Hans-Dieter Sill, Universität Rostock

1 Ziele und Inhalte zur ebenen Geometrie

1.1 Bestandteile des Wissens und Könnens in der ebenen Geometrie und Grundlagen ihrer Entwicklung

Zum Wissen und Können in der ebenen Geometrie zählen wir Wissen und Können zu

- Punkten, Geraden, Strahlen, Strecken und Winkeln,
- Dreiecken, Vierecken und Kreisen,
- geometrischen Abbildungen und Symmetrien in der Ebene sowie
- ähnlichen Figuren in der Ebene

Zum Wissen und Können gehören insbesondere Kenntnisse zu den Objekt-, Eigenschafts- und Relationsbegriffen zu geometrischen Figuren, Kenntnisse von Sätzen zur Berechnung von Umfängen, Flächeninhalten, Strecken- und Winkelgrößen, Fähigkeiten in der Anwendung dieser Kenntnisse bei Berechnungs- und Begründungsaufgaben und Gewohnheiten zum sauberen und genauen Arbeiten.

Gemeinsamer Bestandteil dieser Könnensbereiche sind Fähigkeiten, Fertigkeiten und Gewohnheiten

- im Lösen von geometrischen Konstruktionsaufgaben
- im Umgang mit Zeichengeräten und im Freihandzeichnen

Bei der *Aneignung von Kenntnissen* sollten generell folgende Aspekte beachtet werden:
Kenntnisse werden durch Sprache vermittelt und durch Sprache zum Ausdruck gebracht.

Zentraler Bestandteil der Sprache sind Wörter. Wörter haben bestimmte Bedeutungen. Verschiedene Wörter können die gleiche Bedeutung haben (Synonyme), z. B. Volumen und Rauminhalt. Die meisten Wörter haben mehrere Bedeutungen (Polysemie). Die verschiedenen Bedeutungen haben oft gemeinsame Bestandteile. So bezeichnet das Wort Gerade sowohl ein mathematische Objekt als auch einen bestimmten Abschnitt einer Stadionrunde. Beiden Objekten ist gemeinsam, dass sie „geradlinig“ also nicht gekrümmt sind.

Zur Beschreibung der Speicherung von Kenntnissen im Gedächtnis kann das Modell eines semantischen Netzes verwendet werden, das aus Knoten (Sinneinheiten) und Kanten (Wegstrecken bei Gedächtnisleistungen) besteht. Die Aneignung neuer Kenntnisse bedeutet dann ihre Integration in vorhandene Netze; es werden neue Sinneinheiten sowie Kanten zu vorhandenen Sinneinheiten ausgebildet.

Unter einem Begriff kann man eine festgelegte Bedeutung eines Wortes verstehen. Die Festlegung kann explizit z. B. durch eine Definition im Rahmen einer Wissenschaft oder implizit durch die Art der Verwendung des Wortes in Kontexten erfolgen.

Bei der Aneinung eines Begriffes im Mathematikunterricht geht es um die Aneignung von bestimmten Kenntnissen, d. h. um die weitere Ausbildung des semantischen Netzes der Schüler. Dabei können neue Wörter als neue Sinneinheiten angeeignet, vorhandene Wörter mit neuen Bedeutungen belegt oder weitere Verbindungen zwischen Sinneinheiten ausgebildet werden. Die Aneignung von Begriffen kann sich deshalb über einen längeren Zeitraum der schrittweisen Ausbildung der betreffenden Teile des semantischen Netzes erstrecken.

Bei der Aneignung wird der Begriff oft durch einen Prototyp repräsentiert. Dies ist ein typisches Beispiel, das für den Begriff steht und beim Nennen des Wortes zuerst reaktiviert wird. Als Prototyp für das Parallelogramm steht in der Regel eine Figur mit zwei Paaren paralleler Seiten, von denen eine waagerecht liegt, etwas länger als die andere ist und einen Winkel von etwa 50 ° mit dieser bildet.

Im Prozess der Aneignung von Begriffen im Mathematikunterricht sowie bei der Überprüfung seiner Ergebnisse können zwei Grundhandlungen unterschieden werden:

- Ein vorgegebenes Objekt wird durch den Schüler oder Lehrer mit dem betreffenden Wort bezeichnet bzw. als nicht zutreffend erkannt (Begriffsidentifizierung).
- Zu dem betreffenden Wort stellt sich der Schüler einen Repräsentanten des Begriffs vor bzw. gibt ihn schriftlich, durch eine Zeichnung oder die Herstellung eines Modells an (Begriffsrealisierung).

