
Anregungen zum Mathematikunterricht

Sill, Hans-Dieter; Adler, Sven; Behnke, Danilo

Offene Aufgaben für die Klassen 5 - 12

**Universität Rostock
Fachbereich Mathematik**

Inhaltsverzeichnis

1	VORWORT	1
2	AUFGABEN MIT HINWEISEN	2
2.1.	KLASSIFIZIERUNG VON KÖRPERN	2
	<i>Aufgabenstellung</i>	<i>2</i>
	<i>Ziele beim Einsatz der Aufgabe</i>	<i>2</i>
	<i>Auswahl möglicher Lösungen.....</i>	<i>2</i>
	<i>Ergebnisse einer Erprobung der Aufgabe</i>	<i>3</i>
2.2.	DIE RANGFOLGE VON MANNSCHAFTEN IN EINEM MARATHONLAUF	4
	<i>Aufgabenstellung</i>	<i>4</i>
	<i>Ziele beim Einsatz der Aufgabe</i>	<i>4</i>
	<i>Auswahl möglicher Lösungen.....</i>	<i>4</i>
	<i>Ergebnisse einer Erprobung der Aufgabe</i>	<i>5</i>
2.3.	FUNKTIONEN UND IHRE GRAPHEN	6
	<i>Aufgabenstellung</i>	<i>6</i>
	<i>Ziele beim Einsatz der Aufgabe</i>	<i>6</i>
	<i>Auswahl möglicher Lösungen.....</i>	<i>7</i>
	<i>Ergebnisse einer Erprobung der Aufgabe</i>	<i>7</i>
2.4.	MITTELPARALLELEN IM DREIECK	8
	<i>Aufgabenstellung</i>	<i>8</i>
	<i>Ziele beim Einsatz der Aufgabe</i>	<i>8</i>
	<i>Auswahl möglicher Lösungen.....</i>	<i>8</i>
	<i>Ergebnisse einer Erprobung der Aufgabe</i>	<i>9</i>
2.5.	EIGENSCHAFTEN EINER MULTIPLIKATIONSTABELLE	9
	<i>Aufgabenstellung</i>	<i>9</i>
	<i>Ziele beim Einsatz der Aufgabe</i>	<i>10</i>
	<i>Auswahl möglicher Lösungen.....</i>	<i>10</i>
	<i>Ergebnisse einer Erprobung der Aufgabe</i>	<i>17</i>
3	ZUSAMMENSTELLUNG WEITERER AUFGABEN.....	19
4	ANHANG	20
4.1.	EIGENSCHAFTEN VON KÖRPERN	20
4.2.	AUFGABE ZU FUNKTIONEN	21
4.3.	EIGENSCHAFTEN EINER MULTIPLIKATIONSTABELLE	22

1 Vorwort

Die Broschüre entstand im Ergebnis eines Seminars zum offenen Mathematikunterricht im Wintersemester 1998/99, an dem die Autoren als Lehramtsstudenten bzw. Seminarleiter teilnahmen. Im Mittelpunkt des Seminars stand folgende Publikation:

The open-ended approach: a new proposal for teaching mathematics/edited by Jerry P. Becker, Shigeru Shimada. – National Council of Teachers of Mathematics, Reston, 1997

In dieser amerikanischen Übersetzung einer japanischen Publikation aus dem Jahre 1977 wird über den Einsatz von offenen Aufgaben im japanischen Mathematikunterricht berichtet. Die Aufgaben und die Methoden ihres Einsatzes waren ursprünglich nur dazu gedacht, den Entwicklungsstand allgemein geistiger Fähigkeiten zu überprüfen. Es zeigte sich im Laufe der fünfjährigen Untersuchungen aber bald, daß beim Einsatz dieser Aufgaben auch eine Reihe von Veränderungen in der Qualität des Mathematikunterrichts möglich sind. Nach dem Studium der Publikation sind wir mit Blick auf die Ergebnisse von TIMSS zu der Ansicht gekommen, dass eine der Ursachen für die bedeutend besseren Leistungen der japanischen Schülerinnen und Schüler im Mathematikunterricht im planmäßigen und gezielten Einsatz solcher Aufgaben liegen könnte.

Die vorliegende Broschüre ist im Wesentlichen durch Übersetzung der oben genannten Publikation entstanden. Es wurden die vorgeschlagenen Einsatzmöglichkeiten der Aufgabe und die zu erwartenden Schülerantworten den Verhältnissen in Mecklenburg-Vorpommern angepaßt. Die angegebenen Unterrichtsabläufe stammen also aus dem japanischen Mathematikunterricht.

Die hier vorgestellten „Aufgaben mit offenem Ende“ sind eine spezielle Form offener Aufgaben. Sie wurden unter folgenden Aspekten entwickelt:

- Die Aufgaben erfordern einen hohen Grad an geistiger Beweglichkeit, die ein wichtiger Faktor der Intelligenz ist. Die Aufgaben sind z.T. in ihrer Art und Struktur an entsprechende Aufgaben in psychologischen Intelligenztests angelehnt.
- Die Aufgaben ermöglichen eine Vielzahl unterschiedlicher Lösungen.
- Es sind Lösungen auf verschiedenen Abstraktions- bzw. Anforderungsstufen möglich, die aber alle als vollwertige Lösungen anerkannt werden können.
- Die Art und Anzahl der durch den Schüler gefundenen Lösungen ermöglichen eine Bewertung ihrer mathematischen und Denkleistungen.

Vor dem Einsatz der Aufgaben im Unterricht ist eine gründliche Auseinandersetzung mit der Aufgabe durch den Lehrer erforderlich. Wir haben alle Aufgaben selbst im Seminar bearbeitet und waren erstaunt, welche Fülle von Gedanken und Ideen sich dabei ergab. Es zeigte sich auch, dass eine Diskussion in der Gruppe sehr fruchtbar war und Anregungen lieferte, auf die jeder einzelne alleine nicht gekommen wäre. Wir empfehlen daher, die Aufgaben in der Fachschaft gemeinsam zu lösen und zu diskutieren.

Beim Einsatz der Aufgaben im Unterricht erweist sich, daß ein hoher Grad der Selbständigkeit der Schüler notwendig und auch möglich ist. Durch die vielen Lösungswege und Ergebnisse können die Schüler leicht eigene Ideen entwickeln und sind so stärker motiviert, diese zu verfolgen. Dabei ist die Kooperation der Schüler in zwanglosen, sporadischen Gruppen eine günstige Möglichkeit, die geistigen Aktivitäten der Schüler anzuregen und ihre Freude am selbständigen Finden und Präsentieren von Ideen zu erhöhen.

Die Zeit, die zum Lösen solcher Aufgaben erforderlich ist, zahlt sich u.E. bei einem kontinuierlichen Einsatz langfristig in einer größeren geistigen Beweglichkeit der Schüler und damit im besseren Lösen von Problemen aus.

