Vorschläge und Erfahrungen zur Arbeit mit polyvalenten Aufgaben im Mathematikunterricht der Orientierungsstufe

Herausgeber: Institut für Qualitätsentwicklung
Mecklenburg-Vorpommern
Werderstraße 124
19055 Schwerin

Autoren: Lutz Hellmig
Sabine Hoffmann
Eva Kleinschmidt
Evelyn Kowaleczko
Grit Kurtzmann
Dieter Leye
Marion Lindstädt
Marion Roscher
Prof. Dr. Hans-Dieter Sill

Druck: Stadtdruckerei Weidner GmbH

Umschlagfoto: DUDEN PAETEC GmbH/Dr. Gerd Sonnenfeld

Auflage: 3. überarbeitete und ergänzte Auflage, September 2010

Inhaltsverzeichnis:

Vorwort

Im Februar 2006 hat der Landtag von Mecklenburg-Vorpommern mit einem neuen Schulgesetz die Einführung des längeren gemeinsamen Lernens an Regional- und Gesamtschulen in den Klassenstufen 5 und 6 beschlossen. Dieses Gesetz eröffnet die Möglichkeit, Entscheidungen über den angestrebten Abschluss erst nach dem sechsten Schuljahr treffen zu müssen und damit die Entwicklung der Schüler innerhalb zweier wichtiger Lebensjahre angemessen berücksichtigen zu können.

Damit ergeben sich für die Lehrerinnen und Lehrer der Orientierungsstufe neue Anforderungen. Sie sind unter anderem in besonderem Maße gefordert, Aspekte der Binnendifferenzierung zu berücksichtigen, d. h. Lernangebote und Lernanforderungen im Rahmen der pädagogischen Förderung differenziert zu gestalten, um den unterschiedlichen Begabungen, Lernvoraussetzungen und dem unterschiedlichen Lernverhalten der Schüler gerecht zu werden. Ziel ist es, alle Schüler auf die Anforderungen der nachfolgenden Bildungsgänge gut vorzubereiten.

Offene Aufgaben bieten nach internationalen Erfahrungen ein besonders hohes Potential, um alle Schüler einer Klasse bezogen auf ihre individuellen Fähigkeiten am Mathematikunterricht teilhaben zu lassen. Durch die Vielfältigkeit der Lösungswege und möglichen Ergebnisse ergeben sich für die Schüler Anlässe, Ideen zu präsentieren, zu argumentieren und gegeneinander abzuwägen. Oft wird am Ende die Erkenntnis stehen, dass es mehrere verschiedene und jeweils akzeptable Wege gibt, eine Aufgabe zu lösen.

Zur Unterstützung der Arbeit mit einem bestimmten Typ offener Aufgaben in der Orientierungsstufe haben die Fachberaterinnen und Fachberater für Mathematik der Regionalen Schulen in Mecklenburg-Vorpommern gemeinsam mit Mathematik-Didaktikern der Universität Rostock und mit Unterstützung des Landes diese Broschüre verfasst. Sie ist bereits in einer Erprobungsfassung im Oktober 2006 und in einer überarbeiteten Fassung im September 2007 erschienen. Diese Fassungen waren eine Grundlage für mehrere schuljahresbegleitende, internetgestützte Fortbildungen, bei denen die vorgeschlagenen Aufgaben und Methoden erprobt wurden. Die dabei gesammelten Erfahrungen fließen in diese Fortschreibung ein. Die Überarbeitung erfolgte durch die Moderatoren der Fortbildungen Lutz Hellmig, Evelyn Kowaleczko, Grit Kurtzmann und Prof. Dr. Hans-Dieter Sill.

Die Aufgaben in diesem Heft sind vor allem danach ausgesucht worden, inwieweit sie mathematisch unterschiedlich befähigten Schülern Möglichkeiten eröffnen, die Aufgabe ihrem Wissen und Können gemäß zu meistern. Diese Aufgaben besitzen oft pragmatische und elegante, anschauliche und abstrakte, einfache und anspruchsvolle Lösungen.

Die Broschüre kann auch von der Internetplattform http://www.mathe-mv.de herunter geladen werden.

Ich wünsche Ihnen viel Freude und Erfolg beim Erproben der polyvalenten Aufgaben im Unterricht.

i.V. Chr. Kirchner

Heidrun Pietruschka
Institut für Qualitätsentwicklung
Mecklenburg-Vorpommern

1 Zur Arbeit mit Aufgaben im Mathematikunterricht

1.1 Begriff und Rolle von Aufgaben

Schüler[1] lernen nur durch *eigene geistige Tätigkeit*, die im Mathematikunterricht vor allem durch Aufgaben angeregt wird. Deshalb spielen Aufgaben zu Recht eine zentrale Rolle bei allen Betrachtungen zum Mathematikunterricht.

Eine *mathematische Schüleraufgabe* ist eine mündliche oder schriftliche Aufforderung an Schüler zum Ausführen von Handlungen, die mathematisches Wissen und Können erfordern. Eine Aufgabe beinhaltet die Angabe von bestimmten Ausgangsbedingungen und einem explizit oder implizit gegebenen Ziel. Jeder Aufgabe können mögliche Lösungswege und das Ergebnis bzw. die Ergebnisse der Aufgabe zugeordnet werden.

Eine einzelne Aufgabe kann *nicht für sich* betrachtet werden ("Das ist aber eine schöne Aufgabe!"). Ihre Wirksamkeit für den Lernprozess der Schüler ergibt sich nicht nur aus ihrem mathematischen Gehalt oder einer schönen Verpackung, sondern hängt in erster Linie davon ab, an welcher Stelle sie im Lernprozess eingesetzt wird, d. h. was vorher und hinterher im Unterricht passiert und davon, wie die Schüler diese Aufgabe bearbeiten. Aufgaben sind also kein Selbstzweck. Eine Menge von schönen und interessanten Aufgaben allein ergibt noch keinen guten Unterricht. Entscheidend sind die mit der Aufgabe verfolgten Ziele.

Unter einem *Ziel des Unterrichts* verstehen wir in diesem Zusammenhang *nicht* solche allgemeinen Aufgabenstellungen wie Lebensvorbereitung oder Entwicklung von Sach- und Methodenkompetenzen oder auch solche Ziele, die die Schaffung von Voraussetzungen des Lernens betreffen, wie das Ziel, dass alle Schüler motiviert sind und sich aktiv am Unterrichtsgeschehen beteiligen.

Ein *Ziel im engeren Sinne* ist die Ausbildung bzw. weitere Ausprägung bestimmter psychischer Dispositionen eines Schülers. Psychische Dispositionen sind Kenntnisse, Fähigkeiten, Fertigkeiten, Einstellungen, Gewohnheiten, Charaktereigenschaften u. a. Als Oberbegriff für könnensorientierte Dispositionen hat sich heute die Bezeichnung "Kompetenz" etabliert, die außer einer reinen Angabe der Dispositionen auch noch einen bestimmten Grad der Aneignung beinhaltet. Der Kompetenzbegriff soll auf die möglichst unmittelbare Verfügbarkeit der Dispositionen orientieren. Die Verfügbarkeit stellt allerdings nur einen Qualitätsparameter von psychischen Dispositionen dar. Es ist sehr unrealistisch, diese Qualität bei allen Zielen erreichen zu wollen. Wir plädieren deshalb für eine Unterscheidung von drei Ausprägungsgraden der Verfügbarkeit.

Niveau 1: Sicheres Wissen und Können
Die Schüler beherrschen das Wissen und Können jederzeit auch nach der Schule ohne eine spezielle Reaktivierung. Die Anforderungen sollten der Hauptgegenstand täglicher Übungen sowie unvorbereiteter Leistungsüberprüfungen sein. Die Schüler sind also stets kompetent bezüglich dieser Bestandteile ihres mathematischen Wissens und Könnens.