Es kann sich in beiden Fällen um inner- als auch um außermathematische Objekte handeln.

Ein Grundproblem der Aneignung von allen Begriffen im Mathematikunterricht ist die Berücksichtigung des Wechselverhältnisses von formalen und inhaltlichen Bedeutungen. So bezeichnet der Begriff Quadrat sowohl eine bestimmte ebene Figur in der Mathematik als auch eine bestimmte Form von realen Flächenstücken bzw. Begrenzungsflächen von Gegenständen. Eine Vermittlung zwischen den konkreten Objekten und den abstrakten Begriffen erfolgt mit Hilfe materieller Modelle der Begriffe, die als Unterrichtsmittel verwendet werden. Ein quadratisches Plättchen ist einerseits ein konkretes Objekt (mit einem Volumen) und andererseits eine Abstraktion der Form von Flächen, die in der Praxis vorkommen.

1.2 Inhalte der Bildungsstandards und Rahmenpläne

Rahmenlehrplan für die Grundschule, 2004

Anforderungen:

- Objekte aus der Umwelt beschreiben, nach ihren mathematischen Eigenschaften ordnen
- ausgewählte Körper und ebene Figuren benennen und darstellen, skizzieren, zeichnen, (zer)legen, zusammensetzen, messen, formen, falten und schneiden
- Beziehungen zwischen Körpern und ebenen Figuren beschreiben
- Lagebeziehungen in der Ebene und im Raum erkennen, beschreiben, realisieren und verändern
- identische und spiegelsymmetrische Bilder erkennen, benennen, vervollständigen und darstellen, Beziehung zwischen Original und Bild bei Spiegelungen benennen
- verschobene und gedrehte Figuren erkennen, benennen, vervollständigen und herstellen
- Körper und ebene Figuren bezüglich ihrer Abmessungen direkt und indirekt vergleichen
- den Zusammenhang von Umfang und Flächeninhalt erkennen und beschreiben
- vergrößerte oder verkleinerte Figuren erkennen, benennen, vervollständigen und herstellen, maßstäbliche Zeichnungen lesen

Inhalte: *kursiv*: fakultative Inhalte, über Auswahl entscheidet Fachkonferenz

- Punkt, Gerade, Strecke, Kreis
- *Labyrinthe, Färbungsprobleme, optische Täuschungen,*
- *Figuren, die in einem Zug gezeichnet werden können; Durchlaufbarkeit von Netzen*
- Einander schneiden, parallel zueinander, senkrecht zueinander, rechter Winkel
- Dreieck, Viereck, Rechteck, Quadrat, Seite, gegenüberliegende und benachbarte Seiten
- Parallelogramm, Rhombus (Raute), Drachenviereck, Trapez
- Spiegelung, Spiegelachse, deckungsgleich
- *Symmetrieachse, ist symmetrisch zu, Form, Größe, Lage zur Spiegelachse von Original und Bild, Klecksbilder, Faltschnitte*

– Bild, Original, Symmetrie, Verschiebung, Drehung, drehsymmetrische Figuren, schubsymmetrische Muster und Bordüren
– länger als, kürzer als, gleich lang, größer als, kleiner als, gleich groß
– Fläche, Flächeninhalt, Umfang
– maßstäbliches Vergrößern und Verkleinern, Maßstab

Bildungsstandards für den Mittleren Schulabschluss und den Hauptschulabschluss zur Geometrie, 2003

Leitidee Messen *(Kursiv*: nur Standard für den mittleren Abschluss)

Die Schülerinnen und Schüler

– berechnen Flächeninhalt und Umfang von Rechteck, Dreieck und Kreis sowie daraus zusammengesetzten Figuren,
– *berechnen Streckenlängen und Winkelgrößen, auch unter Nutzung von trigonometrischen Beziehungen und Ähnlichkeitsbeziehungen,*
– nehmen in ihrer Umwelt gezielt Messungen vor, entnehmen Maßangaben aus Quellenmaterial, führen damit Berechnungen durch und bewerten die Ergebnisse sowie den gewählten Weg in Bezug auf die Sachsituation.