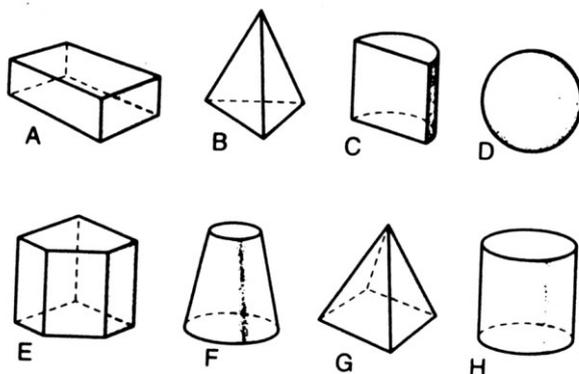
Hans-Dieter Sill, Sven Adler, Danilo Behnke

2 Aufgaben mit Hinweisen

2.1. Klassifizierung von Körpern

Aufgabenstellung

In der Abbildung sind verschiedene Körper dargestellt. Wähle jene Körper aus, die mit dem Körper B gemeinsame Eigenschaften haben und schreibe diese Eigenschaften auf.



Ziele beim Einsatz der Aufgabe

Die Aufgabe kann zur Wiederholung der aus der Grundschule bekannten Körper und ihrer Eigenschaften vor Beginn der Behandlung von Körpern in Kl. 5 oder 6 bzw. zur abschließenden komplexen Festigung eingesetzt werden. Die Schüler kennen aus der Grundschule die Begriffe Quader, Pyramide, Kugel und Zylinder. Die Kenntnis der Begriffe Prisma oder Kegelstumpf ist zur Behandlung der Aufgabe nicht erforderlich.

Mit der Aufgabe könne folgende Ziele erreicht werden:

- Die Schüler erkennen, daß Körper auf verschiedene Weise klassifiziert werden können.
- Die geistige Beweglichkeit der Schüler wird entwickelt, indem sie ihre angeeigneten Kenntnisse über Körper in vielfältiger Weise verwenden.
- Die Aufgabe ermöglicht eine Zusammenfassung und Systematisierung der Kenntnisse der Schüler. Ihre Versuche zur Klassifizierung erlauben ebenfalls eine Überprüfung dieser Kenntnisse.

Die Aufgabenstellung kann in der Art verändert werden, daß ein anderer Körper vorgegeben wird oder die Schüler selbst einen Körper auswählen und dann die dazu passenden Körper mit gemeinsamen Eigenschaften ermitteln. Es wird empfohlen mit dem Körper B zum „Warmmachen“ zu beginnen und danach den Körper H zu wählen.

Auswahl möglicher Lösungen

Die Tabelle enthält mögliche Eigenschaften des Körpers B und gibt die Körper an, die ebenfalls diese Eigenschaft besitzen.

Eigenschaft des Körpers	A	B	C	D	E	F	G	H
Er heißt Pyramide.		x					x	
Er besitzt dreieckige Begrenzungsflächen.		x					x	
Er hat insgesamt 4 Begrenzungsflächen.		x	x					
Die Ansicht von der Seite ist ein Dreieck.		x					x	
Die Begrenzungsflächen sind alle Vielecke.	x	x			x		x	
Bei einem Schnitt parallel zur Grundfläche ist die Schnittfläche stets kleiner als die Grundfläche.		x				x	x	

Wird der Körper H zum Vergleich verwendet, sind folgende Antworten möglich:

Eigenschaft des Körpers	A	B	C	D	E	F	G	H
Er besitzt eine Drehachse.				x		x		x
Die Grund- und Deckfläche sind gleich groß.	x		x		x			x
Die Ansicht von oben ist ein Kreis oder zwei Kreise				x		x		x
Er hat 3 Begrenzungsflächen						x		x
Alle Schnittflächen parallel zur Grundfläche sind gleich groß.	x		x		x			x
Die Seitenflächen sind gekrümmt						x		x
Die Vorderansicht hat die Form eines Rechtecks.	x		x		x			x

Die Antworten können in folgende Gruppen eingeteilt werden:

Nr.	Inhalt
1	Form der Begrenzungsflächen
2	Anzahl der Ecken, Kanten, Flächen und Beziehungen zwischen ihnen
3	parallele oder senkrechte Beziehungen zwischen Kanten und Flächen
4	Form einer Projektion (Draufsicht, Vorderansicht, Seitenansicht)
5	Form einer Schnittfläche (Schnitt parallel, senkrecht oder schräg zur Grundfläche)
6	Form der Abwicklung des Körpers
7	Entstehung durch Bewegen einer ebenen Figur (Drehung oder Verschiebung)
8	Volumen, Oberflächeninhalt
9	Andere (Winkel zwischen Seiten und Grundfläche, ebene oder gekrümmte Flächen bzw. Kanten, Querschnitt stets gleich oder kleiner werdend)

Ergebnisse einer Erprobung der Aufgabe

Die Aufgabe wurde in einer 6. Klasse mit 38 Schülern in der 14. und letzten Stunde einer Unterrichtseinheit zu Körpern als Zusammenfassung behandelt. Die Stunde dauerte 54 Minuten und lief in folgender Weise ab.

Zeit	Schüler- und Lehreraktivitäten
3'	Austeilen von Arbeitsblättern, Folien mit Körpern gezeigt, Aufgabe 1: mit B vergleichen
7'	Schüler tragen Lösungen in ihr Arbeitsblatt ein
18'	Schüler tragen Ergebnisse vor und diskutieren sie, Lehrer trägt Antworten in Tabelle ein
9'	Schüler bearbeiten Aufgabe 2: mit H Vergleichen
15'	Schüler tragen Ergebnisse vor und diskutieren sie, Lehrer trägt Antworten in Tabelle ein
2'	Zusammenfassung durch Lehrer

Neben den erwarteten Antworten kamen u.a. noch folgende richtige Lösungen von den Schülern:

- beim Vergleich mit Körper B: (in Klammern die Körper, für die dies außer B zutrifft)
 - hat nur eine Grundfläche (G)
 - ist kein Rotationskörper (A, C, E, G)
 - hat nur gerade Kanten (A, E, G)
 - hat ein Volumen (alle)
 - hat Ecken (A, C, E, G)
 - hat 4 Flächen (C)
 - die Anzahl der Kanten ist doppelt so groß wie die Anzahl der Kanten der Grundfläche
- beim Vergleich mit Körper H: (in Klammern die Körper, für die dies außer H zutrifft)
 - hat nur eine Seitenfläche (F)
 - hat eine Grundfläche und eine Deckfläche (A, C, E, F)

- hat keine Ecken (D, F)
- die Seitenansicht ist ein Viereck (A, C, E)
- hat zwei Kanten (F)
- Schnitte parallel zur Grundfläche sind Kreise (F)
- Schnitte parallel zur Grundfläche sind kongruent (A, C, E)

Anzahl der Antworten bezüglich der 9 Gruppen von Eigenschaften:

Nr. der Gruppe	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Anzahl der Schüler mit entspr. Antworten	7	36	7	20	18	0	16	1	27
Anzahl richtiger Antworten	7	77	9	28	26	0	17	1	37

2.2. Die Rangfolge von Mannschaften in einem Marathonlauf

Aufgabenstellung

Die drei Mannschaften A, B, C nehmen an einem Marathonlauf teil. Jede Mannschaft hat 10 Läufer. Die Ergebnisse des Laufes sind in der Tabelle angegeben.

Welche Mannschaft hat nach deiner Meinung gewonnen? Finde so viele Wege wie möglich, um einen Gewinner zu bestimmen!