Niveau 2: Reaktivierbares Wissen und Können
Die Schüler beherrschen das betreffende Wissen und Können sicher am Ende eines Stoffgebiets. Nach einem gewissen Zeitraum ist jedoch z. B. zur Vorbereitung auf eine zentrale Leistungserhebung eine Wiederholung und Reaktivierung des Wissens und Könnens erforderlich, bei der der schon einmal vorhandene Beherrschungsgrad wieder erreichbar ist.

Niveau 3: Exemplarisches Wissen und Können
Die Schüler haben erste Einsichten, Vorstellungen bzw. Fähigkeiten hinsichtlich des betreffenden Inhalts des Unterrichts. Sie können z. B. einfache Beispiele angeben, einige wichtige Merkmale nennen oder Gedanken zu einer Vorgehensweise äußern. Die Vermittlung der entsprechenden Unter-

[1] Bei Personenbezeichnungen wird das generische Maskulinum verwendet, d. h. es sind immer beide Geschlechter gemeint.

richtsinhalte sollte in der Regel nur exemplarisch erfolgen. Die Anforderungen sollten kein Gegenstand von Leistungsüberprüfungen sein.

Die Betrachtung mathematischer Schüleraufgaben führt somit zur Frage nach der *Funktion* dieser Aufgabe im Lernprozess einer bestimmten Schülerpopulation, d. h. zur Frage, welchen Beitrag die Anforderungen der Aufgabe und damit verbundene mögliche Schülertätigkeiten zur Entwicklung bestimmter psychischer Dispositionen der Schüler leisten können.

Unter einem *Problem* wird oft eine besonders anspruchsvolle Aufgabe verstanden. Bei dieser Betrachtungsweise wird nicht beachtet, dass von einem Problem immer nur in Bezug auf einen Schüler gesprochen werden kann. Dieselbe Aufgabe kann für einige Schüler einer Klasse ein großes und für andere gar kein Problem sein. Deshalb sollte der Begriff Aufgabe im obigen Sinne allgemein als Aufforderung an Schüler verstanden werden, unabhängig davon, ob die Aufgabe nur durch Routinen lösbar ist oder ob die Schüler damit sofort zurechtkommen bzw. erst Barrieren überwinden müssen.

Eine Aufgabe ist ein **Problem für einen Schüler**, wenn der Schüler diese Aufgabe nicht auf Anhieb lösen kann. Da dies für die Mehrzahl der Aufgaben zutrifft, die ein Schüler zu lösen hat, ist die Entwicklung von Einstellungen, Verfahrenskenntnissen und Fähigkeiten im Lösen von Problemen ein zentrales Ziel des Mathematikunterrichts und kann nicht auf das Lösen bestimmter Aufgabentypen wie Sachaufgaben oder Beweisaufgaben beschränkt werden.

1.2 Begriff und Arten offener Aufgaben

Die Betrachtung von Ausgangsbedingungen, Lösungswegen und Ergebnissen und die Sicht auf den Schüler führen zum Begriff der offenen Aufgabe.

> Eine Aufgabe heißt **offen für einen Schüler**, wenn für den Schüler die Ausgangsbedingungen der Aufgabe nicht vollständig sind, für ihn mehrere Lösungswege möglich sind oder er zu mehreren Ergebnissen kommen kann.

Eine Aufgabe ist demzufolge **nicht offen**, d. h. **geschlossen für einen Schüler**, wenn für ihn die Ausgangsbedingungen und die Fragestellung vollständig und eindeutig sind sowie nur ein Lösungsweg und nur ein Ergebnis möglich sind.

> *Berechne für ein Quadrat mit der Seitenlänge a = 5 cm den Flächeninhalt A in Quadratzentimetern mithilfe der Flächeninhaltsformel für Quadrate. (Kl. 5)*
>
> Die Aufgabenstellung gibt das zu verwendende Verfahren vor und grenzt andere Techniken wie das Auszählen des Flächeninhalts in einer Zeichnung oder die Interpretation des Quadrates als ein Spezialfall des Rechtecks aus. Für einen Schüler ist nach Behandlung der Flächeninhaltsformeln für Quadrate diese Aufgabe geschlossen.

Bereits an einfachen Beispielen wie der Aufgabe $3 \cdot 4 = 12$ lässt sich zeigen, dass im Grunde *jede mathematische Aufgabe potentiell offen* ist – zumindest in Bezug auf den Lösungsweg. Die potentielle Offenheit einer Aufgabe kann durch folgende Faktoren eingeschränkt werden:

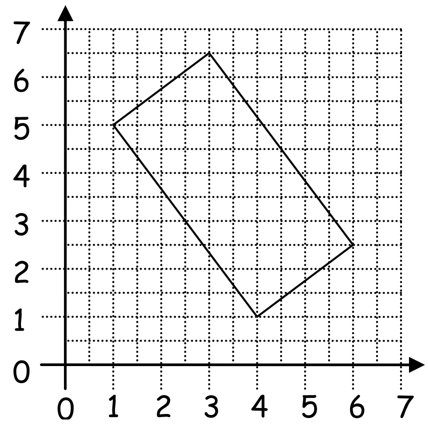
- Mangels entsprechender Kenntnisse und Fähigkeiten der Schüler – bedingt durch den Entwicklungsstand der Schüler oder die Zahl der im Unterricht vermittelten Verfahren – können alternative Lösungswege und Ergebnisse nicht gefunden werden.
- Bei der Kontrolle von Lösungen im Unterricht wird ausschließlich der favorisierte Lösungsweg besprochen oder ein Ergebnis genannt. Damit gelangen die Schüler sukzessive zu der irreführenden Anschauung, dass mathematische Aufgaben stets eindeutig lösbar seien.
- Die Bearbeitung bestimmter Aufgabentypen ist soweit automatisiert worden, dass andere Lösungsansätze nicht mehr verfolgt werden. Das ist z. B. beim kleinen Einmaleins der Fall.
- Durch eine eingrenzende Formulierung der Aufgabenstellung werden alternative Lösungswege und Ergebnisse unterbunden.

Die Offenheit einer Aufgabe wird u. a. durch das Vorhandensein alternativer Lösungsmöglichkeiten bestimmt. Nur wenn diese dem Schüler bewusst sind und sie von ihm genutzt werden können, ist diese Aufgabe für den Schüler offen. Das folgende Beispiel verdeutliche dies.

Berechne den Flächeninhalt des abgebildeten Rechtecks.

Ein Schüler der Orientierungsstufe wird die Länge der Seiten in der Regel durch Messen bestimmen, damit er die Seitenlängen miteinander multiplizieren kann. Wenn er im Unterricht noch keine Fähigkeiten im Zerlegen und Ergänzen von Figuren erworben hat, ist die Aufgabe ist für ihn weitgehend geschlossen. Ansonsten könnte er den Inhalt auch ohne Messung durch eine geschickte Zerlegung in rechtwinklige Dreiecke bzw. Ergänzung zu einem Rechteck bestimmen.

Zum Abschluss der Sekundarstufe I kann der Schüler die Seitenlängen mit dem Satz des Pythagoras rechnerisch bestimmen, während einem Schüler der Sekundarstufe II weitere Möglichkeiten zur Flächeninhaltsberechnung offen stehen.



1LE = 1 cm

Es gibt verschiedene Arten offener Aufgaben, die sich auch durch einen unterschiedlichen Grad der Öffnung unterscheiden.

1.2.1 Aufgaben mit unvollständigen Ausgangsbedingungen bzw. fehlender Fragestellung

Bei diesem Typ offener Aufgaben sind die Ausgangsbedingungen soweit reduziert, dass die Schüler selbst fehlende Vorgaben vervollständigen müssen, nötigenfalls durch das Treffen von Annahmen. Zu dieser Form gehört auch die Formulierung eigener Aufgabenstellungen durch die Schüler.

Für eine Urlaubsreise plant Familie Krajewski 380 € für Benzinkosten, 970 € für die Unterkunft, 400 € für die Verpflegung und 270 € für Ausflüge. In der Urlaubskasse sind 1800 €.

