

# **Sicheres Wissen und Können**

## **Arbeiten mit Variablen, Termen, Gleichungen und Ungleichungen**

### **Sekundarstufe I**

#### **Auszug<sup>1</sup>**

---

<sup>1</sup> Der Auszug enthält nur die Standpunkte zum Sicherem Wissen und Können sowie die entsprechenden Aufgaben. Die weiteren Inhalte der Broschüre sind auf den Seiten zur Arbeit mit Variablen, Termen, Gleichungen und Ungleichungen zu finden.

Herausgeber: Institut für Qualitätsentwicklung  
Mecklenburg-Vorpommern  
Werderstraße 124  
19055 Schwerin

Autoren: Evelyn Kowaleczko  
Dieter Leye  
Marion Lindstädt  
Elke Pietsch  
Marion Roscher  
Dr. Christine Sikora  
Prof. Dr. Hans-Dieter Sill

Druck: Universitätsdruckerei Rostock

Auflage: September 2010

## Inhaltsverzeichnis

Vorwort .....	4
Zur Entwicklung und zum Einsatz der Broschüre .....	5
1   Begriffe Variable, Term, Gleichung und Ungleichung .....	6
Aufgaben .....	7
2   Erkennen der Struktur von Termen.....	11
Aufgaben .....	12
3   Umformen von Termen.....	14
Aufgaben .....	15
4   Inhaltliches Lösen von Gleichungen und Ungleichungen.....	18
Aufgaben .....	19
5   Umformen und Umstellen von Gleichungen und Ungleichungen .....	21
Aufgaben .....	22
6   Lösen von linearen Gleichungen, Ungleichungen und Gleichungssystemen.....	25
Aufgaben .....	26
7   Lösen quadratischer Gleichungen .....	29
Aufgaben .....	30

## Vorwort

Die Kultusministerkonferenz hat am 04.12.2003 für das Fach Mathematik bundesweit geltende Bildungsstandards für den Mittleren Abschluss und am 15.10.2004 für den Hauptschulabschluss verabschiedet. Die Bildungsstandards sollen in allen Bundesländern im Rahmen der Lehrplanarbeit, der Schulentwicklung sowie der Lehreraus- und -fortbildung implementiert und angewendet werden. Bildungsstandards formulieren fachliche und fachübergreifende Basisqualifikationen, die für die weitere schulische und berufliche Ausbildung von Bedeutung sind und die anschlussfähiges Lernen ermöglichen. Sie beschreiben zu erwartende Ergebnisse von Lernprozessen. Deren Anwendung bietet Hinweise für notwendige Förderungs- und Unterstützungsmaßnahmen.

In Zusammenarbeit der Fachberater für Regionale Schulen mit Fachdidaktikern des Instituts für Mathematik der Universität Rostock wurden entsprechende Materialien zur Unterstützung der Lehrerinnen und Lehrer entwickelt.

In der vorliegenden Broschüre wird für ein abgegrenztes Thema durch Zielbeschreibungen und Aufgabenangebote der entsprechende Anforderungsbereich I der Bildungsstandards charakterisiert. Die Broschüre kann in vielfältiger Weise für die Unterrichtsentwicklung an der Schule genutzt werden. Die im theoretischen Teil enthaltenen Standpunkte und Vorschläge können fachliche Diskussionen und schulinterne Festlegungen unterstützen. Das umfangreiche Aufgabenmaterial wird u. a. zur Entwicklung täglicher Übungen und schulischer Testarbeiten sowie für die differenzierte Arbeit mit Schülern, die diese Anforderungen noch nicht erfüllen, empfohlen.

Das Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur Mecklenburg-Vorpommern stellt allen Schulen eine Broschüre zur Verfügung. Sie ist unter [www.mathe-mv.de](http://www.mathe-mv.de) zum Download veröffentlicht.

Ich bedanke mich bei den Autorinnen und Autoren dieser Broschüre, die neben ihrer Unterrichts- bzw. Lehrtätigkeit über ein Jahr intensiv an diesem Projekt gearbeitet haben.

Den Lehrerinnen und Lehrern wünsche ich viel Erfolg bei der täglichen Arbeit.



Henry Tesch

Minister für Bildung, Wissenschaft und Kultur

## Zur Entwicklung und zum Einsatz der Broschüre

Mit dieser Broschüre wird die Reihe von Materialien zum sicheren Wissen und Können im Mathematikunterricht in Mecklenburg-Vorpommern fortgesetzt. Die bisherigen Titel der Reihe sind „Größen“ (2. Aufl., 2005), „Geometrie in der Ebene“ (2005), „Geometrie im Raum“ (2005) und „Rechnen mit Zahlen und Größen“ (2009). Die Broschüren wurden an alle Schulen verteilt und sind unter [www.mathe-mv.de](http://www.mathe-mv.de) verfügbar.

Die Standpunkte und Aufgaben in der Broschüre verstehen wir als einen ersten Ansatz zur Festlegung eines landesweit einheitlichen Minimalniveaus, das mit allen Schülern<sup>2</sup> zu erreichen ist.

Die Standpunkte können weiterhin als Ausgangspunkt für Diskussionen in Fachschaften zu zentralen Fragen der Entwicklung des Rechnenkönnens verwendet werden und sollten zu entsprechenden Vereinbarungen an der Schule führen. Im Einzelnen können sie Grundlage für Diskussionen zu folgenden Themenkreisen sein, bei denen auch Festlegungen an der Schule vereinbart werden sollten.

- Aspekte der Begriffe Variable, Term, Gleichung und Ungleichungen und ihre Aneignung im Laufe der Schulzeit
- Möglichkeiten der Entwicklung im Erkennen der Struktur von Termen
- Möglichkeiten zum inhaltlichen Lösen von Gleichungen und Ungleichungen in den Klassen 5 bis 10
- Möglichkeiten zur Entwicklung von Fähigkeiten im Umstellen von Gleichungen
- Möglichkeiten zum Lösen von linearen Gleichungen und Gleichungssystemen
- Möglichkeiten zum inhaltlichen und formale Lösen von quadratischen Gleichungen

Den schrittweise entstehenden Broschüren zum sicheren Wissen und Können liegt ein Konzept zu Grunde, das in den Broschüren zur Arbeit mit Größen und zur räumlichen Geometrie ausführlich erläutert wurde. In dieser Broschüre soll nur noch einmal herausgestellt werden, dass unter sicherem Wissen und Können solche Bestandteile der mathematischen Bildung eines Schülers bzw. Schulabsolventen verstanden werden, die er auch nach der Schule jederzeit ohne vorherige Reaktivierung abrufen und sicher anwenden kann.

Als Grad der Sicherheit halten wir es für erforderlich, dass *jeder Schüler* von 3 (6, 9, 12, ...) Aufgaben zu einer bestimmten Anforderung *mindestens* 2 (4, 6, 8, ...) richtig löst. Dies bedeutet, dass jeder Schüler in einer Testarbeit zum sicheren Wissen und Können mindestens 66 % der Punkte erreicht.

Um die Aneignung dieser Mindestkompetenzen in einem Test leicht überprüfen zu können, sollte die Anzahl der Teilaufgaben zu einem Anforderungsbereich ein Vielfaches von 3 sein. In der Broschüre haben deshalb die Aufgaben in der Regel eine durch 3 teilbare Anzahl von Teilaufgaben.

Beim Zusammenstellen eines kriteriumsorientierten Tests zum sicheren Wissen und Können aus den Aufgaben der Broschüre sollten weiterhin folgende Aspekte beachtet werden.

- Die Testarbeit darf nicht speziell vorbereitet werden. Die letzten Übungen sollten mindestens etwa 3 Wochen zurückliegen.
- Da es sich um Mindestforderungen handelt, werden alle Aufgaben unabhängig vom tatsächlichen Anforderungsniveau als gleichwertig betrachtet.
- Alle einzelnen Teilaufgaben (in dieser Broschüre mit a), b) ... bezeichnet) sollten nur mit einem Punkt (richtig oder falsch bzw. nicht gelöst) bewertet werden.

Wir wünschen allen Kolleginnen und Kollegen viel Erfolg bei der Arbeit mit unserem Material!

Rostock, August 2010

---

<sup>2</sup> Bei allen Bezeichnungen von Personen oder Personengruppen sind immer beide Geschlechter gemeint.