Platz des Läufers	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Mannschaft des Läufers	A	B	A	C	B	B	C	A	C	C	C	B	A	A	B
Platz des Läufers	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Mannschaft des Läufers	B	C	A	C	B	C	B	B	A	C	A	A	A	C	B

Ziele beim Einsatz der Aufgabe

Die Aufgabe kann in Klasse 7 im Stoffgebiet Stochastik eingesetzt werden, nachdem verschiedene Maße zur Charakterisierung einer Verteilung behandelt wurde.

Mit der Aufgabe können eindrucksvoll folgende Einsichten vermittelt werden:

- Bei der Auswertung von Daten können oft verschiedene Methoden eingesetzt werden, die zu unterschiedlichen Ergebnissen führen und ihre Vorteile und auch Nachteile haben.
- Man kann eine Auswertung von Daten unter folgenden Gesichtspunkten vornehmen:
 - Berücksichtigung einzelner Werte (z.B. größter, kleinster häufigster Wert)
 - Berechnung eines mittleren Wertes (Mittelwert, Zentralwert)
 - Berechnung eines Wertes für die Streuung um einen mittleren Wert
- Die Auswahl einer geeigneten Methode richtet sich in erster Linie nach den Zielen der statistischen Untersuchung.
- Es reicht nicht aus, bei einer statistischen Untersuchung nur die Daten und die daraus berechneten Ergebnisse anzugeben. Es müssen auch die verwendeten Methoden genau beschrieben und angegeben werden.

Auswahl möglicher Lösungen

Es können zwei Gruppen von Auswertungsverfahren unterschieden werden:

A: Verwendung der Plazierungen eines Teils der Mitglieder jeder Mannschaft:

1. Anzahl der Plätze unter den ersten 10

A: 3 Plätze → 2. Platz

B: 3 Plätze → 2. Platz

C: 4 Plätze → 1. Platz

2. Summe der Platzziffern der Läufer unter den ersten 10

A: $1 + 3 + 8 = 12$ → 1. Platz

B: $2 + 5 + 6 = 13$ → 2. Platz

C: $4 + 7 + 9 + 10 = 30$ → 3. Platz

3. Beste Platzierung in jeder Mannschaft

A: 1. → 1. Platz

B: 2. → 2. Platz

C: 4. → 3. Platz

4. Schlechteste Platzierung in jeder Mannschaft

A: 28. → 1. Platz

B: 30. → 2. Platz

C: 29. → 3. Platz

5. Summe der Platzziffern der besten 5 Läufer jeder Mannschaft

A: $1 + 3 + 8 + 13 + 14 = 39$ → 1. Platz

B: $2 + 5 + 6 + 12 + 15 = 40$ → 2. Platz

C: $4 + 7 + 9 + 10 + 11 = 41$ → 3. Platz

6. Verwendung des Zentralwertes der Plätze (Platz des 5. Läufers) in jeder Mannschaft

A: 14. → 2. Platz

B: 15. → 3. Platz

C: 11. → 1. Platz

7. Ermittlung der Anzahl der Plätze unter den ersten 10, den mittleren 10 und den letzten 10 Läufern

	1. – 10. Platz	11. + 20. Platz	21. –30. Platz	Reihenfolge
A	3	3	4	3. Platz
B	3	4	3	2. Platz
C	4	3	3	1. Platz

8. Verwendung der Differenz der Platzziffern des besten und schlechtesten Läufers

A: $28 - 1 = 27$ → 2. Platz

B: $30 - 2 = 28$ → 3. Platz

C: $29 - 4 = 25$ → 1. Platz

B: Verwendung der Platzierungen aller Mitglieder der Mannschaft

1. Summe der Platzziffern aller Mitglieder

A: 162 → 3. Platz

B: 151 → 1. Platz

C: 152 → 2. Platz

2. Summe der Differenzen der Platzziffer des Mitgliedes zum Mittelwert der Platzziffern

A: (Mittelwert 16): $15 + 13 + \dots + 11 + 12 = 84$ → 3. Platz

B: (Mittelwert 15): $13 + 10 + \dots + 8 + 15 = 71$ → 2. Platz

C: Mittelwert 15): $11 + 8 + \dots + 10 + 14 = 70$ → 1. Platz

Ergebnisse einer Erprobung der Aufgabe

Die Stunde wurde in einer 5. Klasse mit 40 Schülern am Ende des Schuljahres erprobt. Nach einer frontalen und Einzelarbeit wurde die Klasse in drei Gruppen geteilt, denen je eine der

Mannschaften A, B bzw. C zugeordnet wurde. Jede Gruppe sollte versuchen, möglichst viele Auswertungsmethoden zu finden, bei denen ihre Mannschaft den 1. Platz belegt.

Nach der Gruppenarbeit wurden von jeder Gruppe die Ergebnisse vorgetragen und die Vorteile und Nachteile der Methoden diskutiert.

Es wurde erfaßt, welche Verfahren von jedem Schüler während der Einzel- bzw. Gruppenarbeit gefunden wurde

In der Stunde fanden die Schüler insgesamt 16 verschiedene Verfahren zur Ermittlung des Siegers.

Neben den schon genannten Verfahren schlugen die Schüler noch folgende vor:

- Summe der Punkte für die Läufer unter den ersten 10, wenn der erste 10 Punkte, der zweite 9 Punkte usw. erhält
- Berechnung des Mittelwertes der besten 5 Läufer jeder Gruppe
- Vergleich der Platzierungen des besten, zweitbesten, drittbesten usw. Läufers in jeder Gruppe

Am häufigsten wurden folgende Verfahren entdeckt (s.o.): B1 (32-mal), A1 (22-mal), A8 (14 mal). Die übrigen Verfahren wurden nur von 1 bis 3 Schüler gefunden.

2.3. Funktionen und ihre Graphen

Aufgabenstellung

Die Tabelle und der Graph in (1) zeigen, wie sich die Werte von zwei Funktionen ändern.

In (2) sind verschiedene Funktionsgleichungen angegeben.

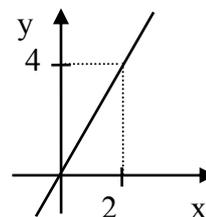
Welche Funktionen in (2) haben insgesamt oder teilweise eine gemeinsame Eigenschaft mit einer der in (1) dargestellten Funktionen?

Finde möglichst viele Eigenschaften!

(1) Tabelle:

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y	...	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	...

Graph:



(2) a) $y = \frac{2}{3}x$

b) $y = -x$

c) $y = 2x + 1$

d) $y = x^2$

e) $y = \frac{1}{x}$

f) $y = x + 2$

g) $y = -\frac{1}{2}x - 2$

Ziele beim Einsatz der Aufgabe

Diese Aufgabe ermöglicht eine komplexe Wiederholung linearer Funktionen in Klasse 8.

Dadurch, daß hier nicht gezielt nach einzelnen Eigenschaften der Funktionen gefragt wird, muß der Schüler sich selbständig Eigenschaften wählen, auf die hin er die Funktionen untersuchen will. Er erkennt, daß die Eigenschaften z.T. unabhängig voneinander kombinierbar sind, und daher jede Funktion aufs Neue betrachtet werden muß. Die Frage nach dem Verlauf des Graphen im Koordinatensystem, der Linearität, der Steigung, usw. kann auch mit der Wiederholung der direkten und umgekehrten Proportionalität verbunden werden.

Durch die Hinzunahme von nichtlinearen Funktionen erkennen die Schüler u.a., daß bestimmte Eigenschaften der linearen Funktionen auch für andere Funktionen gelten.