Die Aufgabe wurde von einem Lehrer ohne Vorbereitung in einer Klassenarbeit in einer 5. Klasse gestellt. Zu seinem Erstaunen gab es in der Arbeit keine Nachfragen, was denn eigentlich gesucht ist und 19 der 27 Schüler kamen nach richtigen Rechnungen zu sinnvollen Antworten wie "Sie brauchen mehr Geld", "Sie müssen noch sparen", "Sie können nicht fahren" oder "Sie müssen die Ausflüge weglassen".

1.2.2 Aufgaben mit verschiedenen Lösungswegen

Aufgaben dieser Kategorie können klar definierte Ausgangsbedingungen und eine eindeutige Lösung besitzen, die jedoch mittels verschiedener Verfahren ermittelt werden kann.

> ***Beispiel 4:*** *Löse die Gleichung 15 – 2 · x = 5.*
> Wie jede Gleichung lässt sich auch diese durch inhaltliche Überlegungen lösen, die bereits ab Klasse 5 möglich sind und auch in oberen Klassen verwendet werden sollten. Inhaltliche Lösungsmöglichkeiten sind: Probieren mit geeigneten Zahlen, Zerlegen der Zahl 5 in eine Differenz aus 15 und einer Zahl, Umkehren der Rechnung oder Veranschaulichen auf der Zahlengeraden.

1.2.3 Polyvalente Aufgaben

Um einen bestimmten Typ offener Aufgaben hervorzuheben, haben wir dafür eine neue Bezeichnung gewählt[2].

Eine Aufgabe heißt **polyvalent für eine Schülergruppe**, wenn sie folgende Merkmale hat.

(1) Jeder Schüler aus der Gruppe findet mit hoher Wahrscheinlichkeit eine mögliche Lösung der Aufgabe.
(2) Die Aufgabe ermöglicht Schülerantworten unterschiedlicher Qualität.

Unter hoher Wahrscheinlichkeit verstehen wir, dass in einer heterogenen Jahrgangsklasse höchstens 10 %, also maximal 2 bis 3 drei Schüler keine zutreffende Antwort finden. Jede mögliche Lösung der Aufgabe muss eine vollwertige Lösung sein, d. h. alle Ausgangsbedingungen erfüllen.

Das höhere Niveau einer Antwort kann sich zeigen

- in der Anzahl der gefundenen Antworten,
- in dem höheren Anspruchsniveau einer gefundenen Antwort,
- in der Suche nach Spezialfällen und Strukturen (Fallunterscheidungen, Muster) oder
- in dem Streben nach Verallgemeinerungen von gefundenen Antworten.

Eine Aufgabe kann nur polyvalent in Bezug auf eine Schülergruppe sein, da sich das Merkmal (1) auf alle Schüler einer Gruppe bezieht. Wenn keine Schülergruppe angegeben wird, ist in dieser Broschüre immer eine 5. oder 6. Klasse an einer Gesamtschule oder Regionalen Schule in Mecklenburg-Vorpommern[3] gemeint.

Diese Aufgaben sollen also von allen Schülern einer Klasse weder als zu schwer noch als zu leicht empfunden werden, so dass möglichst alle Schüler mit der selbstständigen Bearbeitung der Aufgabe beginnen.

Es ist Anliegen dieser Broschüre, dass die vorgeschlagenen offenen Aufgaben möglichst einen polyvalenten Charakter haben. Der polyvalente Charakter einer Aufgabe kann erst im Ergebnis einer Erprobung dieser Aufgaben in möglichst vielen Klassen festgestellt werden. Die nach unseren bisherigen Erfahrungen zu dieser Gruppe gehörenden Aufgaben sind im Folgenden durch das nebenstehend abgebildete Symbol gekennzeichnet. In den Hinweisen zu den Aufgaben wird über die gesammelten Erfahrungen berichtet. Wir haben auch noch nicht erprobte Aufgaben mit diesem Symbol versehen, die nach unserer Einschätzung diesen Charakter ebenfalls haben sollten.

Dazu gehört unter anderem auch die folgende Aufgabe, die zugleich verdeutlicht, dass polyvalente Aufgaben im Unterschied zu vielen anderen offenen Aufgaben nicht immer viel Text und oder eine außermathematische Einbettung erfordern.

---

[2] Die Anregungen zu diesem Aufgabentyp entnahmen wir folgender Publikation: The open-ended approach: a new proposal for teaching mathematics/edited by Jerry P. Becker, Shigeru Shimada. – National Council of Teachers of Mathematics, Reston, 1997. Für die Originalbezeichnung "open-ended approach" fanden wir keine geeignete Übersetzung.

[3] In Mecklenburg-Vorpommern lernen in der 5. und 6. Jahrgangsstufe mit Ausnahme der Förderschüler und der Hochbegabten alle Schüler eines Jahrgangs gemeinsam an einer Gesamtschule oder einer Regionalen Schule. Das Gymnasium beginnt erst in Klasse 7.

Zeichne verschiedene Parallelogramme.

Jeder Schüler sollte mit seinen Zeichengeräten mindestens zwei Parallelogramme mit unterschiedlichen Seitenlängen und Winkelgrößen zeichnen können und so zu einer vollwertigen Lösung der Aufgabe kommen. Einige Schüler können auf die Idee kommen, auch Rechtecke oder Quadrate als Lösung anzugeben oder die Lage zu variieren. Je kreativer die Schüler sind, umso mehr Möglichkeiten finden sie. (s. S. 72)

1.3 Polyvalente Aufgaben in typischen Aneignungsprozessen

1.3.1 Zur Entwicklung von Fertigkeiten

In Übungsstunden zur Entwicklung von Fertigkeiten sollten zur vollständigen Ausbildung der entsprechenden Handlungen folgende Aufgabentypen verwendet werden.

(1) Variation der sprachlichen Formulierungen und der Bezeichnungen
(2) Umkehraufgaben
(3) Spezial- und Extremfälle
(4) Aufgaben, die nicht mit dem Verfahren lösbar sind
(5) Aufgaben mit verschiedenen Lösungswegen
(6) Bewerten vorgelegter Aufgaben und deren Lösung
(7) Aufgabenstellungen zum Selbstbilden von Aufgaben durch Schüler

Davon sind die Typen (2), (5) und (7) oft Aufgaben mit einem hohen Grad der Offenheit, von denen einige auch den Charakter polyvalenter Aufgaben haben können.

Begriff und Konstruktion von Umkehraufgaben

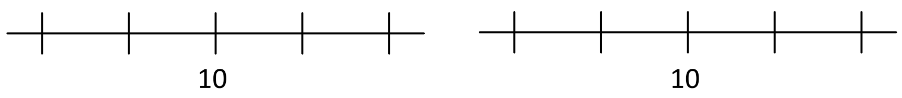
Zu einer Aufgabe erhält man eine Umkehraufgabe, wenn man das Gesuchte mit dem Gegebenen bzw. Teilen des Gegebenen der Aufgabe vertauscht. Umkehraufgaben dienen der Ausbildung der Reversibilität der Handlung und sind meist ein notwendiger Bestandteil des Aneignungsprozesses.

Zerlege die Zahl 12 in ein Produkt.

Dies ist eine Umkehraufgabe zu der Aufgabe *"Berechne das Produkt aus 3 und 4."* Dieser Aufgabentyp ist für die Entwicklung von sicheren Fertigkeiten zu den Grundaufgabengleichungen unverzichtbar. Die Aufgabe ist polyvalent, da jeder Schüler eine Lösung, z. B. $12 = 3 \cdot 4$ finden sollte und einige Schüler zur Suche nach allen Möglichkeiten bei zwei, drei oder mehr Faktoren sowie nach Spezialfällen angeregt werden. So erkennen sicher einige Schüler, dass es durch den Faktor 1 unendlich viele Lösungen gibt.

Das folgende Beispiel ist eine Umkehraufgabe der Standardaufgabe zum Erkennen der Einteilung vollständig oder teilweise beschrifteter Skalen. Fertigkeiten im Arbeiten mit Skalen sind insbesondere für naturwissenschaftliche Unterrichtsfächer eine wichtige Vorleistung des Mathematikunterrichts, mit deren Entwicklung als sichere Fertigkeit in Klasse 5 begonnen werden sollte.