Leitidee Raum und Form

Die Schülerinnen und Schüler

– erkennen und beschreiben geometrische Strukturen in der Umwelt,
– operieren gedanklich mit Strecken, Flächen und Körpern,
– stellen geometrische Figuren im kartesischen Koordinatensystem dar,
– *analysieren und klassifizieren geometrische Objekte der Ebene und des Raumes,*
– beschreiben und begründen Eigenschaften und Beziehungen geometrischer Objekte (wie Symmetrie, *Kongruenz, Ähnlichkeit, Lagebeziehungen) und nutzen diese im Rahmen des Problemlösens zur Analyse von Sachzusammenhängen*,
– wenden Sätze der ebenen Geometrie bei Konstruktionen, Berechnungen *und Beweisen* an, insbesondere den Satz des Pythagoras *und den Satz des Thales*,
– zeichnen und konstruieren geometrische Figuren unter Verwendung angemessener Hilfsmittel wie Zirkel, Lineal, Geodreieck oder dynamischer Geometriesoftware,
– *untersuchen Fragen der Lösbarkeit und Lösungsvielfalt von Konstruktionsaufgaben und formulieren diesbezüglich Aussagen,*
– *setzen geeignete Hilfsmittel beim explorativen Arbeiten und Problemlösen ein*

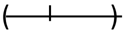
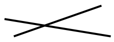
2 Grundbegriffe und Zeichenfertigkeiten

1.1 Zu den Bedeutungen der Begriffe in der Mathematik

Die Begriffe *Punkt, Gerade und Ebene* sind Grundbegriffe der Geometrie, d. h. sie werden nicht definiert und bilden zusammen mit den Axiomen die axiomatische Grundlage der Geometrie, aus der alle weiteren geometrischen Begriffe und Sätze gewonnen werden.

Wie alle Begriffe in der Mathematik sind auch die geometrischen Begriffe theoretische Konstrukte, also ideelle Objekte, die nur im Denken existieren. Das Besondere der Geometrie ist, dass viele der Denkobjekte zeichnerisch oder durch Modelle dargestellt werden können, womit sie besonders anschaulich sind. Dies gilt allerdings nur für höchstens dreidimensionale Objekte in der Euklidischen

Geometrie. Die zeichnerische Darstellung darf aber nicht mit dem mathematischen Begriff verwechselt werden. So hat jede Zeichnung einer Geraden eine bestimmte Breite und eine endliche Länge.

Für die zeichnerische Darstellung von Punkte gibt es verschiedenen Möglichkeiten:
ein Kreuz: ×, ein kleiner nicht ausgefüllter Kreis: ◦, ein kleiner ausgefüllter Kreis: •, ein kleiner Strich senkrecht zu einer Linie () oder der Schnitt zweier beliebiger Linien: 
Es ist üblich, aber nicht erforderlich, dass der Punkt auch beschriftet ist.

Das Wort *Linie* ist kein Fachbegriff der Mathematik, wird aber im Mathematikunterricht vielfach verwendet (gerade Linie, gestrichelte Linie, Liniendiagramm, Kreislinie). Die Eigenschaften gerade und gekrümmt sind Merkmale von Kurven (als eindimensionale zusammenhängende Punktemengen) und können nur mit Mitteln der Differentialgeometrie definiert werden.

Die Bezeichnung von *Geraden, Strahlen* (*Halbgeraden*) und teilweise auch *Strecken* durch Punkte ist unterschiedlich. Es wird bei Strecken und Winkeln auch in den Bezeichnungen zwischen dem geometrischen Objekt und seinem Maß (z. B. Länge Strecke) unterschieden.

Es wird zwischen dem *Rand (Endpunkten)* und dem *Inneren* einer Strecke unterschieden.

Zwei Strecken sind *senkrecht zueinander*, wenn die Geraden, auf denen sie liegen, senkrecht zueinander sind, d. h. zueinander senkrechte Strecken müssen sich nicht schneiden.

Zwei Strecken *schneiden einander*, wenn sie einen gemeinsamen inneren Punkt haben, d. h. das Lot von einem Punkt auf eine Strecke schneidet diese nicht, sondern berührt sie nur.

Die *Richtung* einer Geraden (Halbgerade, Strecke) ist die Klasse aller dazu parallelen Geraden. Für Strahlen und Strecken wird auch ein *Richtungssinn* erklärt, der mit einer Pfeilspitze angeben wird.

