkt, die Bedeutung (5) eher indirekt. In den Bedeutungen (1) und (4) ist keine räumliche Orientierung enthalten. Dies entspricht der mathematischen Bedeutung der Seitenfläche als einer beliebigen Begrenzungsfläche eines Körpers. Die übrigen Bedeutungen schließen den Aspekt der räumlichen Orientierung ein und Seiten sind Flächen, die vertikal (rechts, links, vorne oder hinten) liegen. Dies entspricht der zweiten mathematischen Bedeutung des Begriffes Seitenfläche.

Länge, Breite, Tiefe, Höhe:

1. Bedeutungen der Wörter in der Mathematik und im Mathematikunterricht

Die *Länge* ist eine Größe und ein Maß für Strecken.

Der Begriff *Breite* wird in der Mathematik nur in der sphärischen Geometrie verwendet. Im Mathematikunterricht werden oft die Seiten eines Rechtecks und entsprechend die Grundkanten eines Quaders mit Länge und Breite bezeichnet.

Tiefe ist ein Begriff aus der Darstellenden Geometrie und bezeichnet die Richtung, die senkrecht zur Aufrissebene ist. Man spricht von der Tiefenrichtung, Linien in Tiefenrichtung heißen Tiefenlinien.

In der ebenen Geometrie versteht man unter der *Höhe* eines Dreiecks den Abstand eines Eckpunktes von der gegenüber liegenden Seiten und unter der Höhe eines Trapezes bzw. Parallelogramms den Abstand der parallelen Seiten.
In der räumlichen Geometrie bezeichnet in Körpern, die eine Grundfläche haben, die *Höhe* den Abstand der Deckfläche oder der Spitze von der Grundfläche.

2. Weitere Bedeutungen, die Gemeinsamkeiten mit dem mathematischen Begriff haben

Länge:

(1) Räumliche Ausdehnung in einer Richtung (Stäbe verschiedener Länge)

(2) Seite eines rechteckigen Flächenstücks bzw. Grundkante eines quaderförmigem Gegenstandes oder Raumes (Länge eines Briefes, Länge eines Zimmers)

(3) hoher Wuchs, Größe (seine Länge kam ihm zugute)

(4) Abstand eines Ortes vom Nullmeridian (geografische Länge)

Breite:

(1) Ausdehnung in seitlicher Richtung (Breite eines Schranks)

(2) Seite einer rechteckigen Fläche, im Zusammenhang mit Länge (Länge und Breite eines Briefes)

(3) Abstand eines Ortes von Äquator (geografische Breite)

Bei rechteckigen Flächen (Briefen, Zimmern, Grundstücken) ist es im Alltag üblich, die Seitenlängen mit Länge und Breite zu bezeichnen.

Tiefe:

(1) Ausdehnung senkrecht nach unten (die Tiefe des Brunnens)

(2) Entfernung unter der Erd- oder Wasseroberfläche (die Tiefe des Wassers)

(3) Ausdehnung nach hinten oder innen (Tiefe des Schrankes, Tiefe der Wunde)

(4) Hinten gelegener Teil eines Raumes, Gebietes (aus der Tiefe des Parks)

Die Tiefe bezeichnet eine bestimmte Richtung in Bezug zur Waagerechten aus Sicht des Betrachters.

Höhe:

(1) Maß der Ausdehnung in vertikaler Richtung (die Höhe des Tisches)

(2) Bestimmte Entfernung über der Erdoberfläche

(3) Abstand eines Gestirns vom Horizont

Im Unterschied zum Begriff Höhe in der Mathematik sind die Bedeutungen im Alltag mit dem Bezug zur (waagerechten) Erdoberfläche verbunden. Eine Höhe ist immer etwas Vertikales.

2.2 Merkmale und Eigenschaften von Würfeln und Quadern

1. Bedeutungen der Wörter in der Mathematik und im Mathematikunterricht

Das Wort *Würfel* stammt vom Wort werfen ab.
Ein Würfel ist ein Körper mit 6 kongruenten Quadraten als Begrenzungsflächen.

Vor allem im Stochastikunterricht werden Geräte zum Würfeln bei Glücksspielen als Würfel bezeichnet, die in der Regel eine Würfelform mit abgerundeten Ecken haben, aber auch andere regelmäßige Polyeder, wie etwa Oktaeder sein können. Es wird zwischen regulären (echten) und nicht regulären (gefälschten) Würfeln unterschieden in Abhängigkeit von der physikalischen Beschaffenheit (Masseverteilung) des Spielgerätes.

Obwohl ein Würfel ein spezieller Quader ist, wird er analog zu der Bezeichnung bei Vierecksarten in der Regel nicht als Quader bezeichnet. In allen Schullehrbüchern werden die Volumen und Oberflächenformeln für Würfel neben denen für Quader extra behandelt.

Die Quelle des Wortes *Quader* ist das lateinischen Wort quadrum = Viereck.
Ein Quader ist ein geometrischer Körper, der von 3 Paaren kongruenter Rechtecke, die in parallelen Ebenen liegen, begrenzt wird.