Beschrifte die übrigen Markierungen der Skalen.



Die unterschiedliche Qualität der Antworten zeigt sich u. a. in der Anzahl der gefundenen Möglichkeiten, in der Verwendung von negativen Zahlen und in Überlegungen zur maximalen Zahl der Möglichkeiten (s. S. 24).

Aufgaben mit verschiedenen Lösungswegen

> *Finde verschiedene Begründungen für die Richtigkeit der Gleichung*: $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=1\frac{1}{4}$.
>
> Mit dieser Aufgabe können die Kenntnisse zum Rechnen mit Brüchen und die inhaltlichen Vorstellungen zu Brüchen und zur Addition gefestigt werden. Es können auch zielgerichtet Fähigkeiten im Argumentieren und Begründen entwickelt werden. Antworten sind durch Arbeiten mit Größen (Zeit, Volumen), Gegenständen, Zeichnungen oder auf formaler Ebene möglich. (s. S. 40)

Aufgaben mit verschiedenen Lösungswegen dienen insbesondere zur Integration der Verfahrenskenntnisse und der Ausprägung des Wechselverhältnisses von inhaltlichen und formalen Vorgehensweisen.

Zum Selbstbilden von Aufgaben durch Schüler

Eine wichtige Grundlage für die Entwicklung einer Fertigkeit in der Anwendung eines Verfahrens ist die Aneignung der Einsatzbedingungen des Verfahrens. Vor dem Lösen einer entsprechenden Aufgabe sollte sich ein Schüler stets fragen: *"Worum geht es in der Aufgabe?"*, um so den Typ zu erkennen. Das Selbstbilden einer Aufgabe eines gegebenen Typs ist eine dazu inverse Handlung und somit auch ein Typ von Umkehraufgaben.

> *Stelle deinem Banknachbarn unterschiedliche Aufgaben zur Addition zweier Brüche und korrigiere seine Lösungen.*
>
> Bei dieser Aufgabe muss der Schüler den Typ "Addition zweier Brüche" und die verschiedenen Möglichkeiten zum Bilden eines Hauptnenners realisieren. (s. S. 43)

1.3.2 Aneignung von Begriffen

Das Aneignen von Begriffen kann als Ausbildung semantischer Netze im Kopf des Schülers modelliert werden, womit die vielfältigen Beziehungen zu anderen Wörtern erfasst werden sollen. Neben der Aneignung des Begriffswortes geht es beim Lernen von Begriffen um die Aneignung eines Systems von Gedanken zu diesem Wort. Zur Einordnung der im Mathematikunterricht verwendeten Fachbegriffe in die vorhandenen semantischen Netze eines Schülers sollten schon bei der Erarbeitung Bezüge zur Bedeutung von gleich oder ähnlich lautenden Wörtern hergestellt werden.

> *Vergleiche die Bedeutung des Wortes "senkrecht" in den folgenden Sätzen:*
>
> *(1) Die Strecke* $\overline{AB}$ *ist senkrecht zur Geraden g.*
> *(2) Der Zaunpfahl steht senkrecht.*
>
> Mit dieser Aufgabe können die Kenntnisse und Vorstellungen der Schüler zur Relation "senkrecht zu" und zur Verwendung von "senkrecht" im Alltag vertieft werden. (s. S. 66)

Erarbeitung von Begriffen

Die grundlegenden Handlungen zur Aneignung von Begriffen sind das Identifizieren und Realisieren. Beim Identifizieren geht es darum zu erkennen, ob vorgelegte Objekte Repräsentanten des Begriffs sind oder nicht. Dazu müssen die Lernenden die Merkmale vorgelegter Objekte untersuchen. Diese geistige Handlung kann bereits in der Phase der Erarbeitung eines Begriffs durchgeführt werden.

Finde Gemeinsamkeiten und Unterschiede bei den folgenden Brüchen:

$\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{6}{2}, \frac{3}{8}, \frac{7}{5}, \frac{2}{2}$ *und* $\frac{2}{8}$.

Diese Aufgabe kann zur Erarbeitung der Begriff echter und unechter Bruch eingesetzt werden. (s. S. 34)

Festigung von Begriffen

Die Aufgabenstellung *"Vergleiche die gegebenen Objekte miteinander, finde gemeinsame und unterschiedliche Eigenschaften."* hat sich für die Konstruktion polyvalenter Aufgaben als besonders geeignet erwiesen. Als Objekte können Zahlen, Potenzen, Terme, Gleichungen, Funktionen, Figuren, Körper oder andere mathematische Objekte verwendet werden. Dieser Aufgabentyp erfordert neben allgemein geistigen Fähigkeiten auch ein Bestimmen von Merkmalen bzw. Eigenschaften mathematischer Begriffe, entwickelt und testet also das vorhandene semantische Netz zum Begriff.

Realisieren eines Begriffs heißt Vorstellen bzw. Herstellen eines Repräsentanten. Eine polyvalente Aufgabe dieser Art ist die genannten Aufgabe: *Zeichne verschiedene Parallelogramme* (s. S. 76).

Zur Festigung der Begriffe Zehnerpotenz, Quadratzahl, Basis, Exponent und Potenz kann folgende Aufgabe verwendet werden.

Suche dir *von den fünf Potenzen zwei heraus und vergleiche sie miteinander.*
Finde Gemeinsamkeiten und Unterschiede.

(1) 10^2 *(2)* 5^2 *(3)* 10^3 *(4)* 2^5 *(5)* 3^2

Es können insgesamt 10 Paare von Potenzen gebildet und nach drei unterschiedlichen Merkmalen vergleichen werden. (s. S. 26)

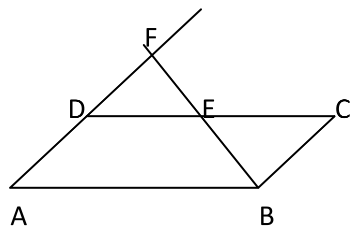
1.3.3 Entwicklung von Einstellungen und Fähigkeiten im Lösen von Problemen

Polyvalente Aufgaben können helfen, die Freude der Schüler an der selbstständigen Bearbeitung von Problemen und damit ihr Selbstwertgefühl zu entwickeln. Viele Schüler beteiligen sich in Problemlösungsphasen oft nicht geistig aktiv am Unterricht, insbesondere wenn es um die Bewältigung solcher anspruchsvollen Aufgaben wie das Finden von Begründungen und Beweisen oder das Lösen von Sachaufgaben geht.

Anwenden von Sätzen und Finden von Begründungen

Um polyvalente Aufgaben zu diesem Zweck zu konstruieren, können den Schülern z. B. bestimmte Konfigurationen vorgegeben werden. Sie haben dann die Aufgabe, in diesen Konfigurationen Zusammenhänge zu erkennen. Die unterschiedliche Qualität der Ergebnisse zeigt sich in der Anzahl und dem Anspruchsniveau der gefundenen Zusammenhänge.

ABCD ist ein Parallelogramm, $\overline{DF}$ ist die Verlängerung der Seite $\overline{AD}$. $\overline{BF}$ ist die Winkelhalbierende des Winkels ABC.
Finde Beziehungen zwischen den Winkeln und Strecken in der Figur.
Begründe deine Feststellungen.



Diese Aufgabe dient der Festigung der Winkelsätze an geschnittenen Geraden sowie Parallelen und des Basiswinkelsatzes durch selbständiges Identifizieren von Beziehungen in der Figur. Es lassen sich zahlreiche Eigenschaften in der Figur erkennen, bis zu der Feststellung, dass $\overline{DF} = \overline{AB} - \overline{BC}$ ist (s. S. 76).

Lösen von Sachaufgaben

Eine Sachaufgabe ist in der Regel keine polyvalente Aufgabe, da selten alle Schüler selbstständig zu einer Lösung kommen und es auch nur in wenigen Fällen Lösungen unterschiedlicher Qualität gibt. Es ist aber möglich, dass wichtige Teilhandlungen beim Lösen einer Sachaufgabe einen polyvalenten Charakter erhalten. Dieser kann zur Wirkung gebracht werden, indem diese Teilhandlungen als gesonderte Aufgabenstellungen formuliert werden.