Es gibt verschiedenen Definitionen des Begriffs *Winkel*. Die Definition als ein Paar von Strahlen mit einem gemeinsamen Anfangspunkt wird z. T. als „*Elementarwinkel*" bezeichnet und sollte in Klasse 5 verwendet und dann durch weitere Aspekte angereichert werden. Ein Elementarwinkel hat keine Orientierung und nimmt nur Werte im Intervall von 0° bis 180° an.

Zur mathematischen Erfassung von Drehungen dient der Begriff *Drehwinkel*. Dazu sind eine Orientierung des Winkels und die Festlegung eines Drehsinns (links/rechts herum) nötig. Als Maß kann das Intervall [0°, 360°] verwendet werden, wenn der Drehsinn sprachlich ausgedrückt wird. Der Drehsinn wird in der Mathematik durch ein Vorzeichen definiert, wobei positive Winkelmaße eine Linksdrehung und negative eine Rechtsdrehung bedeuten. Dies kann auf beliebige reelle Winkelmaße (Bogenmaß) verallgemeinert werden.

Ein Winkel kann auch als Teil einer Ebene definiert werden. Die Schenkel begrenzen in diesem Fall zwei *Winkelfelder*, das Innere und das Äußere des Winkels.

1.2 Bedeutungen der Begriffe außerhalb der Mathematik

Mit dem Wort *Punkt* werden ein kleiner kreisrunder Fleck bzw. Tupfen, ein punktförmiges Zeichen, ein geographischer Ort oder ein Zeitpunkt bzw. Stadium innerhalb eines Prozesses (jetzt ist der Punkt gekommen, ein toter Punkt) bezeichnet.

Das Wort *Gerade* bezeichnet eine gerade Teilstrecke einer Rennstrecke (der Läufer biegt auf die letzte Gerade ein), und im Boxen eine Boxhieb der Schlagfaust (die rechte Gerade).

Das Eigenschaftswort *gerade* steht für: in unveränderter Richtung fortlaufend, nicht krumm (eine gerade Linie, den Draht gerade biegen); in natürlicher Richtung, aufrecht (gerade sitzen); nicht schief, waagerecht (Das Bild hängt nicht gerade.); eben, flach (eine gerade Strecke); freimütig, aufrichtig (gerade heraus); genau, auch im Kleinsten übereinstimmend (Gerade das meine ich.)

Das Wort *Strecke* bezeichnet einen Abschnitt eines zurückgelegten Weges (Wegstrecke), den Abschnitt einer Bahnlinie (der Zug hielt auf freier Strecke), im Sport eine für einen Wettkampf festgelegte Entfernung (Laufstrecke), im Bergbau einen horizontalen Grubenbau und bei der Jagd das erlegte Wild (ein Tier zur Strecke bringen).

Mit *Strahl* wird ein von einer Lichtquelle ausgehendes Licht (Lichtstrahl), eine aus einer Öffnung hervor schießende Flüssigkeit (Wasserstrahl) und in der Physik ein sich geradlinig ausbreitender Teilchenstrom (radioaktive Strahlen) bezeichnet.

Das Wort *Richtung* wird in zwei Bedeutungen verwendet, als orientierte Richtung (in Richtung Bahnhof) und als nichtorientierte Richtung (die Nord-Süd-Richtung), die dem mathematischen Begriff entspricht.

Mit dem Wort *Winkel* wird im Alltag ein Werkzeug oder Bauteil, eine Ecke in oder an Gebäuden oder Zimmern, einen Teil eines Raumes (toter Winkel), eine abgelegene Gegend, ein dreieckförmiges Zeichen und das Gebiet bei den oberen Ecken eines Tores (Torwinkel) bezeichnet.

Senkrecht bedeutet im Alltag, dass etwas senkrecht zur Erdoberfläche bzw. zur Waagerechten ist (Der Zaunpfahl steht senkrecht).

2 Bewegungen und Symmetrien

2.1 Bedeutungen der Begriffe in der Mathematik und im Mathematikunterricht

Bewegung (Kongruenzabbildung) ist in der Mathematik der Oberbegriff für die geometrischen Abbildungen Geradenspiegelung, Punktspiegelung, Verschiebung, Drehung und Zusammensetzungen aus ihnen in der Ebene. Diese Abbildungen bilden jeweils die gesamte Ebene auf sich ab, d. h. jedem Punkt der Ebene wird genau ein anderer zugeordnet. Grafisch lässt sich dies immer nur für einige Punkte darstellen. Der Begriff Bewegung bzw. Kongruenzabbildung wird im Mathematikunterricht in der Regel nicht behandelt.