2. Weitere Bedeutungen, die Gemeinsamkeiten mit dem mathematischen Begriff haben

Würfel:

(1) Objekt zum Würfeln bei Glücksspielen (Spielwürfel)

(2) Würfelförmiges Objekt (Würfelzucker, Speck in Würfel schneiden)

Quader:
Ein Quader ist ein behauener Steinblock von der Form eines Quaders.

3. Probleme und Anwendungen

Es ist nicht sinnvoll ist, bereits beim Quader die Begriffen Grundfläche und Deckfläche zu verwenden. Es könnte beim Schüler die Vorstellung entstehen, dass die Grundfläche eines Körpers stets die Fläche ist, die unten liegt. Dies würde zu Fehlern bei Prismen führen. Hinzu kommt, dass man bei Würfeln üblicherweise nicht die Begriffe Grund- und Deckfläche verwendet, sondern generell von Seiten spricht, womit alle Begrenzungsflächen gemeint sind.

Ein typischer Fehler der Schüler ist die Verwechslung der Begriffe Quader und Rechteck sowie Würfel und Quadrat.

Während würfelförmige Objekte im Alltag sehr selten auftreten, gibt es sehr viele Gegenstände und Räume, die die Form eines Quaders haben. Würfelförmige Objekte werden in der Regel auch als Würfel bezeichnet, während dies bei quaderförmigen nicht der Fall ist.

Die Berechnung des Volumens von Quadern dürfte mit Abstand die häufigste Anwendung von Volumenformeln im Alltag sein. Dagegen spielt die Berechnung des Würfelvolumens und auch die Berechnung des Oberflächeninhalts bei beiden Körpern kaum eine Rolle. Die Berechnung von Teilen oder des gesamten Oberflächeninhalt kann auf die Berechnung des Flächeninhalts von Quadraten und Rechtecken zurückgeführt werden, die wir zum sicheren Wissen und Können in der ebenen Geometrie zählen.

2.3 Merkmale und Eigenschaften von Prismen

1. Bedeutungen des Wortes in der Mathematik und im Mathematikunterricht

Das Wort Prisma stammt aus dem Griechischen und bedeutete das Zersägte, Zerschnittene.

Ein Körper heißt n-seitiges Prisma, wenn er begrenzt wird von zwei zueinander kongruenten und parallelen n-Eckflächen, der Grund- und Deckfläche, sowie n Parallelogrammflächen, den Seitenflächen. Ein Prisma heißt gerade, wenn die Seitenkanten senkrecht zur Grundfläche sind, ansonsten heißt es schief.

Neben der Definition eines Prismas über die Art der Begrenzungsflächen gibt es auch eine genetische Definition.
Ein Prisma ist ein Körper, der sich ergibt, wenn eine prismatische Fläche durch zwei zueinander parallele Ebenen so geschnitten wird, dass die Schnittfiguren geschlossene Kurven sind. Eine prismatische Fläche entsteht, wenn eine Gerade im Raum ohne ihre Richtung zu verändern an den Seiten eines n-Ecks entlang gleitet.

Im Mathematikunterricht wird in der Regel zunächst nur der Begriff des geraden Prismas über die Art der Begrenzungsflächen erklärt, wobei man den Zusatz „gerade“ meist weglässt. Der Begriff des schiefen Prismas wird dann höchstens genetisch durch Verschiebung der Deckfläche eines geraden Prismas eingeführt.

In einigen Schulbüchern werden stehende und liegende Prismen unterschieden, je nachdem ob das Prisma auf der Grundfläche steht oder auf einer Seitenfläche liegt. Anstelle des Wortes Prisma wird manchmal auch das Wort Säule verwendet und in einigen Schulbüchern werden Zylinder ebenfalls als Prismen bezeichnet.

2. Weitere Bedeutungen, die Gemeinsamkeiten mit dem mathematischen Begriff haben

In der Optik wird ein dreiseitiges Prisma aus Glas, das zur Reflexion oder Brechung des Lichtes dient, als Prisma bezeichnet. Prismen werden auch in bestimmten Ferngläsern verwendet.

3. Probleme und Anwendungen

Ein Körper, bei dem zwei Begrenzungsflächen kongruente und parallele Rechtecke und die übrigen Parallelogramme sind, kann sowohl als gerades als auch als schiefes Prisma bezeichnet werden. Die Bezeichnungen gerade und schief sind also nicht immer sinnvoll.

Schüler haben im Mathematikunterricht oft Probleme bei der Identifizierung von Prismen, insbesondere wenn diese auf einer Seitenfläche liegen. Die Unterscheidung in liegende und stehende Prismen kann dabei eine Denkhilfe sein.

Das Wort Prisma wird außerhalb des Mathematikunterrichts zur Beschreibung der Form eines Körpers nicht verwendet. Selbst Studenten eines Lehramtes für das Fach Mathematik kennen das Wort meistens kaum. Bei dem physikalischen Begriff des Prismas geht es zudem weniger um die Form als mehr um die physikalischen Eigenschaften des Objektes.