Für das Lösen von Sachaufgaben wurden zahlreiche unterschiedliche heuristische Orientierungsgrundlagen für Schüler vorgeschlagen. Nach unserer Auffassung sollten folgende fünf Phasen beim selbstständigen Lösen einer Sachaufgabe durch einen Schüler unterschieden werden. Zur Aneignung dieser Orientierungsgrundlage müssen insbesondere in den Jahrgangsstufen fünf und sechs die einzelnen Phasen in speziellen Aufgabenstellungen gesondert geübt werden, bevor die Schüler dann in den oberen Klassen in jedem Fall versuchen sollten, eine Sachaufgabe selbstständig in Angriff zu nehmen und nicht zu warten, bis die Lösungsideen im Unterrichtgespräch entwickelt werden.

Phasen beim Lösen einer Sachaufgabe

1. Erfassen des Sachverhaltes
2. Analysieren des Sachverhaltes
3. Suchen nach Lösungsideen und Planen eines Lösungsweges
4. Durchführen des Lösungsplanes
5. Kontrolle und Auswertung der Lösung und des Lösungsweges

Im Unterricht wird oft den ersten drei Phasen zu wenig Beachtung geschenkt. Zum Erfassung des Sachverhaltes können u. a. die folgenden heuristischen Orientierungen verwendet werden. Zur Aneignung dieser Orientierungen ist es ausreichend, dass die Schüler sich daran gewöhnen, die betreffenden Fragen an sich selbst zu stellen. Auf eine Vermittlung der Bezeichnungen der Methoden kann verzichtet werden. Nicht bei jeder Aufgabe sind alle Methoden anwendbar.

Heuristische Orientierungen zum Erfassen des Sachverhaltes bei einer Sachaufgabe

(1) Erfassen der Hauptinformation
Worum geht es in der Aufgabe?

(2) Klären unbekannter Begriffe und Sachverhalte
Verstehe ich alles in dem Text?

(3) Vergleiche mit der Wirklichkeit
Was muss man in Wirklichkeit noch alles beachten?
Welche Angaben sind nur Näherungswerte?

(4) Stellen weiterer Fragen zu den Informationen
Welche Fragen könnte ich noch stellen?

(5) Gegenständliche Veranschaulichung
Könnte ich mir den Sachverhalt mit Gegenständen veranschaulichen?

(6) Schätzen des Ergebnisses
Wie könnte vermutlich die Antwort sein?

Die Phase der Erfassung des Sachverhaltes dient vor allem dazu, dass sich die Schüler in den Sachverhalt hinein versetzen, bevor sie anfangen, gegebene und gesuchte Größen aufzuschreiben und Rechnungen vorzunehmen.

Aufgaben mit polyvalentem Charakter können bei der Orientierung (3) "Vergleiche mit der Wirklichkeit" formuliert werden. Fast bei jeder Sachaufgabe kann die Frage gestellt werden, inwieweit der geschilderte Sachverhalt mit der Wirklichkeit übereinstimmt. Dazu können die Schüler meist viele Gedanken entwickeln, womit das Hineinversetzen in den Sachverhalt gut unterstützt wird.

> *Mit einem Bagger soll ein 22 m langer Graben ausgehoben werden, der 1,5 m tief und 55 cm breit ist. Wie viele Kubikmeter Erde müssen dazu bewegt werden?*
> *Zur Lösung dieser Aufgabe wird der Graben als ein Quader angesehen und das Volumen als Produkt aller drei Längenangaben berechnet. Überlege, welche Unterschiede es bei diesem Vorgehen zur Wirklichkeit geben könnte.*
>
> Jeder Schüler sollte bei einem Vergleich mit der Wirklichkeit zum Beispiel erkennen, dass die Erdoberfläche nicht immer genau waagerecht sein könnte, der Graben nicht unbedingt geradlinig verlaufen muss, die Wände nicht immer glatt sein müssen oder der Bagger nicht immer genau eine Tiefe von 1,5 m und eine Breite von 55 cm einhält. Praktisch veranlagte Schüler werden eine große Anzahl von einschränkenden Bedingungen finden.

Es ist allerdings nicht immer sinnvoll, dazu ein Unterrichtsgespräch zu führen, da die entstehenden Diskussionen Zeit kosten und vom eigentlichen Lösen der Sachaufgabe wegführen können.

Nach unseren Erfahrungen sind die Schüler aus der Grundschule daran gewöhnt, zu vorgegebenen Texten Fragen zu stellen (vgl. Krajewski-Aufgabe, S. 7). Daran kann bei der Vermittlung der Orientierung (4) "Stellen weiterer Fragen" angeknüpft werden.

> *Denke dir zu den angegebenen Informationen Fragen aus, die mit den Daten beantwortet werden können.*
> - *In der Klasse 5a sind 23 Schülerinnen und Schüler, und in der Klasse 5b sind es 26.*
> - *Jeder aus der Klasse 5a soll 5 € zum Wandertag mitbringen.*
> - *Im Sportunterricht der Mädchen sollen für einen Wettbewerb Gruppen gebildet werden. Aus der Klasse 5a nehmen 12 Mädchen und aus der Klasse 5b 15 Mädchen teil.*
>
> Aus den Angaben der ersten beiden Anstriche lassen sich leicht Fragen ableiten, etwa: In welcher Klasse sind mehr Schüler? Zum dritten Anstrich sind anspruchsvolle Fragen möglich, z. B.: Bei welchen Gruppengrößen bleiben keine Schülerinnen übrig? (s. S. 28)

Damit die Schüler die Methode des Stellens weiterer Fragen auch bei "normalen" Aufgaben mit vorhandener Fragestellung anwenden, sollten auch entsprechende Aufgabenstellungen für diese Sachaufgaben erfolgen. Damit könnte dem Bestreben vieler Schüler bei Sachaufgaben mit mehr als den benötigten Angaben entgegengewirkt werden, alle Daten in den Rechnungen verwenden zu wollen.

So haben zum Beispiel in einer zentralen Vergleichsarbeit in 7. Klassen beim Lösen der folgenden Aufgabe sehr viele Schüler alle drei Größenangaben in ihren Rechnungen verwendet, obwohl nur zwei erforderlich sind. *Ein Klassenraum ist 8 m lang, 6 m breit und 3 m hoch. Berechne den Flächeninhalt der größten Wand*[4]. Wenn die Schüler es gewohnt gewesen wären, sich zu fragen, was man mit den Angaben noch berechnen könnte, hätten viele auf die Idee kommen können, dass man aus der Länge, Breite und Höhe eines Raumes auch sein Volumen berechnen kann.

1.4 Zum Unterrichten mit polyvalenten Aufgaben

1.4.1 Generelle Erfahrungen aus der Erprobung von polyvalenten Aufgaben

> *"Polyvalente Aufgaben wecken in den Schülern und auch bei mir viele neue Ideen. Sie regen dazu an, freiwillig mal etwas mehr und gründlicher zu überlegen, eigene Wege zu beschreiten und ermöglichen Schülern, beim Vergleichen viel Lob zu erhalten."*
>
> *"Polyvalente Aufgaben machen Schülern Spaß, weil ihre Bearbeitung für jeden zum Erfolg führt. Sie regen zum Denken an, fördern die Kreativität. Schüler suchen nach vielen Lösungen und lassen ihrer Phantasie freien Lauf."*

[4] Eine Auswertung von 1295 Schülerarbeiten in 34 Haupt- und Realschulen ergab eine Erfüllungsquote von 20,5 %.

Diese Einschätzungen von zwei Kursteilnehmerinnen spiegeln die ersten Erfahrungen der überwiegenden Mehrzahl der teilnehmenden Lehrerinnen und Lehrer mit polyvalenten Aufgaben wider. Nicht jede Aufgabe löst solche Begeisterung aus, einige erwiesen sich immer wieder als besonders geeignet, bei anderen gab es durchaus unterschiedliche Erfahrungen, über die auch berichtet werden soll. Insgesamt können aber auf der Grundlage der gesammelten Erfahrungen folgende Einschätzungen getroffen werden.