# 1 Begriffe Variable, Term, Gleichung und Ungleichung

## Klasse 6:

Die Schülerinnen und Schüler

- verwenden für Buchstaben das Wort „Variable“ in den folgenden Verwendungen: Formulierung von Rechengesetzen, Unbekannte in einer Gleichung bzw. Ungleichung, Bezeichnung für Größen in der Geometrie und aus der Physik,
- wissen, dass mit dem Buchstaben  $x$  in einer Gleichung eine unbekannte Zahl bezeichnet wird,
- kennen die üblichen Bezeichnungen für die Größen Länge ( $l$ ) bzw. Weg ( $s$ ), Flächeninhalt ( $A$ ), Rauminhalt ( $V$ ), Zeit ( $t$ ), Masse ( $m$ ),
- können für ein Dreieck  $ABC$  die Eckpunkte, die Seiten und Winkel mit den Standardbezeichnungen ( $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ ) in der richtigen Anordnung beschriften,
- wissen, dass Buchstaben unterschiedliche Bedeutung haben können und können dies an folgenden Buchstaben erläutern:  $a, b, m, t$
- kennen die Bezeichnungen „Term“, „Gleichung“ und „Ungleichung“ und können Beispiele für Terme und Gleichungen mit einer Variablen und Ungleichungen ohne Variable erkennen und angeben,
- wissen, dass eine Formel eine Gleichung ist und bei Anwendung der Formel die Variablen auf der rechten Seite mit Größenangaben belegt werden.

## Klasse 8:

Die Schülerinnen und Schüler

- wissen, dass sich Variable ändern können und man die Abhängigkeit der Veränderung einer Variablen von der Veränderung einer anderen untersuchen kann,
- wissen, dass man Variable durch Zahlen, Größen oder andere Terme belegen kann und können in einfachen Fällen solche Belegungen vornehmen,
- können Beispiele für Terme, Gleichungen und Ungleichungen mit bis zu drei Variablen erkennen und angeben,
- wissen, dass man Terme verwendet, um Rechenausdrücke, geometrische Beziehungen oder außermathematische Sachverhalte allgemein zu beschreiben,
- können die Konventionen zum Weglassen des Multiplikationszeichens und der Faktoren  $1$  und  $-1$  sowie der Ordnung in Produkten aus Zahlen und Variablen anwenden,
- können Terme zu gegebenen Rechenausdrücken mit maximal 2 Variablen und zwei Operationen aufstellen,
- können Terme mit maximal 2 Variablen und 2 Operationen durch Rechenausdrücke, Streckenlängen oder außermathematische Sachverhalte interpretieren.

## Klasse 10, Gymnasium:

Die Schülerinnen und Schüler

- können in allgemeinen Darstellungen von Gleichungen und Funktionen die Variablen und Parameter unterscheiden
- können Gleichungen bzw. Funktionsgleichungen mit bis zu zwei Variablen und drei Parametern angeben.

## Aufgaben

### Klasse 6

1. Welche Buchstaben können als Variable bezeichnet werden?

a)  $6 \cdot x - 5 = 13$

b)  $a = 3 \text{ cm}$

c)  $a + b = b + a$

d)  $m = 3 \text{ t}$

e)  $2 \cdot n + 1 < 10$

f)  $V = a \cdot b \cdot c$

2. Gib zwei Bedeutungen an, die der folgende Buchstabe in der Mathematik haben kann.

a) a

b) b

c) m

3. Mit welchem Buchstaben wird die folgende Größe bezeichnet?

a) Zeit

b) Masse

c) Volumen

d) Länge

e) Weg

f) Flächeninhalt

4. Kennzeichne alle Terme.

3	$5x$	$3 + 5$	$8 + 3x$	$3 + - 7$	$4 +$	$8 \cdot 8$
$5a -$	$(5 : 9 + 8x)$	$9x : x$	$0 \cdot x \text{ €}$	$8 < 10$	$3   12$	
$6 - 4 = 2$	$3^\circ \text{ C} > - 3^\circ \text{ C}$					

5. Gib einen Term an, der aus Zahlen und Variablen besteht.

6. Welche der folgenden mathematischen Ausdrücke sind Gleichungen?

a)  $3 + 4 = 7$

b)  $5 > 3$

c)  $6 \cdot x - 18 = 12$

d)  $a + b = b + a$

e)  $A = a \cdot b$

f)  $2 \cdot x + 1$

7. Gib eine Gleichung an, in der eine Variable vorkommt.

8. Gib zwei verschiedene Ungleichungen mit Zahlen an.

9. Zeichne ein Dreieck und beschrifte alle Eckpunkte, Seiten und Winkel.

10. Setze für die Variablen in den folgenden Termen nacheinander die Zahlen 5, 10 und 20 ein und berechne den Wert des Terms.

a)  $28 + x$

b)  $(x + 2) \cdot 4$

c)  $100 \cdot a - 10$

d)  $3 \cdot a + 5 \cdot a$

e)  $7 + 10 \cdot m$

f)  $b : 5 + 7$

11. Ersetze in den folgenden Formeln die Variablen durch geeignete Größenangaben und berechne.

a) Umfang eines Rechtecks:  $u = 2 \cdot (a + b)$

b) Länge eine Weges:  $s = a + 5 \text{ km}$

c) Volumen eine Quaders:  $V = a \cdot b \cdot c$

d) Flächeninhalt eines Rechtecks:  $A = a \cdot b$

e) Masse eines Körpers:  $m = 10 \cdot m_0$

f) Zeitdauer eines Films:  $t_{\text{ges}} = 10 \text{ min} + t$

**Klasse 8**

- Gib zwei Möglichkeiten an, wofür die folgenden Buchstaben in der Mathematik verwendet werden.  
a) a                      b) A                      c) x                      d) n                      e) m                      f) h
- Nenne zwei Objekte, die in der Mathematik mit dem Buchstaben p bezeichnet werden. Gib jeweils zwei mögliche Belegungen für p an.
- Welche der folgenden mathematischen Ausdrücke sind Terme?  
a)  $25a^3(x^2 - 1)$                       b)  $10^{10}$                       c)  $3 < 18$   
d)  $3 + 5 =$                       e)  $P(4; 7)$                       f)  $A = a \cdot b$
- Schreibe den Term ohne Multiplikationszeichen, wenn es möglich ist.  
a)  $3 \cdot x$                       b)  $3 \cdot \frac{1}{2}$                       c)  $-2 \cdot x$                       d)  $a \cdot b \cdot c$                       e)  $(-1) \cdot y$                       f)  $3 \cdot 4 \cdot 5$
- Gib je zwei Beispiele an.  
a) ein Term ohne Variable                      b) ein Term mit Zahlen und einer Variablen  
c) eine Gleichung mit einer Variablen                      d) eine Ungleichung ohne Variable  
e) eine Ungleichung mit einer Variablen                      f) eine Gleichung mit zwei Variablen
- Gib eine Formel an, in der drei Variable vorkommen und erläutere die Bedeutung der Variablen.
- Ordne und verkürze die Schreibweise.  
a)  $a \cdot 5 \cdot y$                       b)  $y \cdot x \cdot (-2)$                       c)  $g \cdot d \cdot 7 \cdot e$                       d)  $7 \cdot c \cdot a \cdot (-1)$                       e)  $m \cdot (-4,1) \cdot k$                       f)  $c \cdot (-8) \cdot a$
- Belege in den folgenden Termen die Variable a mit der Zahl 3 und die Variable b mit der Zahl -1.  
a)  $3a + b$                       b)  $5a - b$                       c)  $-2a + b$                       d)  $b(a + 2)$                       e)  $a b$                       f)  $(a + b)^2$
- Verkürze und vereinfache so weit wie möglich.  
a)  $3 \cdot a$                       b)  $5 \cdot 7 \cdot b$                       c)  $0 \cdot c \cdot (-4)$                       d)  $103 \cdot 4,3$                       e)  $11 \cdot 11 \cdot e \cdot e$                       f)  $-3 \cdot (-x)$
- Die folgenden Terme sind durch Verkürzung der Schreibweise entstanden. Wie könnten sie vorher ausgesehen haben.  
a)  $-7x$                       b)  $5xy$                       c)  $-1,2ab$                       d)  $uv$                       e)  $-pq$                       f)  $-2(a + b)$
- Gib einen Rechenausdruck mit Zahlen oder Größen an, der durch den Term allgemein beschrieben wird.  
a)  $a \cdot b$      $a, b \in \mathbb{Q}$                       b)  $\frac{a}{b}$      $a, b \in \mathbb{N}; b \neq 0$   
c)  $2(a + b)$      $a, b$ : Längen von Strecken                      d)  $n^2 + m^2$      $n, m \in \mathbb{N}$   
e)  $10a + b$      $a, b \in \mathbb{N}$                       f)  $A_G \cdot h$ ;     $A_G$ : Flächeninhalt,  $h$ : Höhe
- Schreibe als Term.  
a) die Summe aus 25 und x                      b) das Produkt aus y und 5,3  
c) das Quadrat von a                      d) das Fünffache der Summe aus a und b  
e) das Doppelte von z                      f) die Hälfte von x vermehrt um 9,5

**13.** Schreibe als Gleichung oder Ungleichung.

- a) Die Differenz aus 20 und x ergibt 7.
- b) Das Produkt aus a und b ist 12.
- c) Das Doppelte von y ist kleiner als 8
- d) Die Hälfte von a ist gleich b.
- e) Die Zahl x vermindert um 5 ergibt 2.
- f) Der Quotient von x und y ist größer als 1.