Im Unterschied zu Verschiebungen und Drehungen ändert sich bei Spiegelungen der Umlaufsinn der Punkte eines Vielecks. Dies wird durch die Unterscheidung von gleichsinnigen Bewegungen (Verschiebung, Drehung, Punktspiegelung) und ungleichsinnigen Bewegungen (Geradenspiegelung) erfasst, die zu der Unterscheidung von gleichsinniger und ungleichsinniger Kongruenz führen.

Der Begriff Kongruenz/kongruent kann auf verschiedene Weise festgelegt werden. In einem kongruenzgeometrischen Aufbau der Geometrie ist er ein nicht definierter Grundbegriff. Bei einem abbildungsgeometrischen Vorgehen wird er mithilfe der Kongruenzabbildungen definiert. Die Kongruenz von Vielecken kann auch über die Gleichheit aller einander entsprechenden Seiten und Winkel erklärt werden.

Eine Figur heißt symmetrisch**,** wenn es außer der identischen Abbildung weitere Kongruenzabbildungen gibt, die die Figur auf sich abbilden. Diese Kongruenzabbildungen nennt man dann auch "Symmetrien" der Figur. Man unterscheidet die Achsensymmetrie, Punktsymmetrie, Verschiebungssymmetrie und Drehsymmetrie. Die Verschiebungssymmetrie kann in der Ebene nur für Figuren mit unendlicher Ausdehnung (z. B. Streifen) betrachtet werden. Verschiebungssymmetrische Streifen heißen Bandornamente.

2.2 Bedeutungen der Begriffe außerhalb der Mathematik

Das Wort *Bewegung* bezeichnet einen Vorgang, bei dem bestimmte Objekte ihre Lage, Stellung oder Haltung ändern, einen inneren Zustand eines Menschen oder ein gemeinsames Bestreben einer Anzahl von Menschen.

Verschiebung und *Drehung* bezeichnen bestimmte Ortsveränderungen eines Körpers. Als Spiegelung wird die Erzeugung von Bildern an glatten Oberflächen oder Luftschichten (Glasscheiben, Wasser, Fata Morgana), eine medizinische Untersuchungsmethode innerer Organe oder ein bestimmtes Verhalten eines Menschen bezeichnet. Spiegelbilder können auch durch Umklappen oder Zusammenfalten (Klecksbilder) erzeugt werden.

Das Wort *symmetrisch* wird im Alltag in der Regel nur zur Beschreibung einer Achsensymmetrie verwendet.

Die Bedeutung des Fremdwortes *kongruent* (lat. congruens = übereinstimmend, entsprechend) entspricht auch in seiner bildungssprachlichen Verwendung (in allen Punkten übereinstimmend) der mathematischen Bedeutung des Wortes.

Die Bedeutungen der Begriffe *Figur, Seite, Fläche, Ecke* und *Höhe* innerhalb und außerhalb der Mathematik sowie einige Standpunkte zum sicheren Wissen und Können werden in der Broschüre zur räumlichen Geometrie diskutiert bzw. angegeben.

3 Dreiecke

3.1 Bedeutungen der Begriffe in der Mathematik

Ein *Dreieck* ist eine Punktmenge, die aus drei nicht kollinearen Punkten und allen Punkten, die zwischen zwei dieser Punkte liegen, besteht.
Es gibt eine Konvention über die Standardbezeichnung der Punkte, Seiten und Winkel.

3.2 Bedeutungen der Begriffe außerhalb der Mathematik

Das Wort Dreieck bezeichnet ein dreieckförmiges Zeichengerät (Zeichendreieck), eine dreieckförmige Landfläche (im Dreieck zwischen den Orten …) oder im Sport Teile der Torfläche an den oberen Ecken des Tores (Der Ball ging genau ins rechte Dreieck). Im Mathematikunterricht werden Dreiecke durch flache dreieckförmige Plättchen veranschaulicht, die auch als Dreieck bezeichnet werden.

Das Dreieck ist eine stabile Figur. Dreiecke treten deshalb oft im Bauwesen und der Technik auf wie bei Fachwerken, Stahlkonstruktionen, Baugerüsten.