- Durch die Bearbeitung polyvalenter Aufgaben können die Schüler einen veränderten Zugang zur Mathematik erleben. Mathematik wird danach weniger als ein starres System gesehen, bei dem die Lösungen nach genau definierten Algorithmen exakt bestimmt werden müssen. Stattdessen eröffnet sich den Schülern die Vielfältigkeit mathematisch gültiger Betrachtungen, die es in der Regel jedem erlaubt, sich der Aufgabe entsprechend seinen Fähigkeiten zu nähern. Durch diesen Ansatz werden nicht die Wissenslücken der Schüler betont, sondern eine Vielzahl von jeweils korrekten Schülerantworten ermöglicht eine genauso hohe Zahl von Erfolgserlebnissen – gerade bei Schülern, die das bisher im Mathematikunterricht selten erlebt haben.
- Im Ergebnis dieser Erfolgserlebnisse leisten polyvalente Aufgaben einen Beitrag zur langfristigen Motivation der Schüler, sie fördern ihre Bereitschaft, sich selbstständig mit einer Aufgabe auseinanderzusetzen und entwickeln ihre Fähigkeiten im Präsentieren von eigenen Arbeitsergebnissen sowie im Diskutieren der Ergebnisse anderer Schüler.
- Die mit den polyvalenten Aufgaben beabsichtigten Ziele bei der Entwicklung des mathematischen Wissens und Könnens der Schüler (vgl. S. 5) lassen sich in der Regel in guter bis sehr guter Weise realisieren. Durch den Erlebnischarakter der Aufgabenbearbeitung wird insbesondere ein hoher Grad der Nachhaltigkeit im Gedächtnis erreicht.

Diese generellen Erfahrungen sind allerdings an einen bestimmten Umgang mit polyvalenten Aufgaben im Unterricht gebunden. Es bedarf einer gewissen Zeit der Gewöhnung und Einarbeitung sowohl auf Seiten der Schüler als auch der Lehrer. Es müssen insbesondere eine sehr bewusste Auswahl und Formulierung der Aufgaben vorgenommen und geeignete Orientierungen und auch Materialien bereitgestellt werden sowie insbesondere eine geeignete Form der Auswertung der Schülerergebnisse erfolgen.

In unseren Kursen zeigte sich immer wieder, dass durch die Diskussion über die Formulierung und Präsentation von Aufgaben sowie ihre geeignete Auswertung immer wieder neue Vorschläge und Erkenntnisse gewonnen wurden. Auch beim Finden der möglichen Schülerantworten war der Gedankenaustausch der Kursteilnehmer sehr nützlich. Polyvalente Aufgaben können und sollten deshalb die Kommunikation in der Fachschaft fördern.

1.4.2 Empfehlungen zum Einsatz polyvalenter Aufgaben im Unterricht

Zu den Zielen und zur Häufigkeit des Einsatzes polyvalenter Aufgaben

Aus den genannten Erfahrungen ergibt sich bereits, dass polyvalente Aufgaben wie auch andere besondere Formen der Unterrichtsgestaltung (zum Beispiel Durchführen von Unterrichtsprojekten) einen Beitrag zur Entwicklung von Einstellungen und habituellen Lernmotiven leisten können. Dies allein rechtfertigt allerdings nur ihren gelegentlichen Einsatz im Unterricht, da die Bearbeitung einer polyvalenten Aufgabe in der Regel einen erheblichen Zeitaufwand von bis zu zwei Unterrichtsstunden erfordert. Von Ausnahmen abgesehen sollten deshalb polyvalente Aufgaben nur dann eingesetzt werden, wenn damit ein wesentlicher Beitrag zu zentralen Aneignungsprozessen mathematischer Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten geleistet werden kann (vgl. 1.3). Bei den vorgeschlagenen Aufgaben werden deshalb auch immer die möglichen Ziele genannt.

Empfehlungen zur Sozialform

Bei unseren Erprobungen wurden die Aufgaben in der Regel im frontalen Unterricht eingesetzt, wobei oft auch Partnerarbeit erfolgte. Da die Aufgaben im hohen Maße differenzieren, ergibt sich so eine sehr günstige Möglichkeit zur Differenzierung im frontalen Unterricht. Die polyvalenten Aufgaben gehören deshalb auch zu den so genannten selbst differenzierenden Aufgaben.

In einigen Fällen erwies sich auch die Organisation von kooperativen Lernformen als eine geeignete Möglichkeit.

Zur Formulierung der Aufgabenstellung

Bei jeder polyvalenten Aufgabe werden stets mehrere Lösungen erwartet. Dies führte uns zu der Frage, ob in der Aufgabenstellung diese Erwartung zum Ausdruck gebracht werden soll, etwa durch Formulierungen der Art "Finde möglichst viele Lösungen." Nach längerer Diskussion haben wir uns dazu entschlossen, diese Formulierungen nicht zu verwenden, da dadurch implizit der polyvalente Charakter der Aufgaben eingeschränkt wird. Nicht jeder Schüler wird immer viele Lösungen finden und dann das Gefühl haben, die Aufgabenstellung nicht voll erfüllt zu haben. Ein Merkmal einer polyvalenten Aufgabe ist es aber gerade, dass bereits mit einer einzigen gefundenen Lösung die Aufgabenstellung vollständig erfüllt sein sollte. Durch das Erleben einer stets vorhandenen größeren Zahl von Lösungen und der Freude beim Finden weiterer Lösungen sollten die Schüler die Bereitschaft und Gewohnheit entwickeln, ohne explizite Aufforderung stets nach mehreren Lösungen einer Aufgabe zu suchen. Diese Haltung sollte sich auch auf die Bearbeitung anderer Aufgaben auswirken.

Die Aufgabe sollte weiterhin so formuliert werden, dass keine Fragen bei den Schülern zum Verständnis der Aufgabenstellung auftreten.

Das Arbeiten mit polyvalenten Aufgaben erfordert in der Regel *zwei Arbeitsphasen*. In einigen Fällen hat es sich auch als sinnvoll erwiesen, in einer *dritten Arbeitsphase* im Anschluss an die Bearbeitung der Aufgabe eine Systematisierung und Zusammenfassung der Ergebnisse vorzunehmen.

Zur ersten Phase der Bearbeitung der Aufgabe

In der ersten Phase bearbeiten die Schüler die Aufgabenstellung. Hierzu gehören das Erfassen der Aufgabenstellung, das Entwerfen eines Lösungsplanes, die eigentliche Lösung der Aufgabe und die Überprüfung der Lösung.

Für die Gestaltung dieser Phase wurden in den abschließenden Gesprächen zur Auswertung der Fortbildungskurse von den Teilnehmern mehrheitlich folgende Empfehlungen gegeben.

- Nachdem der Lehrer die Aufgabe möglichst in schriftlicher Form gestellt hat, sollte er keine weiteren Erläuterungen zur Aufgabenstellung und zum Vorgehen bei der Lösung der Aufgabe geben.
- Die Schüler sollten dann selbstständig oder auch in Partnerarbeit die Aufgabe bearbeiten und ihre Lösungen im Heft, auf vorbereiteten Arbeitsblättern oder sonstigen bereitgestellten Materialien notieren.
- Während der selbstständigen Bearbeitung der Aufgabe sollte der Lehrer keine weiteren Hinweise und Hilfestellungen geben.