Auswahl möglicher Lösungen

Vergleiche mit dem Graphen in (1)

Gesichtspunkt	Eigenschaft	Funktionen mit gleichen Eigenschaften
Wachstumsverhalten	wenn x wächst, so wächst auch y Der Anstieg ist konstant. Der Anstieg ist positiv. Der Anstieg ist 2.	a), c), d) für $x > 0$, f) a), b), c), f), g) a), c), f) c)
Verlauf des Graphen	Der Graph ist eine Gerade. Der Graph verläuft durch den Ursprung. Der Graph verläuft durch den ersten und dritten Quadranten. Für $x > 0$ ist auch $y > 0$. Der Graph geht durch den Punkt (2; 4).	a), b), c), f), g) a), b), d), a), e) a), c), d), e), f) d), f)
Funktionsgleichung	Die Funktion hat die Gleichung $y = a \cdot x$.	a), b)
Bezeichnung	Es ist eine lineare Funktion. y ist proportional zu x.	a), b), c), f), g) a)

Vergleiche mit der Tabelle in (1)

Gesichtspunkt	Eigenschaft	Funktionen mit gleichen Eigenschaften
Wachstumsverhalten	Wenn x wächst, dann fällt y. Der Anstieg ist negativ. Wenn x um 1 wächst, fällt y um 1. Der Anstieg ist -1	b), e), g) b), g) b) b)
Verlauf des Graphen	Der Graph ist eine Gerade. Der Graph geht durch den Punkt (0; -2). Der Graph geht durch den Punkt (-2; 0) Der Graph geht durch den Punkt (-1, -1). Der Graph verläuft durch den 2.,3. und 4. Quadranten	a), b), c), f), g) g) f) e) g)
Funktionsgleichung	Die Funktion hat die Gleichung $y = a \cdot x + b$	a), b), c), f), g)
Bezeichnung	Es ist eine lineare Funktion.	a), b), c), f), g)

Ergebnisse einer Erprobung der Aufgabe

Für die Bearbeitung und anschließende Auswertung dieser Aufgabe wurden zwei Stunden verwendet. Die Bearbeitung der Aufgaben erfolgte in Gruppen. Innerhalb der Gruppe arbeitete zuerst jeder für sich. In einer zweiten Phase verglichen die Schüler nun ihre Ergebnisse untereinander, werteten sie bzw. korrigierten sie. An diese Phase schloß sich die Präsentation der Gruppenergebnisse an. Die Schüler lernten hier ihre Ergebnisse vorzustellen, diese zu vertreten und zu diskutieren.

Im Anschluß an die Präsentationen wurden die Ergebnisse im Klassengespräch diskutiert und vom Lehrer zusammengefaßt sowie gelungene Lösungen hervorgehoben.

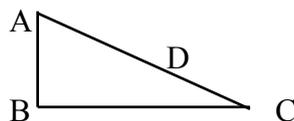
In der Klasse waren 44 Schüler. Es wurde in 11 Gruppen gearbeitet.

Schüler- und Lehrertätigkeit	Zeit
L. stellt die Aufgabe und das Vorgehen in dieser Stunde vor.	5'
S. bearbeiten einzeln ein Arbeitsblatt und vergleichen zuerst mit dem Graphen und dann mit der Tabelle.	20'
S. vergleichen ihre Ergebnisse innerhalb einer Gruppe, korrigieren und ergänzen.	20'
Ein Schüler in jeder Gruppe schreibt die Gruppenergebnisse auf eine Folie.	5'
Ein Schüler jeder Gruppe trägt die Gruppenergebnisse vor.	20'
Der L. faßt die Ergebnisse der Gruppen zusammen und schreibt sie an eine Tafel.	30'

2.4. Mittelparallelen im Dreieck

Aufgabenstellung

Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei B. Der Punkt D ist der Mittelpunkt der Strecke AC.



- Die Punkte E, F, G seien jeweils die Mittelpunkte der Strecken AD, DC und BC. Wähle den Punkt H auf AB so, das DB parallel zu EH ist. Verbinde nun die Punkte B und D, E und H, F und G sowie H und G.
- Finde in der nun entstandenen Figur so viele Beziehungen wie möglich und schreibe diese auf. (Hilfe: Betrachte zuerst die Beziehungen zwischen Seiten und Dreiecken.)
- Zusatz: Bleiben die Beziehungen, die Du in der Aufgabe b) gefunden hast, erhalten, wenn es sich bei dem Dreieck nicht um ein rechtwinkliges handelt?

Ziele beim Einsatz der Aufgabe

Diese Aufgabe eignet sich für die gemischten Übungen im Stoffgebiet Ähnlichkeit in Klasse 9. In dieser Aufgabe werden Untersuchungen zur Kongruenz und Ähnlichkeit miteinander verbunden. Die entstehende Figur, die hier zu untersuchen ist, hat eine komplexe Struktur. Die Schüler erkennen, dass sie hier mit Intuition nicht mehr viel erreichen können. Sie müssen die ihnen aus dem vorangegangenen Unterricht bekannten Sätze anwenden, um zu Lösungen zu kommen.

Vor Behandlung der Aufgabe sollten die Schüler den Satz über die Mittelparallelen im Dreieck kennen, der zur Begründung benötigt wird. In der Aufgabe wird weiterhin die Umkehrung dieses Satzes benötigt, die damit gefunden und begründet werden kann.

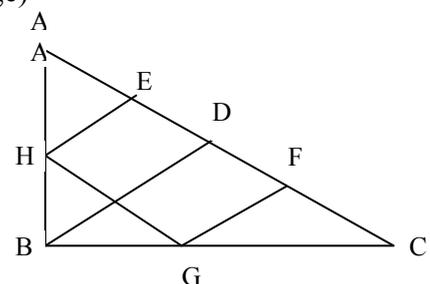
Auswahl möglicher Lösungen

Beziehungen zwischen Seiten: (# heißt parallel und gleiche Länge)

$$\begin{aligned}
 FG \# \frac{1}{2} BD \quad AH = BH \quad EH \# \frac{1}{2} BD \quad GH \# \frac{1}{2} AC \\
 AD = CD = BD (= HG) * \quad HE = AE = ED = DF = FG = CF *
 \end{aligned}$$

Beziehungen zwischen Dreiecken und Vierecken:

$$\triangle CGF \sim \triangle CBD \quad \triangle AHE \sim \triangle ABD \quad \triangle BHG \sim \triangle BAC$$



gleichschenklige Dreiecke: (FGC, DBC, AHE, ABD)*

$$\triangle DBC = \triangle ABD = \square HGFE$$

$$\triangle AHE = \triangle FGC = \frac{1}{4} \triangle ABD = \frac{1}{4} \triangle BDC \quad \triangle BHG = \frac{1}{4} \triangle ABC$$

Weitere Beziehungen:

HGFE ist ein Parallelogramm.

Der Punkt D ist der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC.*

Das Dreieck HBG ist rechtwinklig.*

(* : Gilt nur, wenn es sich um ein rechtwinkliges Dreieck handelt)

Ergebnisse einer Erprobung der Aufgabe

Die Aufgabe wurde im Rahmen einer Unterrichtsstunde in einer 8. Klasse mit 41 Schülern bearbeitet. Nach dem Stellen der Aufgabe und Verteilen der Arbeitsblätter (5') hat jeder Schüler Aufgabe a) gelöst (5'). Da für die Bearbeitung der Aufgabe b) eine genaue Zeichnung notwendig ist, sollten die Schüler sich dabei gegenseitig kontrollieren.