4 Vierecke

4.1 Bedeutungen der Begriffe in der Mathematik

Ein *Vieleck* (n-Eck, Polygon) ist ein geschlossener Streckenzug. Man unterscheidet einfache, konvexe, konkave und überschlagene Vielecke sowie zwischen dem Rand, dem Inneren und der Fläche (Vereinigung aus Rand und Innerem) eines Vielecks.

Das Wort *Quadrat* hat zwei Bedeutungen: eine geometrische Figur und die zweite Potenz einer Zahl bzw. eines Terms.

Ein *gleichschenkliges Trapez* ist ein Trapez, das eine Symmetrieachse hat. Die Gleichheit der Schenkel ist nicht hinreichend.

Ein *Drachenviereck* ist ein Viereck, in dem eine Diagonale Symmetrieachse ist. Es kann auch konkav sein. Die Eigenschaft, dass ein Drachenviereck zwei Paare gleichlanger Nachbarseiten hat, kann nicht zur Definition benutzt werden.

4.2 Bedeutungen der Begriffe außerhalb der Mathematik

Mit *Trapez* wird eine an zwei frei hängenden Seilen befestigte kurze Holzstange für turnerische oder artistische Schwungübungen bezeichnet.

5 Kreis

5.1 Bedeutungen der Begriffe in der Mathematik

Der Kreis kann definiert werden als Menge aller Punkte einer Ebene, die zu einem Punkt der Ebene den gleichen Abstand haben, bzw. genetisch als Punktmenge, die entsteht, wenn eine Strecke in der Ebene um einen Endpunkt rotiert. Der Mittelpunkt gehört nicht zum Kreis.

Analog zum Viereck unterscheidet man den Rand (Kreislinie), das Innere und die Fläche eines Kreises. Die Wörter Radius und Durchmesser werden in zwei Bedeutungen verwendet, als Strecke (Ein Kreis hat unendlich viele Radien bzw. Durchmesser) oder Länge einer Strecke (Der Radius des Kreises beträgt 3 cm).

Ein Bogen ist allgemein ein Teil einer Kurve. Ein Kreisbogen ist ein Teil eines Kreises, der entsteht, wenn ein Kreis durch eine Gerade geschnitten wird. Die Bezeichnung von Kreisbögen erfordert eine Orientierung, der Bogen AB und der Bogen BA sind zusammen ein Kreis.

5.2 Bedeutungen der Begriffe außerhalb der Mathematik

Mit dem Wort Kreis wird im Alltag folgendes bezeichnet: eine kreisförmige Gruppierung bzw. Figur (einen Kreis bilden); eine Gruppe von Personen, die sich zusammengefunden haben (im Kreise der Gäste); eine mehr oder weniger lockere Gemeinschaft von Personen mit gleichen Interessen; Gruppen, Teile der Bevölkerung, der Gesellschaft; ein umgrenzter Bereich (Kreis einer Wissenschaft); eine Verwaltungseinheit (Landkreis).

6 Maßstab und Ähnlichkeit

6.1 Bedeutungen der Begriffe in der Mathematik

Der Begriff *Maßstab* wird in der Mathematik nur bei der Eintafelprojektion eines Köpers zur Angabe der Höhe der Punkte über der Projektionsebene verwendet (Höhenmaßstab). Er wird ansonsten in der Mathematik nicht definiert, da er Beziehungen zwischen mathematischen und außermathematischen Objekten beinhaltet.
Dies betrifft auch die mit dem Begriff Maßstab verbundenen Begriffe *Verhältnis* und *Größe*. In der Mathematik wird lediglich der Begriff *Streckenverhältnis* als Quotient der Längen zweier Strecken erklärt, der grundlegend für die Ähnlichkeit ist. Der Maßstab im geographischen Sinne ist eine spezielle Form eines Streckenverhältnisses.
Auf den Begriffen Verhältnis und Größe bauen allerdings solche Gebiete der Schulmathematik wie Proportionalität und Prozentrechnung auf, die ebenfalls zwischen Mathematik und Wirklichkeit angesiedelt sind. Z. B. ist das dabei verwendete Zeichen □ in der Mathematik nicht erklärt. Beim Umgang mit Maßstäben wird die direkte Proportionalität verwendet.