Zur zweiten Phase der Bearbeitung der Aufgabe

In der zweiten Arbeitsphase stellen die Schüler ihre Ergebnisse zur Diskussion. Diese Phase erfolgt durch eine Kommunikation im gesamten Klassenverband. Das Besprechen unterschiedlicher Schülerantworten ist mehr als nur eine Kontrolle auf "Richtigkeit". Die der Aufgabenbearbeitung folgende Diskussion in der Klasse setzt den Lernprozess beim einzelnen Schüler fort. Der Schüler kann die Ideen seiner Mitschüler nachvollziehen und sich zu eigen machen. Damit dient die Phase der Diskussion der Lösungen auch dem Entwickeln allgemeiner Fähigkeiten, wie z. B. dem Argumentieren, dem Kommunizieren und dem Verwenden mathematischer Darstellungen.
Das Darstellen von Lösungswegen, das Begründen und Argumentieren sind Schülertätigkeiten, die einen festen Platz in der gesamten Unterrichtskultur haben sollten. Dem Sprechen der Schüler vor der Klasse zu mathematischen Sachverhalten kommt in diesem Zusammenhang eine besondere Bedeutung zu.

In dieser Präsentationsphase konnten wir oft erleben, dass einige Schüler nach dem Vorstellen von Lösungen anderer Schüler weitere Ideen entwickelten.

Für diese Phase, deren Gestaltung sich als besonders anspruchsvoll und neuartig erwies, ergeben sich aus unseren Erprobungen folgende allgemeine Empfehlungen.

- Diese Phase der Präsentation der Ergebnisse muss durch den Lehrer sorgfältig vorbereitet werden. Insbesondere ist zu überlegen, welche Materialien (z. B. Folien, großformatige Papiere, Magnete und anderes) bereitgestellt werden sollten.
- Es sollte ausreichend Zeit für die Präsentation der Ergebnisse eingeplant werden, oft ist mindestens die doppelte Zeit im Vergleich zur ersten Phase erforderlich.
- Die Schüler sollten selbstständig und eigenverantwortlich ihre Ergebnisse präsentieren. Der Lehrer sollte sich dabei zurücknehmen.
- Die Schüler sollten angeregt werden, miteinander zu diskutieren.
- Es sollte zuerst "mathematisch zurückhaltende" Schüler zur Präsentation angeregt werden.
- Leistungsstarke Schüler sollten generell zuletzt ihre Ergebnisse vortragen.
- Mitteilungsbedürftige Schüler sollten schnell durch eine frühe Präsentationsmöglichkeit "beruhigt" werden.

Weitere Empfehlungen

Neben den bisherigen Empfehlungen, die mehrheitlich von den Teilnehmern gemacht wurden, gab es auch von einzelnen folgende Anregungen.

- Ein oder zwei Schüler können ihre Aufgaben hinter der Tafel bearbeiten.
- Bei Aufgaben, bei denen Fragen zu vorgegebenen Sachverhalten gesucht werden, sollten die Schüler zwischen Fragen unterscheiden, die wahrscheinlich mit dem Aufgabentext verbunden sind und weiteren möglichen Fragestellungen, die darüber hinausgehen.
- Zur rationellen Präsentation der Schülerantworten sollte der Lehrer während der selbstständigen Schülerarbeit durch die Klasse gehen und Schüler mit interessanten unterschiedlichen Antworten auswählen.
- Die Auswertungsphase kann damit verbunden werden, Möglichkeiten zur Präsentation von Ergebnissen zu vermitteln und zu üben.
- Es sollten Regeln für das Sprechen vor der Klasse aufgestellt werden.
- Während Schüler ihre Ergebnisse vorstellen, können die anderen Beobachtungsaufgaben erhalten, in dem sie z. B. überprüfen, ob ihre Lösungen schon dabei sind oder Lösungen doppelt vorkommen.

Stolpersteine

Wir haben die Teilnehmer auch gebeten, mögliche "Stolpersteine" beim Arbeiten mit polyvalenten Aufgaben im Unterricht anzugeben. Folgendes sollte vermieden werden bzw. könnte kritisch sein.

- Während der ersten Arbeitsphase werden Schülerfragen beantwortet.
- Die Auswertungsphase gleitet in ein lehrerzentriertes Unterrichtsgespräch ab.
- Der Lehrer redet zu viel und präsentiert selbst die Ergebnisse.
- Es können immer die gleichen Schüler ihre Ergebnisse vorstellen.
- In der Auswertungsphase werden durch den Lehrer während des Vorstellens der Lösungen der Schüler Fragen gestellt und Hinweise gegeben.
- In der Auswertungsphase verzettelt man sich in einer Diskussion nebensächlicher Fragen, der rote Faden ist nicht mehr erkennbar.
- Werden die Antworten auf Folien präsentiert, kann der Vergleich der Ergebnisse verloren gehen.

- Schreiben die Schüler ihre Ergebnisse selbst an die Tafel, können diese für andere manchmal nicht lesbar sein.
- Durch die Vorstellung sehr vieler Ergebnisse kann die Übersicht verloren gehen.
- Die Auswertungsphase dauert zu lange, und das Interesse der Schüler geht verloren.

Zur Bewertung polyvalenter Aufgaben

Bei der durchaus umstrittenen Frage der Bewertung polyvalenter Aufgaben sollte beachtet werden, dass eine Bewertung nicht nur durch Zensuren, sondern auch durch mimische, gestische oder stimmlich bekräftigende bzw. korrigierende Zuwendungen des Lehrers sowie durch mündliche oder schriftliche Worturteile möglich ist.

Wollte man polyvalente Aufgaben in der gleichen Weise wie geschlossene benoten, müssten eine Menge verschiedener Lösungswege und Lösungen im Vorfeld als Erwartungsbild mit einem Bewertungsmaßstab versehen werden. Dieses Vorgehen wäre sehr aufwändig. Hinzu kommt, dass man bei aller Weitsicht trotzdem von unvorhergesehenen Lösungsvorschlägen der Schüler überrascht werden kann.

Im Ergebnis von Diskussionen mit den Kursteilnehmern wurden folgende Standpunkte zum Problem der Bewertung polyvalenter Aufgaben erarbeitet.

- Damit die Bearbeitung polyvalenter Aufgaben im Unterricht von den Schülern auch ernst genommen wird, sollten auch gelegentlich Leistungen einzelner Schüler mit einer Note bewertet werden. Die kreative und offene Arbeitsatmosphäre sollte aber nicht durch den Druck einer möglichen Zensierung negativ beeinflusst werden.
- Die Bearbeitung polyvalenter Aufgaben ermöglicht es, in der Auswertungsphase in besonderem Maße durch mimische, gestische oder stimmliche Zuwendungen des Lehrers sowie mündliche Worturteile eine Bewertung von Schülerleistungen aller Leistungsgruppen vorzunehmen. Gegenstand dieser Bewertungen können die Wahl einer geeigneten Darstellungsform, die Anzahl verschiedener Präsentationsformen, die sprachliche und optische Gestaltung der Ergebnisdarstellung oder die Beteiligung von Schülern an der Diskussion mit durchdachten Fragestellungen oder von Hinweisen zu Lösungen sein.
- Bestimmte polyvalente Aufgaben können auch in schriftlichen Leistungserhebungen eingesetzt werden. Um analog zur mündlichen Bearbeitung der Aufgabe jedem Schüler ein Erfolgserlebnis zu vermitteln, wenn er eine der möglichen Antworten gefunden hat, sollten etwa 50 % der vorher festgelegten Gesamtpunktzahl für eine der möglichen richtigen Antworten vergeben werden. Die restlichen für die Bewertung vorgesehenen Punkte sollten für weitere richtige Antworten vergeben werden. Dabei ist auch die Qualität der Antworten zu beachten. Eine derartige Verfahrensweise sollte vor der ersten Anwendung gemeinsam mit den Schülern besprochen werden.
- Eine polyvalente Aufgabe sollte in einer Arbeit als letzte Aufgabe gestellt werden, um zu verhindern, dass sich Schüler zu Beginn der Arbeit zu lange daran aufhalten.

Polyvalente Aufgaben im schulischen Umfeld

Wer beginnt, polyvalente Aufgaben zu einem Bestandteil seines Unterrichts zu machen, sollte in Betracht ziehen, dass diese Innovation Fragen, Irritationen und vereinzelt auch Widerstände hervorrufen kann. Das ist besonders von Bedeutung, wenn die Arbeit an polyvalenten Aufgaben auch bewertet werden soll. Wir empfehlen, rechtzeitig Fachkonferenzen, schulinterne Fortbildungen und Elternabende zu nutzen, um die anstehenden Veränderungen im Mathematikunterricht transparent zu machen und dadurch Unterstützung für das Anliegen zu gewinnen, den Mathematikunterricht **etwas anders** zu gestalten.