Anschließend suchten die Schüler nach Beziehungen (15') zwischen Seiten und Figuren sowohl in Einzelarbeit als auch in Partnerarbeit. Die gefundenen Eigenschaften wurden genannt und im Unterrichtsgespräch begründet und systematisiert (20').

Die Teilaufgabe c) diente zur inneren Differenzierung und wurde als Hausaufgabe gestellt.

Anzahl der gefundenen Beziehungen:

Anzahl der Beziehungen	0-1	2-3	4-5	6-7	8-9	10-11	12-13	über 13
Anzahl der Schüler	0	4	8	10	8	6	4	1

2.5. Eigenschaften einer Multiplikationstabelle

Aufgabenstellung

Die Anordnung der Zahlen in dem Schema wurde nach einer bestimmten Regeln vorgenommen. Finden Sie so viele Zusammenhänge zwischen den Zahlen wie möglich, indem Sie Zeilen, Spalten, Diagonalen oder andere Teilmengen des Schemas untersuchen.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Ziele beim Einsatz der Aufgabe

Die Aufgabe kann in der Klasse 11 im Zusammenhang mit der Behandlung von Zahlenfolgen und Reihen eingesetzt werden. Die Aufgabe hat folgende Potenzen:

1. Die Schüler erleben, welche vielfältigen Strukturen und Beziehungen in einer einfachen Zahlenanordnung verborgen sind. Sie können selbst immer neue Entdeckungen machen und diese nachweisen.
2. Die Schüler können auf sehr verschiedenen Niveaus Gesetzmäßigkeiten in Zahlenfolgen und Reihen finden, diese mit Variablen verallgemeinern und begründen. Sie lernen, zwischen allgemeinen Fällen und speziellen Beispielen zu entscheiden. Weiterhin können sie befähigt werden, geeignete Buchstaben als Variablen in allgemeinen Ausdrücken zu nutzen.
3. Es können spezielle Zahlenfolgen und Summenformeln sowie das Arbeiten mit dem Summenzeichen gefestigt werden, insbesondere die Summe einer arithmetischen Reihe sowie die Summen $\sum k$, $\sum (2k+1)$ und $\sum k^2$.
4. Die Aufgabe ist für kooperatives Arbeiten sehr geeignet, da viele Ideen möglich sind, die in die Gruppendiskussion von den Schülern eingebracht und dort näher betrachtet und verfolgt werden können.

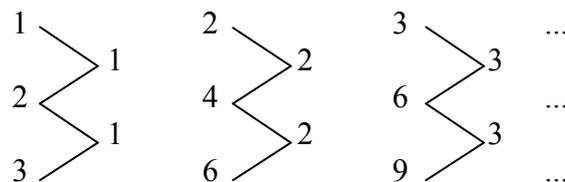
Hinweise zum Einsatz der Aufgabe:

Die Schüler sollten mehrere Arbeitsblätter erhalten, auf denen das Zahlenschema (ohne Gitternetz) mit möglichst großen Abständen zwischen den Zahlen enthalten ist, damit die Schüler mehrere Versuche unternehmen und Linien einzeichnen bzw. Differenzen oder Summen benachbarter Zahlen berechnen können.

Auswahl möglicher Lösungen

A. Über die Anordnung der Zahlen

- A1. Die Zahlen in jeder Zeile und Spalte sind Vielfache von 1, 2, 3, ..., 10.
 A2. In jeder Spalte ist die Differenz zwischen jeder Zahl und der nächsten Zahl eine Konstante, d.h., daß die Zahlen in jeder Spalte eine arithmetische Zahlenfolge bilden. Dieses gilt auch für die Zeilen.



- A3. Alle Zahlen auf der Hauptdiagonalen von oben links nach unten rechts sind Quadratzahlen.
 A4. Die Zahlen sind symmetrisch hinsichtlich der Hauptdiagonalen angeordnet.
 A5. Man betrachte die Differenzenmatrix, die sich aus den Differenzen der Zahlen auf den Diagonalen von unten links nach oben rechts ergibt:

1	2	3	4	5	...
	0	1	2	3	...
2	4	6	8	10	...
	1	0	1	2	...
3	6	9	12	15	...
	2	1	0	1	...
4	8	12	16	...	
	3	2	...		
5	10	...			

Dieses Schema hat die folgenden Eigenschaften:

- In den Diagonalen von links oben nach rechts unten treten die gleichen Zahlen auf.
 - In den Spalten unterhalb und den Zeilen rechts von der Hauptdiagonalen tritt die Folge der natürlichen Zahlen auf.
 - Werden die Differenzen immer von oben links nach unten rechts genommen und mit Vorzeichen versehen, dann haben die gegenüberliegenden Ausdrücke bzgl. der 0-0-0-Diagonalen entgegengesetzte Vorzeichen und die Ausdrücke entlang der Diagonalen von oben rechts nach unten links sind arithmetische Folgen.
- A6. Analog zu A5 kann man die Differenzen der Zahlen auf den Diagonalen von oben-links nach unten rechts bilden.
- A7. Das folgende Schema zeigt, wie sich die Folge der Zahlen der Zahlen 1, 4, 12, 32, 80, ... erzeugen läßt:

1	2	3	4	5	6	
2	4	6	8	10	12	1 Zeile tiefer
3	6	9	12	15	18	
4	8	12	16	20	24	2 Zeilen tiefer
5	10	15	20	25	30	
6	12	18	24	30	36	
7	14	21	28	35	42	
8	16	24	32	40	48	4 Zeilen tiefer
9	18	27	36	45	54	
10	20	30	40	50	60	

Um die Folge 1, 4, ... zu finden, betrachte man zuerst 1 und 3 in der ersten Zeile, indem man über die Zahl zwischen ihnen (2) springt. Ihre Summe 4 steht eine Zeile unter der Zahl, über die wir gesprungen sind. Als nächstes betrachten wir die Zahlen 4 und 8 in der zweiten Zeile, indem wir wieder über die Zahl zwischen springen (6). Ihre Summe, 12, befindet sich in unserer Tafel zwei Zeilen unter der übersprungenen Zahl. Genauso ist die Summe von 12 und 20 in der vierten Zeile genau vier Zeilen unter der übersprungenen Zahl zu finden.

Im $(n+1)$ ten Schritt ist die Summe $(n+2)2^{n+1}$ in der 2^n ten Zeile unter der vorigen Zeile zu finden. ($n = 0, 1, \dots$)

Analoge Muster können gefunden werden, indem man über eine andere ungerade Anzahl von Zahlen springt.

B Über die Summe der Zahlen

- B1. Die Summe aller Zahlen einer Zeile oder Spalte ist ein Vielfaches von 55.
- B2. Betrachtet man die Zeile 1 als Spaltennummer und die Spalte 1 als Zeilennummer, so kann man die Summe der Zahlen, die in einem Rechteck eingeschlossen sind, wie folgt berechnen:
- a) man addiere die Nummern der Spalten, die im Rechteck enthalten sind,
 - b) man verfähre genauso mit den Zeilennummern und
 - c) man multipliziere die beiden Summen.