**14.** Beschreibe die folgenden Terme mit Worten.

- a)  $x + 1$
- b)  $3 \cdot a$
- c)  $x + y$
- d)  $2 \cdot (a + b)$
- e)  $a^2 : 2$
- f)  $5x - 3$

**15.** Beschreibe die folgenden Rechnungen allgemein durch einen Term mit Variablen für die Größenangaben.

Zusatz: Wo können solche Berechnungen auftreten?

- a)  $4 \text{ m} \cdot 5 \text{ m}$
- b)  $2 \cdot (4 \text{ m} + 5 \text{ m})$
- c)  $\frac{1}{2} \cdot 5 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm}$
- d)  $2 \text{ cm} \cdot 7 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm}$
- e)  $0,5 \cdot 120 \text{ €}$
- f)  $180 \text{ km} : 3 \text{ h}$

**16.** Aus Bücherregalen der Länge 40 cm und 80 cm kann eine Regalwand zusammengestellt werden. Gib einen Term an, mit dem die Länge der Regalwand allgemein beschrieben werden kann.



**17.** Gib einen Term mit der Variablen x an, mit dem die Sachverhalte beschrieben werden können. Erkläre jedes Mal genau die Bedeutung der Variablen x.

Sachverhalt	Term	Bedeutung der Variablen x
1)		
2)		
3)		
4)		
5)		
6)		

(2) Frau Meyer rechnet für die Kinderparty 2 Würstchen für jedes Kind und drei Würstchen als Reserve.

(1) Marko hat doppelt so viele PC-Spiele wie Sebastian.

(5) Maria verkauft Kuchen für 0,50 € pro Stück.

(6) Ein Wanderer geht in einer Stunde 4 km.

(3) Frau Schulze kauft Kirschen für 2 € das Kilo.

(4) Die Kinokarten kosten 3 € pro Kind, und jeder bekommt noch eine Popcorn-Tüte für 2 €.



## 2 Erkennen der Struktur von Termen

### Klasse 8:

Die Schülerinnen und Schüler

- können die äußere Struktur eines Terms aus Zahlen erkennen, der maximal 2 der 5 Rechenoperationen und Klammern enthält,
- können einen Term aus Zahlen mit maximal 2 der 5 Rechenoperationen und Klammern in einen Term mit Variablen gleicher Struktur überführen und umgekehrt,
- können in einem Term aus Zahlen oder Variablen mit maximal 2 der 5 Rechenoperationen und Klammern die Operation erkennen, die zuletzt ausgeführt werden muss.

### Klasse 10, Regionale Schule und Gymnasium

Die Schülerinnen und Schüler

- können in einem Term, der sich als Summe, Produkt oder Potenz zweier einzelner Terme auffassen lässt, die Grundstruktur erkennen und zwei mögliche Teilterme bestimmen, wobei die jeweiligen Teilterme maximal eine Rechenoperation enthalten
- können die Struktur einer Summe aus maximal drei Summanden erkennen und die Teilterme angeben,
- können Terme der Form  $\frac{T}{n}$  mit  $n \in \mathbb{N}$  in der Form  $\frac{1}{n} \cdot T$  schreiben und umgekehrt.

### Klasse 10, nur Gymnasium:

Die Schülerinnen und Schüler

- können die Struktur von Termen aller betrachteten Formen mit indizierten Variablen untersuchen,
- können Quotienten aus zwei Termen als Produkte aus zwei Termen schreiben,
- können die komplette Struktur eines Terms bestimmen, der aus maximal 4 Teiltermen besteht, wobei die unterste Stufe ein Term aus einem Koeffizienten und einer Variablen ist.

## Aufgaben

### Klasse 8

1. Gib an, ob es sich bei den folgenden Termen um eine Summe, eine Differenz, ein Produkt, einen Quotienten oder eine Potenz handelt. Du brauchst den Wert des Ausdrucks nicht zu berechnen.

a)  $5 \cdot 100 + 210$

b)  $5 + 100 \cdot 210$

c)  $(5 + 100) \cdot 210$

d)  $(2 + 3)^2$

e)  $\frac{3}{5}$

f)  $2,3 \cdot 1,4 - 1,6 \cdot 1,5$

g)  $(7 + 12) : (8 + 3)$

h)  $5^3 \cdot 7$

i)  $4 + (5 + 10) \cdot 2$

2. a) Schreibe jeweils den folgenden Term als einen Term mit Variablen. Gleiche Zahlen bedeuten gleiche Variable.  
 b) Markiere dann in beiden Termen die Operation, die zuletzt ausgeführt werden muss.  
 c) Gib an, ob es sich bei den Termen um eine Summe, eine Differenz, ein Produkt, einen Quotienten oder eine Potenz handelt.

(1)  $3 + 3 \cdot 5$

(2)  $8 \cdot 7 - 8$

(3)  $5 \cdot (5 - 9)$

(4)  $\frac{1}{2} \cdot (7 + 12)$

(5)  $5 \cdot 2^3$

(6)  $13 - (5 + 2)$

(7)  $15 + 35 : 7$

(8)  $(5 + 9) \cdot (9 - 2)$

(9)  $5^2 + 7$

3. a) Gib zu folgenden Termen einen Term mit Zahlen an. Gleiche Variable bedeuten gleiche Zahlen.  
 b) Gib weiterhin an, ob es sich bei den Termen (1) bis (9) um eine Summe, eine Differenz, ein Produkt, einen Quotienten oder eine Potenz handelt.

(1)  $a \cdot b + c$

(2)  $a + b \cdot c$

(3)  $a \cdot (b + c)$

(4)  $a \cdot b - a$

(5)  $a \cdot (a + b)$

(6)  $a + a \cdot b$

(7)  $\frac{a}{b} + c$

(8)  $a + a^b$

(9)  $a \cdot a^b$

### Klasse 10, Regionale Schule, Gymnasium

4. Gib an, ob die Grundstruktur des Terms eine Summe ( $T_1 + T_2$ ), ein Produkt ( $T_1 \cdot T_2$ ) oder eine Potenz ( $T_1^{T_2}$ ) ist und markiere jeweils  $T_1$  und  $T_2$  in dem Term.

Term	Struktur	Term	Struktur	Term	Struktur
a) $a(b + 1)$		e) $\frac{a}{2} b^2$		i) $(2a)^{b+c}$	
b) $2ab + (a + b)$		f) $5a^2 - 8ab$		j) $2a(b + c)$	
c) $(a + b)^2$		g) $b^{2x}$		k) $\frac{4}{3} \pi r^3$	
d) $(x - x_1)(x - x_2)$		h) $(2a + 5b)(3a - b)$		l) $6x - 2y^2$	



### 3 Umformen von Termen

#### Klasse 8

Die Schülerinnen und Schüler

- können Terme zusammenfassen, die maximal 4 Summanden haben,
- können Produkte aus maximal 3 Faktoren zusammenfassen, die jeweils aus einem Koeffizienten und einer Variablen bestehen,
- können zwei Terme aus einem Koeffizienten und maximal zwei Variablen durcheinander dividieren, wobei als Ergebnis ein Bruch auftreten kann,
- können Klammern um Terme mit zwei Gliedern auflösen,
- können unter Beachtung der bisherigen Bedingungen ein Binom mit einem Term aus einer Zahl und einer Variablen ausmultiplizieren,
- können zwei Summen aus je zwei Variablen miteinander multiplizieren,

#### Klasse 10

Die Schülerinnen und Schüler

- können Zahlen mit abgetrennten Zehnerpotenzen schreiben,
- können die Potenzgesetze auf das Rechnen mit Zehnerpotenzen anwenden,
- können Quotienten von Einheiten als Produkte mithilfe negativer Exponenten schreiben,
- können die Potenzgesetze für Potenzen mit ganzzahligen Exponenten anwenden (nur Gymnasium),
- können Wurzeln als Potenzen schreiben (nur Gymnasium),
- wissen, dass Logarithmen Exponenten sind,
- können logarithmische Gleichungen als Exponentialgleichungen schreiben und lösen, wenn als Exponenten nur natürliche Zahlen auftreten (nur Gymnasium).