Im Alltag treten sehr viele Objekte auf, die die Form eines Prismas haben. Dabei handelt ist sich oft um liegende gerade Prismen (Hausdächer, Böschungen, Stahlträger). Schiefe Prismen kommen äußerst selten vor. Von großer Bedeutung ist im Alltag das Können im Berechnen von Rauminhalten gerader Prismen. Dazu muss erkannt werden, welche Begrenzungsfläche als Grundfläche und welche Kante als Höhe gewählt werden kann. Die Berechnung des Flächeninhalts von Seitenflächen führt zur Inhaltsberechnung von Rechtecken, die sicher zu beherrschen ist. Die Inhaltsberechnung von Grund- und Deckfläche gehört nur für Rechtecke und Dreiecke zum sicheren Können.

2.4 Merkmale und Eigenschaften von Zylindern

1. Bedeutungen des Wortes in der Mathematik und im Mathematikunterricht

Das Wort Zylinder kommt aus dem Griechischen und bedeutet als Verb rollen, wälzen.

Ein gerader Kreiszylinder ist ein geometrischer Körper, der begrenzt wird von zwei zueinander kongruenten und parallelen Kreisflächen und einer gekrümmten Fläche, die bei einer Abwicklung in eine Ebene ein Rechteck ergibt.

Ein gerader Kreiszylinder entsteht, wenn ein Rechteck um eine seiner Seiten rotiert. Die Gerade durch die Mittelpunkte der Grund- und Deckfläche heißt Achse des Zylinders. Ein Hohlzylinder entsteht, wenn aus einem geraden Kreiszylinder ein solcher mit kleinerem Radius aber gleicher Achse und gleicher Höhe entfernt wird.

Der allgemeine Begriff des Zylinders kann nur genetisch definiert werden. Ein Zylinder ist ein Körper, der sich ergibt, wenn ein Zylinderfläche durch zwei zueinander parallele Ebenen so geschnitten wird, dass die Schnittfiguren geschlossene Kurven sind. Eine Zylinderfläche entsteht, wenn eine Gerade im Raum ohne ihre Richtung zu ändern an einer beliebigen geschlossenen und gekrümmten Kurve (Leitkurve) entlang gleitet.

In der Schule werden in der Regel nur gerade Kreiszylinder behandelt, wobei auf die Zusätze „gerade“ und „Kreis“ meist verzichtet und nur von Zylinder gesprochen wird. Insbesondere werden diese Zusätze beim Begriff Hohlzylinder nicht verwendet. In einigen Büchern wird darauf hingewiesen, dass es auch Zylinder mit elliptischer Grundfläche gibt. Es wird z. T. der Begriff des schiefen Kreiszylinders genetisch durch Verschiebung der Deckfläche eines geraden Kreiszylinders eingeführt.

2. Weitere Bedeutungen, die Gemeinsamkeiten mit dem mathematischen Begriff haben

(1) Zylinderförmige Hohlkörper, in dem sich gleitend eine Kolben bewegt (Motor mit 4 Zylindern)

(2) Zylindrische Glas eine Gas- oder Petroleumlampe zum Schutz der Flamme
(3) hoher, steifer Herrenhut mit zylindrischem Kopf und fester Krempe

Alle drei Bedeutungen beziehen sich auf das Wort Zylinder. In den Bedeutungen (1) und (2) haben die betreffenden Gegenstände die Form eines Hohlzylinders, bei der dritten Bedeutung handelt sich um die Form eines geraden Zylinders mit elliptischer Grundfläche.

3. Probleme und Anwendungen

Der allgemeine Zylinderbegriff kann nicht durch Angabe der Begrenzungsflächen eingeführt werden, da es sich bei der Abwicklung der Mantelfläche nur beim geraden Kreiszylinder um eine geradlinig begrenzte Figur handelt. Bereits beim schiefen Kreiszylinder ergibt die Abwicklung der Mantelfläche kein Parallelogramm wie oft fälschlicherweise angenommen wird.

Es gibt sehr viele Objekte im Alltag, die die Form eines geraden Kreiszylinders bzw. Hohlzylinders haben. Einige zylindrische Körper in stehender Lage werden als Säulen und in liegender Lage als Walzen bezeichnet.

Es gibt so gut wie kein reales Objekt, das die Form eines schiefen Kreiszylinders hat. Selbst ein Unterrichtmodell, das unter diesem Begriff verkauft wird, erwies bei näherer Prüfung als Körper, der durch schräge Schnitte eines Kreiszylinders erzeugt wurde und somit eine elliptische Grundfläche hat. Es kommt im Alltag häufiger vor, dass zylindrische Gegenstände oder Rohre durch schräge parallele Schnitte bearbeitet werden. Es gibt auch einige Gegenstände, die die Form eines geraden Zylinders mit elliptischer Grundfläche (Zylinderhut, elliptische Säulen) haben.

Die Berechnung des Volumens von geraden Kreiszylindern und Hohlzylindern ist bei vielen Sachverhalten erforderlich. Die oft benötigte Berechnung des Mantelflächeninhalts kann auf die Berechnung von Rechtecken zurückgeführt werden.

2.5 Merkmale und Eigenschaften von Pyramiden, Kegeln und Kugeln

1. Bedeutungen der Wörter in der Mathematik und im Mathematikunterricht

Der Begriff *Pyramide* kann durch die Angabe der Begrenzungsflächen in folgender Weise allgemein definiert werden. Ein Körper heißt Pyramide**,** wenn er begrenzt wird von einer n-Eckfläche und n Dreiecksflächen, die einen Punkt S gemeinsam haben.