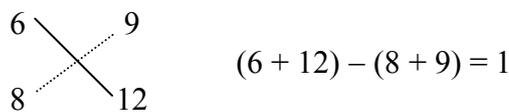
Bsp.: Summe der Zahlen im Rechteck: $S = (5 + 6 + 7 + 8 + 9) \cdot (6 + 7 + 8) = 735$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

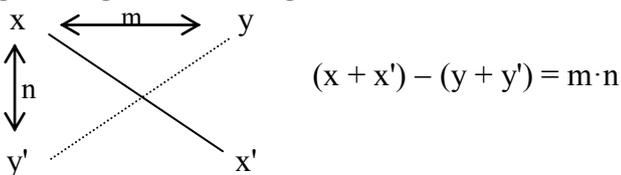
- B3. Nimmt man sich eine beliebige Zahl der Tafel heraus, dann ist die Summe zweier Zahlen in einer Spalte oder Zeile, die symmetrisch zu dieser Zahl liegen, doppelt so groß wie diese Zahl.



- B4. Die Differenz zwischen der Summe der Zahlen in den gegenüberliegenden Ecken eines 1×1 Quadrates ist 1.



Allgemein gilt für beliebige Rechtecke der Größe $m \times n$:



- B5. Es wird das Verhältnis der Summen E, I, R in einem Rechteck betrachtet. Dabei sei E die Summe der Zahlen in den Ecken des Rechtecks, I sei die Summe der Zahlen innerhalb des Rechtecks (d.h., sie sollen nicht Teil einer Seite sein). R sei die Summe der Zahlen auf dem Rand (inkl. der Eckzahlen). Dann ist das Verhältnis E : I : R für jedes 3×5 Rechteck konstant.

		5					
	30	36	42	48	54	E = 196	
3	35	42	49	56	63	I = 147	
	40	48	56	64	72	R = 588	

$$E : I : R = 196 : 147 : 588 = 4 : 3 : 12$$

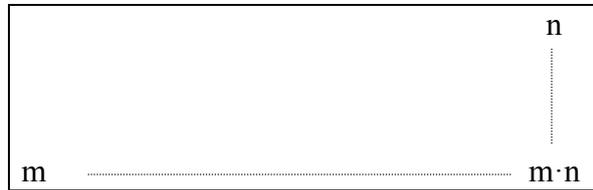
Allgemein gilt für Rechtecke der Dimension $m \times n$:

$$E : I : R = 4 : (m - 2)(n - 2) : 2(m + n - 2)$$

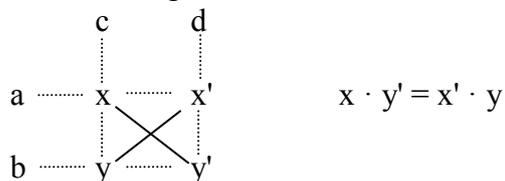
Dieses Verhältnis ist solange konstant, wie die Dimensionen des Rechteckes nicht verändert werden.

C Über das Produkt der Zahlen

C1. Die Zahl in der m -ten Zeile und der n -ten Spalte ist gleich $m \cdot n$



C2. Für jedes aus Zeilen und Spalten geformte Rechtecke gilt:
Das Produkt der Zahlen am Ende einer Diagonale ist gleich dem Produkt der Zahlen der anderen Diagonale.



C3. Wenn das Rechteck aus C2 quadratisch ist, dann ist das Produkt aller Zahlen einer Diagonale gleich dem Produkt der Zahlen der anderen Diagonale.

D. Über Zahlenfolgen

Bei diesen Antworten bezeichnet a_i die Summe einer speziellen Menge von Zahlen im i -ten Schritt.

D1. Die untere Figur zeigt Zahlenfolgen, die aus rechtwinkligen Linien an Teilen der Zeilen und Spalten entstehen.

1	2	3	4	5	...
2	4	6	8	10	...
3	6	9	12	15	...
4	8	12	16	20	...
5	10	15	20	25	...

Es ergibt sich die Folge:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 1 & &= 1 \\
 a_2 &= 2 + 4 + 6 & &= 8 \\
 a_3 &= 3 + 6 + 9 + 6 + 3 & &= 27 \\
 &\vdots & & \\
 a_n &= n(1 + 2 + \dots + n) + n(1 + 2 + \dots + (n-1)) & &= n^3
 \end{aligned}$$

- D2. Betrachten wir nun ein 2×2 Quadrat, daß sich jeweils eine Zeile nach unten und eine Spalte nach rechts bewegen soll.

1	2			
2	4	6		
	6	9	12	
		12	16	20
			20	25

Es ergibt sich die Folge:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 + 2 + 2 + 1 && = 9 \\ a_2 &= 4 + 6 + 6 + 9 && = 25 \\ &\vdots \\ a_n &= n^2 + 2n(n+1) + (n+1)^2 && = (2n+1)^2 \end{aligned}$$

Diese Eigenschaft kann durch Vergrößern der Quadrate verallgemeinert werden.

So gilt für ein 3×3 Quadrat:

$$\begin{aligned} a_1 &= 36 \\ a_2 &= 81 \\ &\vdots \\ a_n &= (3n+3)^2 \end{aligned}$$

$$\text{Allgemein für ein } k \times k \text{ Quadrat: } a_n = \left(kn + \frac{k(k-1)}{2} \right)^2$$

Bemerkung: Eine weitere Variation wäre es, die Richtung zu verändern, in die sich das Quadrat bewegt. Wenn sich z.B. das Quadrat genau eine Zeile abwärts bewegt (und nicht auch noch nach links), haben wir: $a_1 = 9$, $a_2 = 15$, ..., $a_n = 6n + 3$. Wenn sich das Quadrat der Größe $k \times k$ so bewegt, dann gilt in diesem Fall:

$$a_n = \frac{1}{2}k(k+1)\left(kn + \frac{k(k-1)}{2}\right)$$

- D3. Die nächste Figur zeigt die Bewegung von Kreuzformen in dem Zahlenschema.

1	2	3	4	5		
2	4	6	8	10		
3	6	9	12	15		
4	8	12	16	20	24	

Betrachten wir die Zeile, in der sich die Spitze des Kreuzes befindet.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} a_1 &= 4 + 2 + 2 + 6 + 6 && = 20 \\ a_2 &= 12 + 8 + 9 + 16 + 15 && = 60 \\ &\vdots \\ a_n &= 10n(n+1) \end{aligned}$$

- D4. In der nächsten Figur betrachten wir ein 1×2 Rechteck, daß sich eine Zeile abwärts und eine Spalte nach rechts bewegt.

1	2		
	4	6	
		9	12

Von der Zeile ausgehend, in der sich das Rechteck befindet, gilt:

$$a_1 = 1 + 2 = 3$$

$$a_2 = 4 + 6 = 10$$

$$a_3 = 9 + 12 = 21$$

⋮

$$a_n = 2n^2 + n$$

Bemerkung: Diese Art der Untersuchung kann weiter geführt werden, indem man die Rechtecke vergrößert bzw. sich in andere Richtungen bewegen läßt (siehe auch D2).