## Aufgaben

### Klasse 8

#### 1. Fasse zusammen.

a)  $12x - 12 + x + 4$

b)  $a + 2b - 4a + 5a$

c)  $20 - 20g + 5g - 18$

d)  $4ab + 2bc - ab$

e)  $5rs - 4ts + 7ts - 9rs$

f)  $r^2s + 2rs - 3r^2s - 4rs$

g)  $3xy - 2x^2y + xy - 3x^2y$

h)  $-5uv + 4uv - 6u^2v + 5u^2v$

i)  $u - v^2 + v^2 + u$

#### 2. Vereinfache.

a)  $5x \cdot 2$

b)  $16 \cdot 4a$

c)  $3c \cdot 2d$

d)  $3x \cdot 5y \cdot 2$

e)  $7a \cdot 7b \cdot 0$

f)  $1 \cdot 12c \cdot 8a$

g)  $-8a \cdot 5b$

h)  $-14s \cdot (-3t)$

i)  $-8a \cdot 6a \cdot 3c$

#### 3. Berechne.

a)  $55x : 5$

b)  $42b : 6b$

c)  $15xy : 5x$

d)  $77c : 7ac$

e)  $-5a : 5$

f)  $-30ac : (-3c)$

#### 4. Vereinfache soweit wie möglich.

a)  $6k : 5k$

b)  $20a : 5b$

c)  $7x : 14y$

d)  $6a : 12a$

e)  $4y : 3y^2$

f)  $5d^2 : 5d$

#### 5. Löse die Klammer auf.

a)  $3n + (2m - 1)$

b)  $6x - (2 + 4y)$

c)  $-(5x - 7)$

d)  $-(-3a + b)$

e)  $(-4a - 3b)$

f)  $4m + (-3n + 4)$

g)  $4a - 7a + 6a$

h)  $4a + (7a + 6a)$

i)  $4a - (7a + 6a)$

#### 6. Ergänze.

a)  $-5x - 7 = -(\dots\dots\dots)$

b)  $4a - 5b + 2c = 4a + (\dots\dots\dots)$

c)  $6n - 4 + 5m = 6n - (\dots\dots\dots)$

#### 7. Multipliziere aus.

a)  $2(4x + 2y)$

b)  $x(1 + 3y)$

c)  $-5(-5x - 4k)$

d)  $2y(2 - 2y)$

e)  $(5 + 3x) \cdot (-3)$

f)  $-3x(-x + 2y)$

g)  $4(-2a + 5)$

h)  $4a(-2a + 5)$

i)  $(4a - 2a) \cdot 5$

#### 8. Forme in eine Summe um.

a)  $(a + b) \cdot (c + d)$

b)  $(-a + b) \cdot (-c + d)$

c)  $(-a - b) \cdot (-x - y)$

d)  $(m - n) \cdot (-a + b)$

e)  $(a + 1) \cdot (1 - b)$

f)  $(a - b) \cdot (c - d)$

#### 9. Berechne.

a)  $(a + 2b)^2$

b)  $(a - 3)^2$

c)  $(a - 3)(a + 3)$

d)  $(10 - a)^2$

e)  $(2x + 1)(2x - 1)$

f)  $(2x + 3y)^2$

**Klasse 10**

**Hinweis:** Im Folgenden wird vorausgesetzt, dass alle Variablen nur Werte ungleich Null annehmen.

**10.** Schreibe mit abgetrennten Zehnerpotenzen.

Beispiel: 0,0123 =  $1,23 \cdot 10^{-2}$

a) 0,0045 m = .....

b) 5 620 km = .....

c) 0,00006 km = .....

d) 566 cm = .....

e) 0,0907 m = .....

f) 45 980 t = .....

**11.** Vereinfache.

a)  $10^3 \cdot 10^2$

b)  $10^{-1} \cdot 10^2$

c)  $10^{-5} \cdot 10^3$

d)  $10^7 \cdot 10^3$

e)  $10^{-2} \cdot 10^{-1}$

f)  $10^5 \cdot 10^{-5}$

**12.** Schreibe als Produkt mithilfe negativer Exponenten.

a)  $20 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

b)  $2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

c)  $5 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$

**13.** Wende die Potenzgesetze an.

a)  $3^3 \cdot 3^2$

b)  $2^4 \cdot 2^3$

c)  $c^4 \cdot c^7$

d)  $3^4 \cdot 2^4$

e)  $9^2 \cdot 2^2$

f)  $8^5 \cdot x^5$

g)  $\frac{2^8}{2^5}$

h)  $\frac{4^6}{4^6}$

i)  $\frac{x^{13}}{x^7}$

k)  $\frac{16^4}{4^4}$

l)  $\frac{32^5}{16^5}$

m)  $\frac{x^7}{y^7}$

**14.** Schreibe ohne Klammern.

a)  $(a \cdot b)^3$

b)  $(-a \cdot b)^2$

c)  $(-2x)^3$

d)  $\left(\frac{p}{2}\right)^2$

e)  $\left(\frac{2}{3}a\right)^2$

f)  $\left(\frac{x}{y}\right)^3$

**Klasse 10 Gymnasium**

**15.** Schreibe als Bruch.

a)  $a^{-2}$

b)  $n^{-1}$

c)  $(2x)^{-2}$

d)  $(a \cdot b)^{-3}$

e)  $\left(\frac{1}{x}\right)^{-1}$

f)  $\left(\frac{3}{y}\right)^{-3}$

**16.** Schreibe als Potenz.

a)  $\frac{1}{x}$

b)  $\frac{1}{x^2}$

c)  $\frac{2}{x}$

17. Wende die Potenzgesetze an.

a)  $2^{-3} \cdot 2^{-4}$

b)  $3^{-5} \cdot 3^3$

c)  $a^{-4} \cdot a^{-2}$

d)  $4^{-3} \cdot 3^{-3}$

e)  $7^{-2} \cdot 2^{-2}$

f)  $5^{-1} \cdot x^{-1}$

g)  $\frac{3^{-3}}{3^2}$

h)  $\frac{2^5}{2^{-3}}$

i)  $\frac{c^{-4}}{c^{-3}}$ ,

k)  $\frac{8^{-2}}{2^{-2}}$

l)  $\frac{64^{-1}}{16^{-1}}$

m)  $\frac{a^{-7}}{b^{-7}}$

18. Schreibe als Potenz.

a)  $\sqrt{3}$

b)  $\sqrt[3]{4}$

c)  $\sqrt{a^3}$

d)  $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$

e)  $\sqrt[3]{x^9}$

f)  $\sqrt[4]{x^{-3}}$

19. Schreibe als Wurzel.

a)  $2^{\frac{1}{2}}$

b)  $5^{\frac{1}{4}}$

c)  $c^{\frac{1}{3}}$

d)  $3^{\frac{2}{5}}$

e)  $2^{-\frac{1}{2}}$

f)  $a^{1,5}$

20. Fasse zusammen.

a)  $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

b)  $x \cdot \sqrt{x}$

c)  $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a}$

d)  $\frac{x}{\sqrt{x}}$

e)  $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$

f)  $\sqrt{x^5} \cdot \sqrt[5]{x}$

21. Schreibe als Potenz.

a)  $\log_2 8 = 3$

b)  $\log_3 27 = 3$

c)  $\log_{10} 1 = 0$

22. Bestimme x.

a)  $x = \log_{10} 100$

b)  $x = \log_2 8$

c)  $x = \log_5 25$

d)  $\log_2 x = 4$

e)  $\log_3 x = 1$

f)  $\log_3 x = 0$

g)  $\log_x 8 = 3$

h)  $\log_x 16 = 2$

i)  $\log_x 25 = 1$

## 4 Inhaltliches Lösen von Gleichungen und Ungleichungen

*Hinweis:* Mit „lösen“ ist immer inhaltliches Lösen gemeint.