Der Begriff *Ähnlichkeit* kann in der Mathematik auf zwei Arten definiert werden. Die figurgeometrische Definition über die Gleichheit von Winkeln und Streckenverhältnissen ist allerdings nur für ebene geradlinig begrenzte Figuren möglich. Die abbildungsgeometrische Definition über die Existenz einer Ähnlichkeitsabbildung (Zusammensetzung aus einer Bewegung und einer zentrischer Streckung) gilt für beliebige Figuren.

Im Mathematikunterricht kann die Ähnlichkeit auch als Verallgemeinerung der maßstäblichen Vergrößerung bzw. Verkleinerung von Figuren eingeführt werden. Dieser Weg ist eine gewisse „Verbindung" aus den beiden mathematischen Zugängen und knüpft an die Kenntnisse und Vorstellungen der Schüler zum Maßstab in der Geographie an. Er sollte deshalb in der Schule verwendet werden. Die Gleichheit der Winkel bei zueinander ähnlichen ebenen Figuren kann man dabei in der Realschule mit in die Begriffserklärung einbeziehen und im Gymnasium für Spezialfälle auch aus der Verhältnisgleichheit der Strecken beweisen.

6.2 Bedeutungen der Begriffe außerhalb der Mathematik

Als *Maßstab* bezeichnet man in der Geographie und der Technik das Verhältnis zwischen der abgebildeten Größe auf einer Karte, einem Plan oder bei einem Modell und der entsprechenden Größe in der Wirklichkeit. Ein Maßstab wird in der Geographie immer als Verhältnis in der Form „1 : n" angeben. Die Zahl n wird als Maßstabszahl bezeichnet und gibt an, wie viel Einheiten in Wirklichkeit einer Einheit auf der Karte entsprechen.
Neben dieser Bedeutung wird das Wort Maßstab noch verwendet für eine vorbildhafte Norm, mit der Leistungen von Menschen beurteilt werden (Er hat Maßstäbe gesetzt,) und (selten) für ein Lineal mit einer maßstäblichen Einteilung.

Der Begriff *Verhältnis* bedeutet allgemein eine Beziehung, bei der zwei Dinge oder zwei Sachverhalte miteinander verglichen werden. In den Naturwissenschaften wird dazu der Quotient zweier Größen gebildet. Bei nichtgleichartigen Größen (z. B. Weg und Zeit, Masse und Preis) bedeutet dies eine Normierung der einen Größe (im Zähler) auf eine Einheit der anderen Größe (im Nenner). Bei gleichartigen Größen ist das Verhältnis dimensionslos.
Die andere Bedeutungen des Wortes Verhältnis als Beziehung zwischen Menschen haben keine gemeinsamen Bedeutungen mit der Verwendung in der Mathematik.

Zwei Dinge werden als einander umgangssprachlich *ähnlich* bezeichnet, wenn sie in bestimmten Merkmalen übereinstimmen. (ähnliche Gedanken, ähnliche Bilder). Man sagt, zwei Personen sind einander ähnlich, wenn sie sich im Aussehen nur wenig unterscheiden. Sie können dabei gleichgroß (Zwillinge) oder unterschiedlich groß (Mutter und Tochter) sein.

Bei Vergrößerungen oder Verkleinerungen von ebenen oder räumlichen Objekten spielen die Winkel keine vordergründige Rolle, da es sich oft um rechte Winkel handelt.

Bei Vergrößerungen oder Verkleinerungen haben beide Objekte ein unterschiedliches Wesen. Eines ist immer das Original, d.h. die Realität, das andere ist ein neu geschaffenes, künstliches Objekt, das aus einem anderen Material besteht (z. B. Papier) und als Vergrößerung oder Verkleinerung einen bestimmten Zweck erfüllt. Bei den mathematischen Begriffen Bild und Original, die bei Abbildungen und so auch in der Ähnlichkeit verwendet werden, sind beide Objekte von gleichem Status, es handelt sich in beiden Fällen um mathematische Figuren. Sie können ihre Rolle auch tauschen, wenn man die inverse Abbildung betrachtet.

Die Ähnlichkeit ist eine symmetrische Relation. Bezieht man aber den Ähnlichkeitsfaktor in die Betrachtungen ein (was bei dem Weg über Vergrößerungen und Verkleinerungen sinnvoll ist), so ergibt sich der Kehrwert des Faktors, wenn man die Seiten der Relation vertauscht (wenn $F_1 \sim F_2$ mit dem Faktor k, so ist $F_2 \sim F_1$ mit dem Faktor 1/k).