Besitzt die Grundfläche einer Pyramide einen Mittelpunkt, unterscheidet man gerade und schiefe Pyramiden. Ein n-Eck hat einen Mittelpunkt, wenn es punktsymmetrisch ist. Liegt die Spitze der Pyramide senkrecht über dem Mittelpunkt der Grundfläche, heißt die Pyramide gerade, ansonsten heißt sie schief.
Bei einer geraden Pyramide sind alle Seitenkanten gleich lang. Umgekehrt gilt auch, dass die Pyramide gerade ist, wenn bei ihr alle Seitenkanten gleich lang sind.

Der Begriff Pyramide kann auch genetisch definiert werden. Eine Pyramide ist ein Körper, der sich ergibt, wenn eine Pyramidenfläche von einer Ebene so geschnitten wird, dass die Schnittfigur eine geschlossene Kurve ist. Eine Pyramidenfläche entsteht, wenn ein Strahl mit dem Anfangspunkt S an den Seiten eines ebenen n-Ecks entlang gleitet, wobei sich S außerhalb der Ebene des n-Ecks befindet.

Im Mathematikunterricht lernen die Schüler in der Primarstufe meist nur gerade Pyramiden mit quadratischer oder rechteckiger Grundfläche kennen. Es werden nur selten gerade und schiefe Pyramiden unterschieden.

Das Wort *Kegel* bedeutete im Mittel- und Althochdeutschen Knüppel, Stock, Eiszapfen, Holzfigur im Kegelspiel, uneheliches Kind (mit Kind und Kegel), Pflock und kleiner Pfahl.

Ein Körper heißt gerader Kreiskegel, wenn er begrenzt wird von einer Kreisfläche und einer gekrümmten Fläche, die bei einer Abwicklung in eine Ebene einen Kreissektor ergibt.

Ein gerader Kreiskegel entsteht, wenn ein rechtwinkliges Dreieck um eine seiner Katheten rotiert. Wenn die Spitze eines geraden Kreiskegels parallel zur Grundfläche verschoben wird, entsteht ein schiefer Kreiskegel.

Einen Kreiskegel kann man allgemein in folgender Weise definieren: Ein Kreiskegel entsteht, wenn alle Punkte eines Kreises mit einem Punkt außerhalb der Kreisebene verbunden werden. Der allgemeine Kegelbegriff kann ebenfalls nur genetisch definiert werden: Ein Kegel ist ein Körper, der sich ergibt, wenn eine Kegelfläche von einer Ebene so geschnitten wird, dass die Schnittfigur eine geschlossene Kurve ist. Eine Kegelfläche entsteht, wenn ein Strahl mit dem Anfangspunkt S an einer beliebigen geschlossenen ebenen Kurve entlang gleitet, wobei sich S außerhalb der Ebene der Kurve befindet.

Im Mathematikunterricht werden analog zur Sprechweise bei geraden Kreiszylindern auch bei geraden Kreiskegeln meist die Zusätze „gerade“ und „Kreis“ weggelassen. Schiefe Kreiskegel oder Kegel mit einer Grundfläche, die kein Kreis ist, werden sehr selten betrachtet.

Eine *Kugel* ist ein geometrischer Körper, der von einer gleichmäßig gekrümmten Fläche begrenzt wird, die alle Punkte enthält, die von einem festen Punkt im Raum den gleichen Abstand haben. Diese Fläche lässt sich nicht in eine Ebene abwickeln.

Eine Kugel entsteht, wenn ein Kreis um einen seiner Durchmesser rotiert.

2. Weitere Bedeutungen, die Gemeinsamkeiten mit dem mathematischen Begriff haben

Pyramide:

(1) Pyramidenförmiger monumentaler Grab- oder Tempelbau (ägyptische Pyramiden)

(2) Pyramidenförmiges Gebilde (eine Pyramide aus Konservendosen)

Kegel:

(1) Kegelförmiges Gebilde (Vulkankegel, Lichtkegel, Kegelbecher, Leitkegel)

(2) Figur im Kegelspiel (Kegel aufstellen)

Die Objekte zur Bedeutung (1) können auch die Form eines Kegelstumpfes haben. Das Wort Kegel in der Bedeutung (2) hat nur sehr wenige Gemeinsamkeiten mit dem mathematischen Begriff, es handelt sich ebenfalls um Rotationskörper mit einer Grundfläche und der Querschnitt nimmt von der Grundfläche aus im Mittel ab.

Kugel:
Die Bezeichnung Kugel wird außerhalb der Mathematik auch für ein bestimmtes Geschoss (Gewehrkugel, Kanonenkugel) verwendet. Diese Geschosse müssen nicht immer die Form einer Kugel haben.

3. Probleme und Anwendungen

Die Unterteilung in gerade und schiefe Pyramiden ist weder eindeutig, noch erfasst sie alle Fälle. Eine dreiseitige Pyramide, bei der ein Eckpunkt über dem Umkreismittelpunkt der gegenüberliegenden Fläche liegt und bei der für mindestens einen Eckpunkt dies nicht zutrifft, kann je nach Wahl der Grundfläche einmal als gerade und einmal als schief bezeichnet werden. Eine Pyramide, deren Grundfläche keinen Mittelpunkt hat, ist weder gerade noch schief.