### Klasse 6:

Die Schülerinnen und Schüler

- können lineare Gleichungen mit einer Variablen, die nur einmal auf der linken Seite der Gleichung auftritt, inhaltlich durch Zerlegen der Zahl auf der rechten Seite in eine Summe, eine Differenz oder ein Produkt lösen,
- können lineare Gleichungen mit einer Variablen auf der linken Seite, in der Differenzen oder Quotienten auftreten, durch Anwenden der Umkehroperation lösen,
- können einfache lineare Gleichungen der genannten Form durch Veranschaulichung auf einem Zahlenstrahl lösen,
- können die Lösungen folgender Gleichungs- und Ungleichungstypen durch systematisches Probieren finden: lineare Ungleichungen mit einer Variablen (auf der linken Seite), quadratische Gleichungen mit natürlichen Zahlen als Lösungen, lineare Gleichungen mit einer Variablen, die auf beiden Seiten auftritt.

### Klasse 10, Regionale Schule und Gymnasium

Die Schülerinnen und Schüler

- können lineare Gleichungen mit einer Variablen durch Zerlegen von Zahlen oder Termen in Summen, Differenzen oder Produkte lösen, wenn dies sinnvoll möglich ist,
- können Verhältnisgleichungen durch Vergleichen von Zählern bzw. Nennern lösen, wenn dies sinnvoll möglich ist,
- können folgende Typen quadratischer Gleichungen mit den angegebenen Verfahren lösen
  - (1)  $x^2 = a$                     Betrachtungen zur Umkehroperation oder zum Quadrat einer Zahl
  - (2)  $(x + a)^2 = b$             Betrachtungen wie (1), Rückführen durch formales Umformen
  - (3)  $x(x - a) = 0$             Anwenden des Satzes über ein Produkt, mit dem Wert Null
  - (4)  $x^2 + ax = 0$             Rückführung auf (3) durch Ausklammern
  - (5)  $(x - a)(x - b) = 0$     Überlegungen wie (3)

### Klasse 10, nur Gymnasium:

Die Schülerinnen und Schüler

- können Gleichungen und Ungleichungen mit Beträgen durch Veranschaulichung auf der Zahlengeraden lösen,
- können Exponential- und Logarithmusgleichungen durch Anwenden der Umkehroperation bzw. der Definition der Rechooperation lösen, wenn dies im Kopf möglich ist.

## Aufgaben

### Klasse 6:

1. Löse folgende Gleichungen durch Zerlegen von Zahlen in eine Summe, eine Differenz oder ein Produkt.

a)  $3 \cdot x = 15$

b)  $x \cdot 9 = 27$

c)  $x \cdot x = 25$

d)  $3 \cdot x + 5 = 11$

e)  $10 - x = 2$

f)  $3 \cdot (z + 2) = 15$

g)  $39 - 2 \cdot x = 31$

h)  $10 \cdot (x + 5) = 80$

i)  $28 + 8 \cdot x = 60$

2. Lösen folgende Gleichungen durch Umkehren der Rechenoperation.

a)  $x - 50 = 100$

b)  $y : 5 = 9$

c)  $z + 20 = 345$

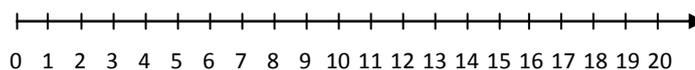
d)  $x \cdot 10 = 300$

e)  $\frac{a}{9} = 8$

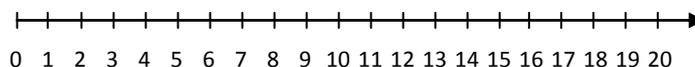
f)  $2 \cdot x - 15 = 25$

3. Löse folgende Gleichungen und Ungleichungen durch Veranschaulichung auf dem gegebenen Zahlenstrahl.

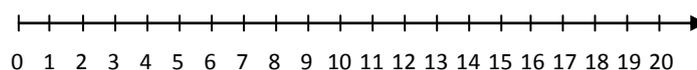
a)  $15 - a = 7$



b)  $b < 9$



c)  $12 + c = 19$



4. Löse folgende Gleichungen bzw. Ungleichungen durch systematisches Probieren im Bereich der natürlichen Zahlen.

a)  $6 \cdot x = 40 - 2 \cdot x$

b)  $x \cdot x = x + x$

c)  $5 \cdot x + 2 < 25$

### Klasse 10, Regionale Schule, Gymnasium

5. Löse die folgenden linearen Gleichungen durch inhaltliche Überlegungen.

a)  $(x + 5) \cdot 7 = 70$

b)  $8(2x + 6) = 64$

c)  $50 - 10x = 0$

d)  $4x + 3 = 15$

e)  $95 - 5x = 80$

f)  $11(x + 3) = 88$

6. Löse die Verhältnisgleichungen durch inhaltliche Überlegungen.

a)  $\frac{6}{x} = \frac{18}{3}$

b)  $\frac{x}{12} = \frac{5}{15}$

c)  $\frac{12}{5} = \frac{6}{x}$

d)  $\frac{24}{x+7} = \frac{6}{5}$

e)  $\frac{9}{x} = \frac{3}{4}$

f)  $\frac{16}{x+4} = 8$

7. Löse die quadratischen Gleichungen durch inhaltliche Überlegungen.

a)  $x^2 = 36$

b)  $x^2 = \frac{1}{4}$

c)  $x^2 = 0,01$

d)  $4x^2 = 100$

e)  $(x-1)^2 = 25$

f)  $(x+2)^2 = 1600$

g)  $x^2 = 2$

h)  $x^2 = 7$

i)  $x^2 = 1,6$

8. Löse die quadratischen Gleichungen durch inhaltliche Überlegungen.

a)  $x(x-5) = 0$

c)  $(x-1)(x+2) = 0$

d)  $x^2 - 7x = 0$

e)  $(x+7)(x+5) = 0$

f)  $x^2 + 2x = 0$

g)  $(x+3)x = 0$

9. Löse die quadratischen Gleichungen durch inhaltliche Überlegungen.

a)  $x^2 - 100 = 0$

b)  $(x+13)(13-x) = 0$

c)  $x^2 - 5 = 44$

d)  $8x^2 = x$

e)  $2x^2 = 128$

f)  $x^2 - 5x = 0$

### Klasse 10, nur Gymnasium

10. Löse die folgenden Ungleichungen durch Veranschaulichung auf einer Zahlenrade.

a)  $|x| = 3$

b)  $|x| > 4$

c)  $|x-2| = 3$

d)  $|x-1| > 2$

e)  $|x-1| < 2$

f)  $|x-5| \geq 4$

11. Löse die folgenden Gleichungen durch inhaltliche Überlegungen.

a)  $2^x = 8$

b)  $\log_x 81 = 2$

c)  $3^x = \frac{1}{3}$

d)  $x = \log_2 32$

e)  $x = \log_{10} 100$

f)  $2^{x-1} = 8$

## 5 Umformen und Umstellen von Gleichungen und Ungleichungen

### Klasse 8:

Die Schülerinnen und Schüler

- kennen die Schreibweise für das Umformen von Gleichungen und Ungleichungen
- kennen folgende Umformungsregeln für Gleichungen bzw. Ungleichungen und wissen, dass sich bei ihrer Anwendung die Lösungsmenge nicht ändert:
  - Die Seiten einer Gleichung können vertauscht werden.
  - Auf beiden Seiten einer Gleichung oder Ungleichung kann derselbe Term addiert oder subtrahiert werden.
  - Beide Seiten einer Gleichung können mit demselben Term multipliziert bzw. durch denselben Term dividiert werden, wenn er nicht den Wert Null annehmen kann.
  - Beide Seiten einer Ungleichung können mit derselben Zahl ungleich Null multipliziert bzw. durch dieselbe Zahl ungleich Null dividiert werden. Wenn die Zahl negativ ist, kehrt sich das Relationszeichen um.
- können einen vorgenommenen Umformungsschritt erkennen bei
  - linearen oder quadratischen Gleichungen mit einer Variablen,
  - Formeln oder Größengleichungen,
- können eine äquivalente Gleichung durch einen Umformungsschritt bilden zu
  - linearen oder quadratischen Gleichungen mit einer Variablen,
  - einfachen Formeln bzw. Größengleichungen,
  - linearen Ungleichungen mit einer Variablen
- können eine Formel oder Größengleichung in einem Schritt nach einer Größe umstellen,
- können entscheiden, ob eine Umformung einer linearen oder quadratischen Gleichung, einer Formel oder einer Ungleichung richtig vorgenommen wurde.

### Klasse 10, Gymnasium:

Die Schülerinnen und Schüler

- wissen, dass sich beim Quadrieren und Wurzelziehen die Lösungsmenge einer Gleichung ändern kann.

## Aufgaben

### Klasse 8

#### Hinweis:

Wenn kein Grundbereich angegeben ist, ist immer der Bereich der rationalen Zahlen gemeint.