- D5. Betrachten wir nun eine Folge von Quadraten in Quadraten:

9	12	15	18	21	24
12	16	20	24	28	32
15	20	25	30	35	40
18	24	30	36	42	48
21	28	35	42	49	56
24	32	40	48	56	64

Beginnen wir die Folge mit dem innersten Quadrat und berechnen die Summe auf dem Umfang des Quadrates, dann gilt:

$$a_0 = 25 + 2 \cdot 30 + 36 = 121$$

$$a_1 = 16 + 2 \cdot 20 + 2 \cdot 24 + \dots + 2 \cdot 42 = 363$$

$$a_2 = 9 + 2 \cdot 12 + 2 \cdot 15 + \dots + 2 \cdot 56 + 64 = 605$$

⋮

$$a_n = 121 \cdot (2n + 1)$$

Auch hier sind weiterführende Betrachtungen durch Veränderungen der Lage des ersten Quadrates möglich. Allgemein gilt: $a_n = (\text{Summe im ersten Quadrat}) \cdot (2n+1)$.

Eine weitere Möglichkeit besteht darin, für a_0 ein 1×1 Quadrat zu nutzen.

6	8	10	12	14
9	12	15	18	21
12	16	20	24	28
15	20	25	30	35
18	24	30	36	42

In diesem Fall gilt, daß die Summe der Zahlen auf dem Rand des Quadrats sich folgendermaßen errechnet:

$$a_1 = 160 = 20 \cdot \underline{8}$$

$$a_2 = 320 = 20 \cdot \underline{16}$$

⋮

$$a_n = 20 \cdot \underline{8n}$$

Dabei sind die unterstrichenen Zahlen die Anzahl der Zahlen auf dem Rand.

- D6. Man kann eine Summenfolge bilden, indem man die Zahlen längs der Diagonalen, wie im unteren Bild, verwendet.

1	2	3	4
2	4	6	
3	6		
4			

- a) Der "Anstieg" der Diagonalen ist 1.

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 2 + 2 = 4$$

$$a_3 = 3 + 4 + 3 = 10$$

⋮

$$a_n = n + 2 \cdot (n - 1) + 3 \cdot (n - 2) + \dots + (n - 1) \cdot 2 + n = \frac{1}{6}n(n + 1)(n + 2)$$

- b) Der Anstieg der Diagonalen ist 2.

1	2	3	4
2	4	6	8
3	6	9	12
4	8	12	16
5	10	15	20
6	12	18	24
7	14	21	28

$$a_1 = 1 \cdot 1 = 1$$

$$a_2 = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = (1 + 3) + 1 = 5$$

$$a_3 = 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = (1 + 3 + 5) + (1 + 3) + 1 = 9 + 4 + 1$$

⋮

$$a_n = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$$

- c) Es sind auch negative Anstiege denkbar. Die Summation muß dann bis zu einer Zahl k erfolgen Für den Anstieg -1 gilt:

$$a_1 = 1 + 4 + 9 + \dots + k^2 = \frac{1}{6}k(k + 1)(2k + 1)$$

$$a_2 = 2 + 6 + 12 + \dots + k(k + 1) = \frac{1}{3}k(k + 1)(k + 2)$$

⋮

$$a_n = \sum i(i + n - 1) = \frac{1}{6}k(k + 1)(2k + 3n - 2)$$

Ergebnisse einer Erprobung der Aufgabe

Diese Aufgabe wurde nach einer Unterrichtseinheit über Zahlenfolgen bearbeitet. Es wurden drei Doppelstunden dafür verwendet. Die Schüler erhielten Arbeitsblätter mit dem Zahlenschema. Weiterhin wurde das Schema auf zehn große Blätter gedruckt, die während der Erklärungen des Lehrers genutzt wurden. Der Unterricht wurde in einem mit AV-Geräten ausgestatteten Raum gegeben.

Unterrichtsablauf:

1. *Doppelstunde:* Der Lehrer präsentierte das Problem unter Nutzung des Fernsehers. Dann verteilte er die Arbeitsblätter. In den folgenden 45 Minuten stellte die Schüler ohne einschränkende oder leitende Worte des Lehrers Ergebnisse ihrer Arbeit vor. Die Schüler nutzten dazu das Fernsehgerät und teilweise farbige Tafeln und kamen u.a. zu folgenden Ergebnissen:

- Jede Zeile und jede Spalte stellt eine arithmetische Zahlenfolge dar.
- Die Zahlen sind symmetrisch bzgl. der Hauptdiagonalen.
- Auf dieser Diagonalen sind alle Zahlen Quadratzahlen

Von Schüler wurden u.a. folgende Bemerkungen gemacht::

"Was ist mit der Folge 2, 6, 12, 20...?"

"Diese Zahlen sehen aus, als wenn man sie ausgewählt hätte, wie sich der Läufer beim Schach bewegt."

"Nun versuche ich Zahlen zu nehmen, die den Bewegungen eines Springers beim Schach entsprechen."

An dieser Stelle griff der Lehrer in die Diskussion ein und faßte die Beobachtungen der Schüler zusammen, indem er das Konzept des "Anstieges" vermittelte und die Schüler bat, in dieser Richtung weiterzumachen. Dabei unterließ es der Lehrer, zuviel zu sagen.

Ein weiteres Unterrichtsgespräch:

Präsentation:

1	2	3	Die Summe der Zahlen an jeder Trennlinie ist \bigcirc x \square
\bigcirc 2	\square 4	6	
\bigcirc 3	6	\square 9	

" $2 \cdot 4=2^3$, $3 \cdot 9=3^3$, ... Also muß jeder Term n^3 sein."

"Bist du sicher, daß das immer gilt?"

"Ja, ich werde es nachweisen. Der n -te Term ist

$$\begin{aligned}
 & (n \cdot 1 + n \cdot 2 + \dots + n \cdot n) \cdot 2 - n^2 \\
 &= n(1 + 2 + \dots + n) \cdot 2 - n^2 \\
 &= n \cdot n(n+1) - n^2 \\
 &= n^3 + n^2 - n^2 \\
 &= n^3
 \end{aligned}$$

"Ja, das stimmt."

Der Lehrer sammelte am Ende der Doppelstunde die zu Beginn ausgeteilten Arbeitsblätter ein und teilte neue aus. Die Schüler sollten ihre Ideen bis zur nächsten Stunde zusammenfassen.

2. *Doppelstunde:* Der Lehrer griff einige Male mit Fragen oder mit Erklärungen in die Darlegungen der Schüler ein. Da jedoch nur einige Schüler vorbereitet waren, legte er eine Phase der Einzelarbeit von 35 Minuten fest. Anschließend wurden folgende Ergebnisse vorgetragen:

Es wurde die Eigenschaften von Folgen erklärt, die durch verschiedene Anstiege (s. D6.) gebildet wurden. Da kein Schüler auf die Summen in diesen Folgen hinwies, fragte der Lehrer

danach und bat die Schüler, die Summen zu jeder Folge in D6 zu finden. Einige Schüler fanden diese Aufgabe zu schwierig. Über 40 Minuten wurden für diese Arbeit verwendet.

Es wurden weiterhin Aussagen über die Bewegungen sowie die Größe von Quadraten (siehe D2) getroffen und von Schülern nachgewiesen.