Ein schiefer Kreiskegel kann analog zum schiefen Kreiszylinder nicht über die Art der Begrenzungsflächen definiert werden.

In Anwendungssituationen treten meist nur Objekte auf, die die Form gerader Pyramiden mit quadratischer bzw. rechteckiger Grundfläche oder die Form gerader Kreiskegel haben, wobei Kreiskegel und Kreiskegelstümpfe häufiger als Pyramiden oder Pyramidenstümpfe

vorkommen. Andere gerade Pyramiden und erst recht schiefe Pyramiden oder Kegel findet man nur sehr selten. Auf die Betrachtung schiefer Pyramiden und Kegel sollte man deshalb wie auch auf schiefe Prismen und Zylinder im Mathematikunterricht weitgehend verzichten.
Um Aufgaben zur Darstellung von Pyramiden ohne die Wörter gerade und schief zu formulieren, kann man vereinbaren, dass die Spitze bei einer Pyramide mit einem Viereck als Grundfläche immer über dem Schnittpunkt der Diagonalen liegen soll.

Außer Bällen haben nur wenige Objekte die Form einer Kugel.

Von den möglichen Körperberechnungen sind nur die Volumenrechnungen von Pyramiden und Kegeln, auf die auch die Berechnungen von Stümpfen zurückgeführt werden können, von Bedeutung. Die Berechnung der Grundfläche von Pyramiden gehört für Dreiecke, Quadrate und Rechtecke und der Grundfläche von Kegeln zum sicheren Wissen und Können in der ebenen Geometrie.

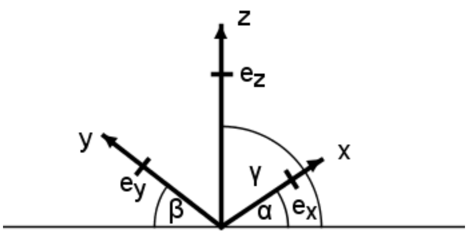
3 Sicheres Wissen und Können zur Körperdarstellung und sichere Fähigkeiten zur räumlichen Wahrnehmung und räumlichen Vorstellung

3.1 Allgemeine Begriffe und Verfahren zur Darstellung von Körpern

Projektion und Axonometrie

Bedeutung und Verwendung der Begriffe und Verfahren in der Mathematik und im Mathematikunterricht
Projektion und Axonometrie sind zwei verschiedene Zugänge zur Darstellung von Körpern.
Die *Projektion* ist eine Abbildung von Körpern in eine Ebene. Die Klassifizierung der Projektionsarten ergibt sich aus dem Verlauf der Projektionsgeraden. Man unterscheidet zwei Arten, die *Zentralprojektion*, bei der alle Projektionsgeraden durch einen Punkt gehen, und die *Parallelprojektion*, bei der alle Projektionsgeraden parallel zueinander sind. Bei der Parallelprojektion unterscheidet man weiterhin je nach dem Einfallswinkel der Projektionsgeraden auf die Ebene die *schräge Parallelprojektion* und die *senkrechte Parallelprojektion*, die auch als *Normalprojektion* bezeichnet wird. Das Bild bei einer Projektion entspricht einem Schattenbild eines Kantenmodells des Körpers.
In der *Darstellenden Geometrie* werden Verfahren zur zeichnerischen Darstellung von Geraden, Ebenen, Körpern, Körperschnitten und Durchdringungen entwickelt und die *Projektive Geometrie* stellt analytischen Methoden für diese und andere Darstellungen bereit.

Beim Verfahren der *Axonometrie* wird ein geeignetes rechtwinkliges Koordinatensystem (räumliches Dreibein) in den Körper gelegt und es wird durch eine Vorschrift angeben, wie dieses Koordinatensystem in der Ebene darzustellen ist. Aus den Koordinaten der Punkte im Raum ergeben sich dann ihre Bilder in der Ebene. Es gibt folgende Vorschriften, die durch die Verhältnisse der Maßstäbe auf den Achsen und die Winkel der Achsen mit einer horizontalen Linie gekennzeichnet und die durch DIN-Normen festgelegt sind.



Vorschrift	$e_x : e_y : e_z$	α	β	γ
Isometrie	1 : 1 : 1	30°	30°	90°
Dimetrie	0,5 : 1 : 1	42°	7°	90°
Kabinett-Projektion	0,5 : 1 : 1	45°	0°	90°
Kavalier-Projektion	1 : 1 : 1	45°	0°	90°

Aus der Tabelle ist zu erkennen, dass die Bezeichnung Kavalierprojektion in der Schule und in der Technik unterschiedlich verwendet wird. Die in der Schule verwendetet Vorschrift für Schrägbildzeichnungen entspricht der Kabinett-Projektion im Technischen Zeichnen.

Den Zusammenhang zwischen beiden Zugängen vermittelt der Satz von Pohlke[2], nach dem sich zu jeder beliebigen axonometrischen Darstellung eines Körpers eine Parallelprojektion bestimmen lässt, deren Bild mit der Darstellung übereinstimmt. So entspricht die in der Tabelle angegebene Dimetrie einer Normalprojektion. Es ist also nicht möglich, alleine aus der Existenz „schräger Linien" in einer räumlichen Darstellung eines Körpers zu entscheiden, ob es sich um eine schräge oder eine senkrechte Parallelprojektion handelt.