1. Die folgenden Paare von Gleichungen haben dieselbe Lösungsmenge. Gib die Umformung an, mit der die erste Gleichung in die zweite überführt werden kann.

a)  $\frac{1}{4}x = 2$  |  
 $\frac{1}{4}x + 2 = 4$

b)  $x + 3 = 5$  |  
 $10x + 30 = 50$

c)  $5a = a + 1$  |  
 $4a = 1$

d)  $x + 1 = 2x$  |  
 $2x + 2 = 4x$

e)  $\frac{k}{2} = 2 + k$  |  
 $k = 4 + 2k$

f)  $3s - 6 = 9$  |  
 $s - 2 = 3$

2. Gib eine Umformung an, die die erste Gleichung in die zweite überführt. Alle vorkommenden Variablen nehmen nur positive Werte an.

a)  $V = \frac{1}{3}A \cdot h$  |  
 $3V = A \cdot h$

b)  $A = \frac{1}{2}a \cdot b$  |  
 $\frac{A}{b} = \frac{1}{2}a$

c)  $u = 2\pi \cdot r$  |  
 $\frac{u}{\pi} = 2r$

d)  $u = a + b + c$  |  
 $u - a = b + c$

e)  $\rho = \frac{m}{V}$  |  
 $\frac{\rho}{m} = \frac{1}{V}$

f)  $s = v \cdot t$  |  
 $\frac{s}{v} = t$

3. Finde zwei Gleichungen mit derselben Lösungsmenge, indem du

- (1) auf beiden Seiten der Gleichung eine Zahl addierst oder
- (2) beide Seiten der Gleichung mit einer Zahl multiplizierst.

Notiere deine jeweilige Umformung.

a)  $4x = 12$

b)  $\frac{1}{2}a = 5$

c)  $x + 2 = 7$

d)  $2b + 1 = b$

e)  $k + 3 = 4k$

f)  $3k = 1 + k$

4. Finde jeweils zwei weitere Gleichungen mit derselben Lösungsmenge, indem du eine Umformung vornimmst. Notiere deine Umformungen.

a)  $8x = 12$

b)  $3k = 9$

c)  $2x + 3 = 0$

d)  $5x - 2 = 3x$

e)  $3k + 8 = 12k$

f)  $-2 + 5a = 2a$

5. Nimm folgende Umformungen vor.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } 2x + 3 = 5 & | - 3 & \text{b) } 3x - 5 = - 2 & | + 5 & \text{c) } 9 = \frac{1}{2}x - 2 & | + 2 \\ \text{d) } -\frac{1}{4}x = 9 & | \cdot (-4) & \text{e) } \frac{2}{x} = 5 & | \cdot x; x \neq 0 & \text{f) } 5 = \frac{2}{x} & | \cdot x, x \neq 0 \end{array}$$

6. Nimm folgende Umformungen vor.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } 4 < 10 & | : 2 & \text{b) } 4 < 10 & | \cdot 2 & \text{c) } 4 < 10 & | : (-2) \\ \text{d) } 4 < 10 & | \cdot (-2) & \text{e) } 2x < 5 & | : 2 & \text{f) } -2x < 5 & | : (-2) \end{array}$$

7. Entscheide, ob die folgenden Umformungen richtig vorgenommen wurden. Korrigiere, wenn nötig.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } x^2 + a^2 + 3 = 10 & | - 3 & \text{b) } -4x = x + 1 & | + 4 & \text{c) } -2a = 6b & | \cdot (-2) \\ & x^2 + a^2 = 7 & & x = x + 5 & & a = 3b \\ \text{d) } -\frac{a}{2} = 3s & | \cdot (-2) & \text{e) } 7k - 3m = 5k + 2m & | - 2m & \text{f) } b^2 = -a^2 + c^2 & | - a^2 \\ & a = -6s & & 7k - 5m = 5k & & b^2 + a^2 = c^2 \end{array}$$

8. Finde den Fehler.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } 4x > 3 & & \text{b) } 3x > -9 & | : 3 & \text{c) } -20 > -5x & | : (-5) \\ & 3 > 4x & & x < -3 & & -4 < x \\ \text{d) } 10 > -5x & | : (-5) & \text{e) } 8 > -\frac{x}{2} & | \cdot (-2) & \text{f) } \frac{1}{3} > \frac{x}{2} & | \cdot 2 \\ & -2 > x & & 16 < x & & \frac{1}{3} > x \end{array}$$

9. Nimm folgende Umformungen vor. Alle vorkommenden Variablen nehmen nur positive Werte an.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ & | - \alpha \\ \text{b) } \frac{b}{u} = \frac{\alpha}{360^\circ} & | \cdot u \\ \text{c) } \frac{b}{u} = \frac{\alpha}{360^\circ} & | \cdot 360^\circ \\ \text{d) } \sin \alpha = \frac{a}{c} & | \cdot c \\ \text{e) } \frac{\overline{CA}}{\overline{CA'}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CB'}} & | \cdot \overline{CB'} \\ \text{f) } \frac{\overline{CA}}{\overline{CA'}} \cdot \overline{CB'} = \overline{CB} & | \cdot \overline{CA'} \end{array}$$

10. Ergänze! Alle vorkommenden Variablen nehmen nur positive Werte an.

$$\text{a) } v = \frac{s}{t} \quad | \cdot t \\ =$$

$$\text{b) } v \cdot t = s \quad | : v \\ =$$

$$\text{c) } A = \frac{1}{2}(a+c) \cdot h \quad | \cdot 2 \\ =$$

$$\text{d) } 2A = (a+c) \cdot h \quad | : (a+c) \\ =$$

$$\text{e) } s = \frac{a}{2} \cdot t^2 \quad | \\ 2s = a \cdot t^2$$

$$\text{f) } c^2 = a^2 + b^2 \quad | \\ c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\text{g) } \frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad | \\ \frac{a}{b} \cdot \sin \beta = \sin \alpha$$

$$\text{i) } \frac{b}{c} = \cos \alpha \quad | \cdot c \\ =$$

$$\text{i) } b = c \cdot \cos \alpha \quad | : \cos \alpha \\ =$$

11. Stelle nach der in Klammern stehenden Größe um. Alle vorkommenden Variablen nehmen nur positive Werte an.

$$\text{a) } A = a \cdot b \quad (\text{b})$$

$$\text{b) } V = a \cdot b \cdot c \quad (\text{c})$$

$$\text{c) } V = \frac{1}{3} a^2 \cdot h \quad (\text{h})$$

$$\text{d) } v = \frac{s}{t} \quad (\text{s})$$

$$\text{e) } F = m \cdot a \quad (\text{m})$$

$$\text{f) } R = \frac{U}{I} \quad (\text{U})$$

12. Entscheide, ob folgende Umformungen richtig oder falsch sind. Alle vorkommenden Variablen nehmen nur positive Werte an.

$$\text{a) } A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h \rightarrow h = \frac{A}{2 \cdot g}$$