3. Doppelstunde: Im dritten Doppelstunde leitete der Lehrer den Unterrichtsverlauf. Die Schüler nutzten ihre Taschenrechner. Nachdem der Lehrer den Schülern farbige Rechtecke in dem Schema zeigte, stellte er die Aufgabe, die Summe dieser Rechtecke zu bestimmen. Danach erklärte der Lehrer die Bedeutung von E, I, und R (s. B5), und er bat die Schüler, das Verhältnis E:I:R zu bestimmen. Sie untersuchten das Verhältnis in Rechtecken derselben Größe, die sich in verschiedenen Bereichen der Tafel befanden. Die Schüler beobachteten, daß die Verhältnisse überall gleich sind und versuchten, den Grund dafür zu bestimmen.

Auswertungen nach der Unterrichtseinheit:

1. Beispiele von Antworten, die auf Arbeitsblättern der Schüler gefunden wurden

Es war in den Stunden unmöglich, viele verschiedene Ideen näher zu betrachten. Der Lehrer fand nach Durchsicht der Arbeitsblätter der Schüler die meisten der erwarteten Antworten. Es waren allerdings auch wenig inhaltsreiche Feststellungen darunter und es zeigte ein Mangel in der Verallgemeinerung der Aussagen.

Die Antworten B2 und B5 wurden von den Schülern nicht gefunden. Es scheint verständlich, daß das Verhältnis E:I:R nicht betrachtet wurde, aber warum die Schüler nicht auf die Eigenschaft B2 kamen, ist nicht erklärbar, da die Betrachtung von Summen in Rechtecken doch naheliegt.

2. Betrachtung von Folgen entlang von Diagonalen

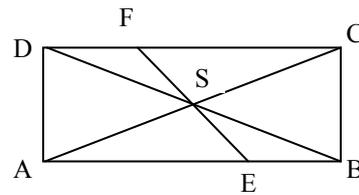
Obwohl der Lehrer erwartete, daß geschickte Fragestellungen notwendig wären, um die Aufmerksamkeit der Schüler auf die Folgen entlang der Diagonalen zu lenken, kam etwa ein Drittel der Schüler auf diese Idee. Fünf oder sechs Schüler in der Klasse betrachteten auch Folgen mit Anstiegen. Die Tatsache, daß sich auf der Hauptdiagonalen Quadratzahlen befanden und diese eine Symmetrielinie ist, führte wohl zu der Orientierung der Schüler auf diese Folgen.

3. Eindrücke der Schülern

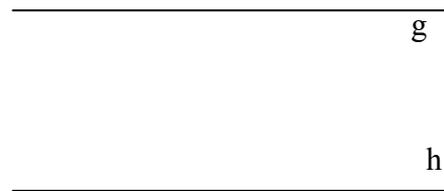
Die Anzahl der Schüler, die gute Fortschritte bei der Bearbeitung der Aufgabe auf den Arbeitsblättern und bei ihren Berichten zeigte, war größer als erwartet. Verschiedene Schüler gaben an, a) daß sie Ideen, die andere nicht hatten, verfolgen konnten; b) über eine Eigenschaft nachdachten, die sie zu einer anderen führte um dann zu einem "unentdecktem" Bereich zu kommen und c) durch Nutzen von Buchstaben als Variablen beweisen konnten, was sie gefunden hatten.

3 Zusammenstellung weiterer Aufgaben

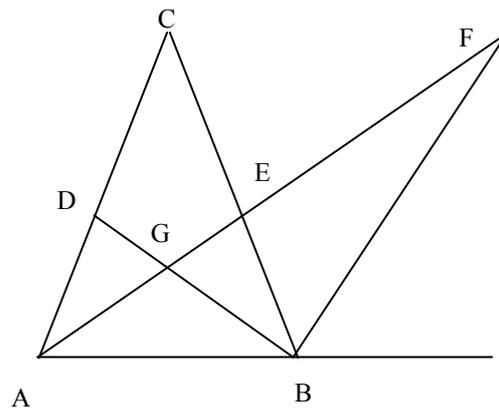
1. Die Figur ABCD ist ein Rechteck. Wir zeichnen eine Linie EF durch den Schnittpunkt der Diagonalen S.
 - a) Finde so viele verschiedene geometrische Figuren wie möglich in dieser Abbildung. Wie heißen diese Figuren?
 - b) Wähle zwei Figuren aus, die bei a) gefunden hast. Kannst du irgendwelche Beziehungen zwischen diesen Figuren hinsichtlich ihrer Größe und ihrer gegenseitigen Lage feststellen? Suche nach weiteren Paaren von Figuren und ihren Beziehungen!



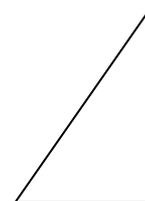
2. Gegeben sind zwei parallele Geraden g und h. Zeichne eine oder zwei weitere Linien ein, die diese beiden Geraden schneiden, so daß Figuren entstehen. Finde so viele Eigenschaften dieser Figuren wie möglich. Verändere dazu die Lage die Linien, die die Geraden g und h schneiden.



3. Gegeben sei ein gleichschenkliges Dreieck ABC. Die Winkelhalbierende des Winkels α bzw. β schneidet die Strecke BC bzw. AC in den Punkten E und D. Der Schnittpunkt dieser beiden Winkelhalbierenden sei G. Die Winkelhalbierende des Winkels α schneidet die Winkelhalbierende des Nebenwinkels von β im Punkt F. Zeichne diese Figur und finde in dieser Figur möglichst viele Relationen.



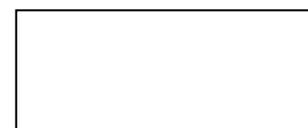
4. Zeichne möglichst viele verschiedenen Figuren, die alle mit dem abgebildeten Dreieck eine gemeinsame Eigenschaft haben. Erkläre jeweils genau, welche gemeinsame Eigenschaft das Dreieck und deine gezeichnete Figur besitzen.



5. Die 5 Gegenständen P, Q, R, S und T sind in dieser Reihenfolge der Masse nach geordnet, wobei P der schwerste Gegenstand ist. Vier Schüler A, B, C und D schätzen die Masse der Gegenstände und geben folgende Reihenfolgen ihre Schätzwerte an: Finde möglichst viele Methoden, um zu entscheiden, wer am besten geschätzt hat. Wer ist entsprechend deiner Methode der beste Schätzer, wer der zweitbeste und wer der drittbeste?

A:	R P S T Q
B:	Q R P S T
C:	T R Q S P
D:	S O R P T

6. Das Rechteck soll auf das Doppelte vergrößert werden. Finde möglichst viele Methoden zum Herstellen der Vergrößerung, wende sie auf das Rechteck an und erkläre sie mit deinen Worten.



4.3. Eigenschaften einer Multiplikationstabelle

Die Anordnung der Zahlen in dem Schema wurde nach einer bestimmten Regel vorgenommen. Finden Sie so viele Zusammenhänge zwischen den Zahlen wie möglich, indem Sie Zeilen, Spalten, Diagonalen oder andere Teilmengen des Schemas untersuchen.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Hinweise:

- Wählen Sie z. B. ein rechteckiges Feld mit Zahlen aus und finden Sie Eigenschaften über die Summe oder die Differenz der Zahlen in diesem Feld.
- Bilden Sie Zahlenfolgen, indem Sie die Summe der Zahlen längs einer nicht notwendig geraden Linie bzw. in einem quadratischen oder rechteckigen Schema, das sich in der Tabelle bewegt, ermitteln.
- Geben Sie jeweils eine allgemeine Bildungsvorschrift an.