Im Mathematikunterricht wurden in den neuen Bundesländern bis 1989 Elemente der Darstellenden Geometrie systematisch behandelt, danach ist dieses Teilgebiet der Mathematik nicht mehr inhaltlicher Bestandteil des Mathematikunterrichts. Die Axonometrie war ein Inhalt des früheren Faches Technisches Zeichnen und ist es z. T. heute im Fach AWT.

Bedeutungen und Verwendungen außerhalb der Mathematik
Unter Projektion versteht man im Alltag die vergrößerte Darstellung eines ebenen Bildes (z. B. einer Folie, eines Dias) mithilfe eines optischen Gerätes (Projektor, Beamer) auf eine Projektionsfläche.
Die Verwendung von Verfahren der Darstellenden Geometrie und Axonometrie hat in der beruflichen Praxis an Bedeutung verloren, da heute räumliche Darstellungen mithilfe informationsverarbeitender Technik (CAD) leicht erzeugt werden können.

Bild, Schrägbild, Normalbild, Grundriss, Aufriss, Zweitafelbild, Ansicht, Perspektive

Bedeutung der Begriffe in der Mathematik und im Mathematikunterricht
Ein *Bild* ist allgemein ein Element oder eine Menge, die bei einer Abbildung einem oder mehreren Elementen oder Mengen (Urbildern/Originalen) zugeordnet werden.
Bei einer Projektion ist das Bild eine ebene Figur. Bei einer schrägen Parallelprojektion heißt das entstehende Bild *Schrägbild* und bei einer senkrechten Parallelprojektion *Normalbild*. Bei einer Zweitafelprojektion als einem speziellen Verfahren der senkrechten Parallelprojektion, bei dem gleichzeitig zwei Projektionsebenen, die sich unter bzw. hinter dem Körper befinden verwendet werden, bezeichnet man die beiden Bilder als *Grundriss* bzw. *Aufriss* und beide zusammen als *Zweitafelbild*.
Da man im Mathematikunterricht fast ausschließlich nur eine Vorschrift entsprechend der Kabinett-Projektion behandelt (die als Kavalierprojektion bezeichnet wird), bedeutet das Wort Schrägbild für die meisten Schüler und auch Lehrer eine ganz bestimmte Art der Darstellung und nicht eine Klasse von möglichen Bildern. Es ist anzunehmen, dass ein kennzeichnendes Merkmal in den Vorstellungen von Schülern und Lehrern zu Schrägbildern die Existenz schräger Kanten ist. Dies ist eine Fehlvorstellung, da auch in Normalbildern schräge Kanten auftreten können (s. o.)
Der Grund- bzw. Aufriss wird im Mathematikunterricht oft als Draufsicht bzw. Vorderansicht bezeichnet. Die Bezeichnung Normalbild wird in der Regel nicht verwendet.
Die Zentralprojektion wird auch als *Perspektive* bezeichnet. Das Bild bei einer Zentralprojektion heißt perspektives oder perspektivisches Bild. Teilweise wird Perspektive auch als Oberbegriff für alle Möglichkeiten zur anschaulichen räumlichen Darstellung von Körpern verwendet. So wird die Kavalierprojektion auch als Kavalierperspektive bezeichnet.

Bedeutungen außerhalb der Mathematik
Ein *Bild* ist eine vorrangig den Gesichtssinn ansprechende Form eines Kunstwerks oder eine optische Reproduktion der Wirklichkeit (Fotografie).
Das Wort *Riss* stammt vom dem Althochdeutsch ritzen = reißen für zeichnen bzw. schreiben ab. Es wird in der Technik für technische Zeichnungen verwendet. Ansonsten haben die Bedeutungen im Alltag keine Gemeinsamkeiten mit der Bedeutung in der Mathematik.
Der Begriff *Grundriss* wird im Alltag und in der Technik für die zeichnerische Darstellung räumlichen Verhältnisse innerhalb eines Gebäudes verwendet. Eine Grundrissdarstellung ist eine zeichnerische

---

[2] K. W. Pohlke, 1810 – 1876, Professor für Darstellende Geometrie in Berlin

Abbildung einer Bodenfläche (Grundriss des Hauses, Grundriss der Wohnung), meist handelt es sich um eine Schnittdarstellung in 1 m Höhe über dem Boden.

In der Technik unterscheidet man 6 Ansichten. Diese werden als Vorderansicht (Ansicht von vorne), Draufsicht (Ansicht von oben), Ansicht von rechts bzw. von links, Ansicht von unten bzw. Ansicht von hinten bezeichnet. Dabei wird der Gegenstand so in einen gedachten Würfel gestellt, dass möglichst viele Flächen parallel zu den Seitenflächen sind. Die senkrechten Projektionen auf die Innenflächen des Würfels ergeben dann die 6 Ansichten.