$$\text{b) } u = a + b + c \rightarrow b = u - a + c$$

$$\text{c) } h^2 = p \cdot q \rightarrow q = \frac{h^2}{p}$$

$$\text{d) } u = 2(a+b) \rightarrow a = \frac{u}{2} - b$$

$$\text{e) } A = \frac{1}{2} e f \rightarrow e = 2A f$$

$$\text{f) } e^2 = 4a^2 - f^2 \rightarrow a^2 = \frac{1}{4} e^2 + f^2$$

### Klasse 10:

13. Haben folgende Gleichungen im Bereich der reellen Zahlen dieselbe Lösungsmenge?

$$\text{a) } x^2 = 1 \text{ und } x = 1$$

$$\text{b) } \sqrt{x^2} = 2 \text{ und } x = 2$$

$$\text{c) } \sqrt{x} = 3 \text{ und } x = 9$$

$$\text{d) } \sqrt{x^2 + 8} = 3 \text{ und } x + 2 = 3$$

$$\text{e) } a^2 + 4 = 25 \text{ und } a + 2 = 5$$

$$\text{f) } \sqrt{2x} = 2 \text{ (} x > 0 \text{) und } 2x = 4$$

## 6 Lösen von linearen Gleichungen, Ungleichungen und Gleichungssystemen

Die Schülerinnen und Schüler

- wissen, dass man alle Lösungen einer Gleichung oder Ungleichung als Lösungsmenge bezeichnet,
- können lineare Gleichungen und Ungleichungen in verschiedenen Grundbereichen lösen,
- können die Variable in einer linearen Gleichung oder Ungleichung in einem Schritt isolieren, wenn dies möglich ist,
- können lineare Gleichungen, bei denen die Variable auf beiden Seiten auftritt, lösen, wenn dies in zwei bis drei Schritten möglich ist,
- können eine Probe zu einer linearen Gleichung und gegebener Lösung durchführen,
- können einfache Sachverhalte durch eine Gleichung mit einer Variablen beschreiben,
- können zu einer Gleichung mit zwei Variablen mögliche Lösungen als Zahlenpaare in verschiedenen Grundbereichen angeben,
- wissen, dass die Lösungsmenge eines Gleichungssystems aus zwei Gleichungen mit zwei Variablen aus allen Paaren  $(x; y)$  reeller Zahlen besteht, die sowohl die Gleichung (I) als auch die Gleichung (II) erfüllen und können die Lösung als geordnetes Paar oder in der Form  $x = \dots$  und  $y = \dots$  angeben,
- können die Lösung linearer Gleichungssysteme mit zwei Variablen mithilfe der Graphen der betreffenden linearen Funktionen ermitteln, wenn die Graphen gegeben sind,
- können bei gegebenen Graphen Betrachtungen zur Anzahl der Lösungen von Gleichungssystemen durchführen, indem sie ihre Kenntnisse zum grafischen Lösen verwenden,
- können ein rechnerisches Lösungsverfahren zum Lösen sehr einfacher linearer Gleichungssysteme anwenden,
- können einfache Sachverhalte durch ein lineares Gleichungssystem mit zwei Variablen beschreiben.

## Aufgaben

1. Gib eine Umformung an, die du ausführen musst, um die Gleichung in einem Schritt zu lösen.

a)  $x - 25 = 55$

b)  $48 = -1,2 + x$

c)  $x - 2 = -6$

d)  $1,3 + x = 27$

e)  $x + 1,8 = 3,3$

f)  $14,7 = 13 + x$

2. Gib eine Umformung an, die du ausführen musst, um die Gleichung in einem Schritt zu lösen.

a)  $2 \cdot x = 51$

b)  $\frac{x}{7} = 4$

c)  $3,8 = 12 \cdot x$

d)  $x : 13 = 5$

e)  $x \cdot 9 = -55$

f)  $7 = x : 3,6$

g)  $\frac{x}{5} = \frac{6}{8}$

h)  $\frac{1}{3} = \frac{x}{1,2}$

h)  $1 : 25 = x : 22,5$

3. Löse die Gleichungen, indem du geeignete Umformungen vornimmst.

a)  $8x + 24 = 56$

b)  $16 + 12x = 64 - 4x$

c)  $9x + 5 = 3x - 1$

d)  $5x + 2 = 4x + 9$

e)  $8x - 10 = 20 - 7x$

f)  $9x - 27 = 13x + 1$

4. Überprüfe mit einer Probe, ob die gegebene Zahl eine Lösung der Gleichung ist.

a)  $48 = -12 + x$

$x = 60$

b)  $8x + 3 = 3x - 4$

$x = -2$

c)  $\frac{9}{x} = 5$

$x = 4$

d)  $2x - 4 = 6x$

$x = 1$

e)  $3,5 + 4x = 2x - 2,5$

$x = -3$

f)  $\frac{x}{70} = \frac{2}{35}$

$x = 8$

5. Gib eine Umformung an, die du ausführen musst, um die Ungleichung in einem Schritt zu lösen.

a)  $x - 5 < 2,5$

b)  $48 > -3,2 + x$

c)  $x - 4 < -12$

d)  $4 \cdot x < 56$

e)  $36 > 3,6 \cdot x$

f)  $x \cdot 4,6 > -5,4$

g)  $0,3 + x < 4,7$

h)  $x + 8 > 3$

i)  $27 < 2,3 + x$

j)  $x : 11 > 3$

k)  $\frac{x}{7} < 0,5$

l)  $8 < x : 3,7$

6. Gib alle natürlichen Zahlen an, die Lösungen der Ungleichung sind.

a)  $2x < 5$

b)  $x + 6 > 12$

c)  $-3x < -9$

d)  $x + 1,8 < 3,3$

e)  $x : 3 > 5$

f)  $\frac{x}{5} < \frac{9}{4}$

7. Gib jeweils eine Gleichung mit einer Variablen an, die den Sachverhalt beschreibt. Gib die Bedeutung der Variablen an.

a) Lara kauft in einer Bäckerei 12 Knusperstangen. Sie bezahlt 8,40 €.

b) Für eine Aufführung in der Schulsporthalle sollen 266 Stühle in 14 gleich lange Reihen aufgestellt werden.

c) Robert denkt sich eine Zahl aus. Wenn er diese verdoppelt und dann um 13 vermehrt, erhält er 41.

8. Gib für die Gleichungen mit zwei Variablen jeweils 3 Zahlenpaare an, die diese Gleichungen erfüllen.

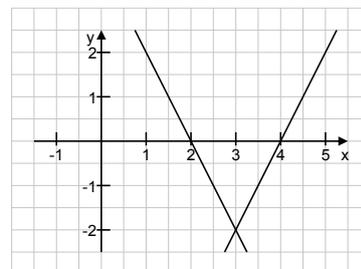
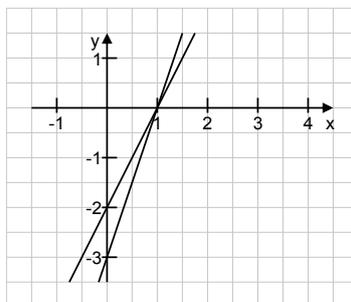
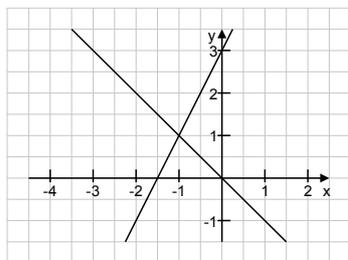
- a)  $m - n = 10$  ( $m, n \in \mathbb{N}$ )                      b)  $a + b = 1$  ( $a, b \in \mathbb{Q}$ )                      c)  $y = 3x + 1$  ( $x, y \in \mathbb{Z}$ )  
 d)  $2x + y = 12$  ( $x, y \in \mathbb{N}$ )                      e)  $11 - d = 2c$  ( $c, d \in \mathbb{Q}$ )                      f)  $q + 1 = p - 6$  ( $p, q \in \mathbb{R}$ )

9. Überprüfe für das vorgegebene Gleichungssystem, ob das angegebene Zahlenpaar  $(x; y)$  Lösung ist.

- a) I:  $x + y = 6$     b) I:  $3y - x = 9$     c) I:  $2x - 4 = y$   
 II:  $y - x = 2$     II:  $4y + 3x = -5$     II:  $x + 2y = 2$   
 (4; 2)    (2; -1)    (2; 0)

10. Eine Gleichung mit zwei Variablen kann als lineare Funktion aufgefasst werden. Lies die Lösung der Gleichungssysteme aus der grafischen Darstellung der beiden Funktionen ab.

- a) I:  $y = 2x + 3$     b) I:  $y = 3x - 3$     c) I:  $y = 2x - 8$   
 II:  $y = -x$     II:  $y = 2x - 2$     II:  $y = -2x + 4$



11. Woran kann man in der grafischen Darstellung eines Gleichungssystems erkennen, wie viele Lösungen es hat? Vervollständige den Lückentext.

- a) Wenn zwei Graphen linearer Funktionen sich in einem Punkt schneiden, so hat das zugehörige Gleichungssystem .....Lösung.  
 b) Ein Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen, wenn die Graphen der linearen Funktionen.....  
 c) Das Gleichungssystem hat keine Lösung, wenn die Graphen der beiden linearen Funktionen .....

12. Entscheide ohne zu rechnen, welches Gleichungssystem genau eine, keine oder unendlich viele Lösungen hat. Kreuze an.

- a) I:  $y = 8x - 4$     b) I:  $y = 2x + 5$     c) I:  $y = 3x + 6$   
 II:  $y = 4x + 2$     II:  $y = 2x - 3$     II:  $y = 3x + 6$

genau eine	<input type="checkbox"/>
keine	<input type="checkbox"/>
unendlich viele	<input type="checkbox"/>

genau eine	<input type="checkbox"/>
keine	<input type="checkbox"/>
unendlich viele	<input type="checkbox"/>

genau eine	<input type="checkbox"/>
Keine	<input type="checkbox"/>
unendlich viele	<input type="checkbox"/>

13. Forme das lineare Gleichungssystem mit zwei Variablen in eine lineare Gleichung mit einer Variablen um.

a) I:  $4x - 5 = y$   
 II:  $y = 3x$

b) I:  $12 + 7x = 2y$   
 II:  $7x = 4 + y$

c) I:  $2x - 3y = 154$   
 II:  $5x + 3y = 160$

14. Löse das lineare Gleichungssystem rechnerisch.

a) I:  $12x + 6 = 2y$   
 II:  $3x + 6 = y$

b) I:  $2x + 4 = 2y$   
 II:  $-2x + 8 = y$

c) I:  $y = 6x + 7$   
 II:  $y = 9x - 2$

15. Suche den Fehler und berichtige.

a) I:  $2x - y = 10$                        $\rightarrow 2x - 3x - 5 = 10$   
 II:  $y = 3x - 5$

b) I:  $2x + 6 = 8y$                        $\rightarrow 2x + 6 = 8(2x - 6)$   
 II:  $2y = 2x - 6$

c) I:  $5x - 3 = 6y$                        $\rightarrow 5x - 3 = 4x$   
 II:  $6y = 4x$                                $x - 3 = 0$   
     $x = 3$   
     $y = 4 \cdot 3$   
     $y = 12$

16. Stelle ein Gleichungssystem mit zwei Variablen auf, das den Sachverhalt darstellt. Gib die Bedeutung der Variablen an.

a) Die Summe zweier Zahlen beträgt 108. Die Differenz der beiden Zahlen ist 8.

b)



c) André ist fünf Jahre älter als sein Bruder Lars. Zusammen sind beide 23 Jahre alt.

## 7 Lösen quadratischer Gleichungen

Die Schülerinnen und Schüler

- können lineare und quadratische Gleichungen unterscheiden,
- können quadratische Gleichungen der Form  $x^2 = a$ ,  $(x + d)^2 = e$ ,  $(x + c) \cdot (x + d) = 0$  und  $x^2 + px = 0$  inhaltlich lösen ohne diese allgemeinen Darstellungen zu benutzen,
- können die Lösungen quadratischer Gleichungen der Form  $x^2 + px + q = 0$  mithilfe der Lösungsformel bestimmen, wenn die Lösungsformel gegeben ist und die Diskriminante keine Quadratzahl ist,
- wissen, dass eine quadratische Gleichung entweder keine, genau eine oder genau zwei Lösungen hat,
- können die Anzahl der Lösungen einer quadratischen Gleichung unter Anwendung der Lösungsformel bestimmen, indem sie den Ausdruck unter der Wurzel auswerten,
- können überprüfen, ob gegebene Zahlen Lösung der quadratischen Gleichung sind.

## Aufgaben

1. Entscheide, ob es sich bei den angegebenen Gleichungen um lineare oder quadratische Gleichungen handelt.

a)  $2x - 5 = x^2 + 4$

b)  $-2x + 5 = 4(3x - 2)$

c)  $-5x^2 + x = 0$

d)  $x^2 - 4 = 0$

e)  $-x + 4 = 2x + 3$

f)  $4(3x - 2) = 5x(2x + 8)$

g)  $(x - 9)(x + 9) = 0$

h)  $3x + 2 = 0$

i)  $(x + 2)(x - 2) = 2x$

2. Kann man die folgenden Gleichungen als quadratische Gleichung mit einer Variablen auffassen? Wenn ja, gib die betreffende Variable an.

a)  $x^2 + px + q = 0$

b)  $0,4x = 0,8x - 4$

c)  $2x^3 + 9 = 0$

d)  $a^2 + b^2 = c^2$

e)  $ax^2 + bx + c = 0$

f)  $0,5d = -0,5d^2$

g)  $A = \pi d^2$

h)  $A_0 = 2(ab + bc + ac)$

i)  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$

3. Bestimme die Lösungen der Gleichungen durch inhaltliche Überlegungen.

a)  $x^2 = 81$

b)  $3x^2 = 75$

b)  $12x^2 + 4 = 52$

d)  $49 = x^2$

e)  $x^2 = 0$

f)  $40 = x^2 + 65$

g)  $x^2 - 64 = 0$

h)  $x^2 = -9$

i)  $2x^2 - 68 = 30$

4. Bestimme die Lösungen der Gleichungen durch inhaltliche Überlegungen.

a)  $x^2 + 5x = 0$

d)  $20x = 5x^2$

g)  $-15x = 3x^2$

b)  $x^2 - 8x = 0$

e)  $4x^2 - 16x = 0$

h)  $5x^2 - 10x = 0$

c)  $x^2 = 15x$

f)  $2x^2 = 8x$

i)  $x^2 = x$

5. Überprüfe, ob die folgenden quadratischen Gleichungen in der Form  $x^2 + px + q = 0$  angegeben sind. Kreuze an.

a)  $x^2 - 4x + 8 = 0$

ja: \_\_\_\_ nein: \_\_\_\_

b)  $-x^2 + 2x - 4 = 0$

ja: \_\_\_\_ nein: \_\_\_\_

c)  $(x + 2)(x - 3) = 0$

ja: \_\_\_\_ nein: \_\_\_\_

d)  $16x - 20 + x^2 = 0$

ja: \_\_\_\_ nein: \_\_\_\_

e)  $x^2 + 20x = 0$

ja: \_\_\_\_ nein: \_\_\_\_

f)  $0 = x^2 + 10$

ja: \_\_\_\_ nein: \_\_\_\_

6. Schreibe die folgenden quadratischen Gleichungen in der Form  $x^2 + px + q = 0$ .

a)  $x^2 = -2x + 8$

b)  $-x^2 + 2x - 4 = 0$

c)  $10x - 10 = x^2$

d)  $0 = -8x^2 + 32x - 24$

e)  $0 = x(x - 6) + 2x$

f)  $-x^2 = x - 1$

7. Die folgenden quadratischen Gleichungen haben die Form  $x^2 + px + q$ . Bestimme p und q.

a)  $x^2 + 4x + 8 = 0$                       p: \_\_\_\_\_                      q: \_\_\_\_\_

b)  $x^2 - 2x + 7 = 0$                       p: \_\_\_\_\_                      q: \_\_\_\_\_

c)  $x^2 + 8x - 5 = 0$                       p: \_\_\_\_\_                      q: \_\_\_\_\_

d)  $x^2 - 7x - 1 = 0$                       p: \_\_\_\_\_                      q: \_\_\_\_\_

e)  $x^2 - 0.5x + 1,5 = 0$                       p: \_\_\_\_\_                      q: \_\_\_\_\_

f)  $x^2 + 1,75x - 0,2 = 0$                       p: \_\_\_\_\_                      q: \_\_\_\_\_

g)  $x^2 + 10x = 0$                       p: \_\_\_\_\_                      q: \_\_\_\_\_

h)  $x^2 + x + 2 = 0$                       p: \_\_\_\_\_                      q: \_\_\_\_\_

i)  $x^2 - x = 0$                       p: \_\_\_\_\_                      q: \_\_\_\_\_

8. Löse die quadratischen Gleichungen mit Hilfe der Lösungsformel  $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

a)  $x^2 + 6x - 4 = 0$

b)  $x^2 - 10x + 10 = 0$

c)  $x^2 + 2x - 1 = 0$

g)  $x^2 + 4x - 14 = 0$

h)  $x^2 - 8x + 6 = 0$

i)  $x^2 + x - 1 = 0$

9. Entscheide mithilfe der Lösungsformel  $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ , ob die Gleichung keine, eine oder zwei Lösungen hat.

a)  $x^2 - 16x + 64 = 0$

b)  $x^2 + 2x + 7 = 0$

c)  $x^2 - 5x - 5 = 0$

d)  $x^2 + 12x + 36 = 0$

e)  $x^2 - 4x + 5 = 0$

f)  $x^2 - 5x + 4 = 0$

10. Stelle fest, ob die Lösungen die jeweils zugehörige quadratische Gleichung zu einer wahren Aussage machen.

a)  $x^2 - 7x + 12 = 0$                        $x_1 = 4$     und     $x_2 = 3$

b)  $x^2 + 7x + 10 = 0$                        $x_1 = -5$  und     $x_2 = -2$

c)  $x^2 + x - 56 = 0$                        $x_1 = -7$  und     $x_2 = 8$

d)  $x^2 - 9x - 10 = 0$                        $x_1 = -1$  und     $x_2 = 10$

e)  $x^2 + 13x + 30 = 0$                        $x_1 = 3$     und     $x_2 = 10$

f)  $x^2 + 6x + 8 = 0$                        $x_1 = -4$  und     $x_2 = -2$