Mit *Ansicht* bezeichnet man im Alltag die visuelle Wahrnehmung eines Objektes und auch ein Bild des Gesehenen (Stadtansichten, Ansicht des Schlosses). Ein visuell wahrgenommenes Bild entspricht einer Zentralprojektion des Objektes auf die Netzhaut. Beim Ansehen eines Körpers werden alle sichtbaren Strecken in wahrer Länge oder verkürzt wahrgenommen. Sie können nicht verlängert erscheinen, was bei einem Schrägbild durchaus der Fall sein kann, wenn die Projektionsgeraden einen sehr kleinen Winkel mit der Projektionsebene bilden. Alle Normalbilder entsprechen bestimmten Ansichten im visuellen Sinne.

Bei einer vorgestellten Ansicht (im Sinne einer visuellen Wahrnehmung) eines mathematischen Körpers „sieht“ man nur die sichtbaren Kanten, während bei den Bildern von Projektionen auch die nicht sichtbaren Kanten gezeichnet werden. Bei dem Sehen von realen Objekten wird zudem die Oberflächenbeschaffenheit der Begrenzungsflächen wahrgenommen.

Perspektive bedeutet im Alltag ein bestimmte Betrachtungs- oder Sichtweise und auch speziell eine bestimmte visuelle Sicht auf einen Gegenstand (ein Objekt aus einer anderen Perspektive fotografieren).

Verfahren zur Herstellung von räumlichen Darstellungen und Ansichten

Verfahren in der Mathematik und im Mathematikunterricht
Zur Anfertigung räumlicher Darstellungen sind die Begriffe Breitenrichtung, Höhenrichtung und Tiefenrichtung erforderlich. Sie ergeben sich aus den Bezeichnungen Breite, Höhe und Tiefe für die drei räumlichen Dimensionen.
Räumliche Darstellungen können auf weißem Papier oder auf Papier mit einem quadratischen Gitter (Kästchenpapier) gezeichnet werden. Auf weißem Papier sind alle Winkel und Verkürzungsverhältnisse (q) möglich, auf Kästchenpapier werden nur Gitterpunkte verwendet. Die Verwendung von Kästchenpapier ermöglicht eine Zeiteinsparung bei der Anfertigung der Zeichnungen. Für diese Zeichnungen sollten Vorschriften bereits in der Orientierungsstufe vermittelt werden, bevor Schrägbilder nach dem Standardverfahren auf weißem Papier gezeichnet werden. Es sind verschiedene Vorschriften möglich, die zu Schrägbildern aber auch angenährt zu Normalbildern führen. Folgende Vorschriften für die Darstellung von Tiefenlinien sind für Schrägbilder geeignet. Man geht vom vorderen Endpunkt der Strecke aus.

(1) bei Streckenlängen in Tiefenrichtung von 2 Kästchenlängen: ein Kästchen nach rechts und eins nach oben ($\alpha = 45°$, $q = 0{,}71$)

(2) bei Streckenlängen in Tiefenrichtung von 3 Kästchenlängen: ein Kästchen nach rechts und eins nach oben ($\alpha = 45°$, $q = 0{,}47$)

(3) bei Streckenlängen in Tiefenrichtung von 4 Kästchenlängen: zwei Kästchen nach rechts und eins nach oben ($\alpha = 26{,}6°$, $q = 0{,}56$)

Bei den Verfahren (2) und (3) ergeben sich sehr anschauliche Schrägbilder durch die gute Annäherung an das günstige Verkürzungsverhältnis von 0,5. Beim Verfahren (3) fallen zudem die Bilder der Raumdiagonalen nicht mit denen der Tiefenkanten zusammen.
Das Verfahren (1) führt zu weniger anschaulichen Schrägbildern, es entspricht aber in bestimmter Hinsicht dem Halbieren von Längen in Tiefenrichtung als dem späteren Standardverfahren auf weißem Papier, wobei allerdings beachtet werden muss, dass dabei Kästchen- und Diagonalenlängen

ins Verhältnis gesetzt werden.
Bei allen Verfahren können nur Kanten in Tiefenrichtung gewählt werden, die ein Vielfaches von 2, 3 bzw. 4 Kästchenlänge sind.

In Schrägbildern werden die Punkte oft nicht bezeichnet, da dadurch die die Anschaulichkeit insbesondere bei zusammengesetzten Körpers erheblich erschwert würde.

Beim Verfahren zur Herstellung von Zweitafelbildern werden die beiden Bilder durch die Rissachse getrennt. Grundriss und Aufriss jedes Punktes werden bezeichnet und liegen auf Linien (Ordnungslinien) senkrecht zur Rissachse, die dünn gezeichnet werden.

In allen Bildern werden in der Mathematik und oft auch im Mathematikunterricht die Sichtbarkeitsverhältnisse beachtet. Die nicht sichtbaren Kanten werden meist gestrichelt gezeichnet.

Verwendung der Verfahren außerhalb der Mathematik
Bei räumlichen Darstellungen in der Technik oder im Alltag werden die nichtsichtbaren Kanten auch weggelassen und nur dünn gezeichnet. In technischen Zeichnungen von Ansichten werden keine Rissachsen gezeichnet und die Punkte nicht beschriftet.

3.2 Zur Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens

Ergebnisse psychologischer Untersuchungen

Das Raumvorstellungsvermögen hat für viele, insbesondere technische Berufe eine große Bedeutung. Es sollte deshalb ein wesentliches Ziel des Mathematikunterrichts in allen Schularten sein, das langfristig und kontinuierlich zu realisieren ist.
Räumliches Vorstellungsvermögen ist die Fähigkeit, mit 2- oder 3-dimensionalen Objekten auf der Vorstellungsebene zu arbeiten. Voraussetzung für die Entwicklung des Raumvorstellungsvermögens ist die Fähigkeit zur visuell-räumlichen Wahrnehmung.
Eine notwendige Bedingung für die Entwicklung des Raumvorstellungsvermögens sind praktisch-gegenständliche Handlungen, wie Arbeit mit Körpermodellen, Zerlegen und Zusammensetzen von Körpern, Herstellen und Falten von Netzen und Papierbögen, Arbeit mit Knete, Orientierungsübungen mit Stadtplänen u. a. Das Hauptproblem der Unterrichtsgestaltung ist dabei die Planung des Wechselverhältnisses von praktisch-gegenständlichen Handlungen und der reinen Arbeit auf der Vorstellungsebene, die der eigentliche Inhalt des Raumvorstellungsvermögens ist.
Infolge der unterschiedlichen Voraussetzungen der Schüler müssen Möglichkeiten zur Differenzierung des Anforderungsniveaus geplant werden. Dabei spielt gerade die Zulassung von gegenständlichen oder zeichnerischen Veranschaulichungen beim Lösen der Aufgaben die wichtigste Rolle.
Es gibt zahlreiche psychologische Untersuchungen zur Entwicklung und den Komponenten des Raumvorstellungsvermögens[3]. Diese Forschungen ergaben u. a. folgende Ergebnisse:

- Das Raumvorstellungsvermögen entwickelt sich im Laufe der Schulzeit, wobei die größten Zuwächse zwischen dem 7. und 14. Lebensjahr auftreten. Allerdings ist für diesen Fähigkeitsbereich der Einfluss erblicher Faktoren weitaus größer als bei anderen Bereichen mathematischer Fähigkeiten.
- Viele Aufgaben werden von den Probanden oft auch ohne räumliches Vorstellen nur durch logische Überlegungen gelöst.
- Es gibt mathematisch hochbegabte Schüler, die nur ein geringes räumliches Vorstellungsvermögen haben und alle Aufgaben auf rein logisch-analytischem Wege lösen.

[3] als hauptsächliche Quelle wurde verwendet: Maier, Peter H.: Räumliches Vorstellungsvermögen, Donauwörth : Auer Verlag, 1999

- Bei leistungsschwachen Schülern können durch die Förderung des Raumvorstellungsvermögens Mängel in den verbal-logischen Fähigkeiten kompensiert werden.
- Bei vielen Testaufgaben werden räumliche Darstellungen vorgelegt, die zum Verständnis der Aufgabe erst gelesen werden müssen, was eine anspruchsvolle Tätigkeit ist.

Für diese Untersuchungen wurden von verschiedenen Psychologen jeweils spezielle Testaufgaben entwickelt und in meist kleinen Populationen erprobt. Zur Bestimmung von Komponenten des Raumvorstellungsvermögens wurden die Testergebnisse faktorenanalytisch ausgewertet. Es existieren deshalb viele unterschiedliche Modelle und Begriffsbildungen. Als Komponenten des räumlichen Vorstellungsvermögens werden u. a. angegeben:

- Räumliche Wahrnehmung
- Veranschaulichung oder räumliche Visualisierung
- Räumliche Verschiebungen und Faltungen
- Vorstellungsfähigkeit von Rotationen
- Räumliche Beziehungen
- Räumliche Orientierung

Diese Komponenten werden in der Regel durch die verwendeten Testaufgaben erklärt. Eine Analyse der Anforderungen dieser Aufgaben, eine Verallgemeinerung der Aufgabentypen oder eine Angabe allgemeiner psychischer Dispositionen finden meist nicht statt. Die Aufgaben sind für den Unterricht meist nicht geeignet, da sie zu speziellen Testzwecken entwickelt wurden. Eine direkte Übernahme der Komponenten des Raumvorstellungsvermögens aus psychologischen Untersuchungen für die Struktur der Aufgaben erwies sich deshalb als nicht möglich. Es wurde versucht, ausgehend von einer Analyse typischer Anforderungen im Alltag eine Kombination aus üblichen Aufgabentypen des Mathematikunterrichts und einigen Komponenten aus psychologischen Untersuchungen vorzunehmen. Dabei wurden die Anforderungen an die Darstellung von Körpern und das räumliche Vorstellungsvermögen in geeigneter Weis kombiniert.

Im Ergebnis dieser Überlegungen ergaben sich folgende 6 Typen von Aufgaben.

1. Lesen und Herstellen von räumlichen Darstellungen
2. Lesen und Herstellen von Ansichten
3. Identifizieren und Herstellen von Körpernetzen und Papierfaltungen
4. Zerlegen und Zusammensetzen von Körpern
5. Erkennen und Herstellen von Rotationen
6. Aufgaben zur räumlichen Orientierung

Die Aufgabentypen sind Grundlage für Vorschläge zum sicheren Wissen und Können in der räumlichen Geometrie sowie für ein Konzept zur Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens auf der Basis der Rahmenpläne von Mecklenburg-Vorpommer.