1.4.3 Zu den Aufgaben in der Broschüre

Wir haben in schuljahresbegleitenden internetgestützten Lehrerfortbildungen, an denen bis zum Schuljahr 2009/10 etwa 120 Kolleginnen und Kollegen aus Mecklenburg-Vorpommern und aus Berlin teilgenommen haben, zahlreiche Aufgaben erprobt, die nach unserer ersten Einschätzung einen polyvalenten Charakter haben könnten. In der Mehrzahl der Fälle hat sich dies auch bestätigt. Zu diesen Aufgaben werden in der vorliegenden dritten Auflage der Broschüre die damit gesammelten Erfahrungen dargestellt. Die ausführlichen Erfahrungsberichte zu den Aufgaben können auch unter http://www.mathe-mv.de eingesehen werden.

Zu den noch nicht erprobten Aufgaben geben wir lediglich einige kurze Hinweise zur Unterrichtsgestaltung und zu möglichen Schülerantworten, die nach unseren bisherigen Erfahrungen denkbar sind. Die praktische Erprobung wird auch hier zu einer viel größeren Vielfalt der Gestaltungsmöglichkeiten und Schülerantworten führen.

Bei jeder Aufgabe geben wir deren mögliche Bezüge zur Aneignung von mathematischen Wissen und Können in bestimmten Lernprozessen an. Damit soll verdeutlicht werden, dass die ausgewählten polyvalenten Aufgaben einen wesentlichen Beitrag zur Entwicklung der mathematischen Bildung der Schüler leisten können.

Mit der Angabe der zahlreichen Antwortmöglichkeiten ist **nicht** gemeint, dass alle diese Antworten auch in der Auswertung der Aufgaben zu behandeln sind.

Wir freuen uns über Erfahrungsberichte zu den Aufgaben, die Sie per Mail an mathedidaktik@uni-rostock.de schicken können.

2 Stoffverteilungsvorschlag für die Klassen 5 und 6

Der Stoffverteilungsvorschlag ist als eine Unterstützung bei der Aufstellung schuleigener Fachpläne[5] für den Bereich der Sachkompetenz zu verstehen.

Die für das Lernen genutzte Unterrichtszeit hat sich in Untersuchungen der empirischen Bildungsforschung neben einer klaren Strukturierung des Unterrichts als eines der entscheidenden Kriterien für eine hohe Qualität des fachlichen Lernens erwiesen[6]. Die Planung der einzelnen Unterrichtszeiten, die zur Realisierung der zahlreichen Ziele und Inhalte des Mathematikunterrichts in den Klassen 5 und 6 vorzusehen sind, ist allerdings ein sehr komplexes Problem. Dieses so genannte Stoff-Zeit-Problem spielt in der täglichen Arbeit eines jeden Lehrers eine erhebliche Rolle. Es gibt allerdings in Mecklenburg-Vorpommern kaum Untersuchungen, Planungen und Orientierungen für zeitliche Rahmenbedingungen. Im nationalen Maßstab haben Bundesländer, deren Pläne gut durchdachte zeitliche Orientierungswerte und konkrete Anforderungen enthalten, bei nationalen und internationalen Leistungsvergleichen wesentlich besser abgeschnitten als Bundesländer, in denen dies nicht der Fall ist.

In der Schule wird das Stoff-Zeit-Problem häufig mit defizitären Sichtweisen verbunden. Die Zeit, die einem Lehrer zur Verfügung steht, um die Unterrichtsziele auf dem von ihm persönlich erwarteten Niveau zu realisieren, wird in der Regel als viel zu gering empfunden. Dies führt dann bei vielen Lehrern zu einem ständigen Gefühl fehlender Zeit und unbefriedigender Lernergebnisse. Untersuchungen in Mecklenburg-Vorpommern zur realisierten Stoffverteilung ergaben erhebliche Differenzen bei den Themengebieten der Klassen 5 und 6, die bei den natürlichen und gebrochenen Zahlen bis zu 100 Stunden betrugen. Die Ausdehnung der aufgewendeten Zeit für einzelne Themen führt unweigerlich zu einer Reduzierung der Zeit für andere Gebiete.

Wir halten langfristig eine Änderung der gegenwärtig dominierenden Sichtweise auf das Stoff-Zeit-Problem für erforderlich. Die für ein bestimmtes Themengebiet und auch für einzelne Unterrichtseinheiten zur Verfügung stehende Zeit sollte als eine gegebene und im Wesentlichen nur wenig veränderbare Größe angesehen werden. Die Aufgabe eines Lehrers besteht dann darin, in der zur Verfügung stehenden Zeit möglichst optimale Ergebnisse unter Berücksichtigung der konkreten Klassensituation zu erreichen.

Die Festlegung der zeitlichen Rahmenbedingungen kann allerdings nicht aus Sicht eines einzelnen Lehrers oder Fachkollegiums erfolgen. Sie ergibt sich als wissenschaftliches Problem aus den notwendigen Zeiten für die Aneignung der betreffenden Lerngegenstände, aus den Lernprozessen, die im weiteren Schulverlauf zu konzipieren sind und aus der Festlegung der Anforderungen in zentralen Leistungsüberprüfungen.

Der Begriff Unterrichtsstoff wird im engeren Sinne als Element einer wissenschaftlichen Theorie aufgefasst. Es hat sich in unserem Land aus historischen Gründen aber längst eine erweiterte Fassung des Stoffbegriffs im Denken von Rahmenplanautoren und Lehrern durchgesetzt, die auch Vorstellungen, Fertigkeiten, Fähigkeiten bzw. geistige Tätigkeiten in den Stoffbegriff einbezieht. Wenn etwa in einem Plan vom Bruchbegriff die Rede ist, so versteht jeder Lehrer darunter nicht nur die mathematische Definition des Begriffes Bruch, sondern die Vermittlung sämtlicher inhaltlicher Aspekte des Bruchbegriffes und der Fähigkeiten im Umgang mit Brüchen in verschiedenen Sachsituationen. Es macht deshalb wenig Sinn, den bewährten Stoffbegriff in einen Gegensatz zum neuen Kompetenzbegriff zu bringen. Die Aneignung jeglichen Unterrichtsstoffes ist immer mit der Ausbildung fachspezifischer Kompetenzen verbunden und Kompetenzen ohne stoffliche Inhalte gibt es nicht. Wir bleiben deshalb bei der Bezeichnung "Stoffverteilungsplan".

[5] Vgl.: Leitfaden Schulinterner Lehrplan, L.I.S.A. M-V, Schwerin 2006
[6] Meyer, H.: Was ist guter Unterricht. – Berlin : Cornelsen Verlag, 2004

Stoffverteilungsvorschlag für die Klassen 5 und 6

	Klasse 5	Std.
1	**Natürliche Zahlen**	**40**
	Einstieg ins neue Schuljahr	3
1.1	Verwenden und Darstellen nat. Zahlen	5
1.2	Rechenoperationen mit natürlichen Zahlen	10
1.3	Rechengesetze, Vorrangregeln	3
1.4	Schriftliche Rechenverfahren	10
1.5	Gleichungen und Ungleichungen	4
1.6	Gemischte Aufgaben	5
2	**Beschreiben und Auswerten zufälliger Vorgänge**	**10**
2.1	Zufällige Vorgänge, Wahrscheinlichkeit	4
2.2	Durchführen und Auswerten statistischer Untersuchungen	6
3	**Gebrochene Zahlen**	**25**
3.1	Bruchbegriff, Darstellen von Brüchen auf dem Zahlenstrahl	4
3.2	Erweitern und Kürzen von Brüchen	3
3.3	Vergleichen und Ordnen, Addieren und Subtrahieren gleichnamiger Brüche	3
3.4	Dezimalbrüche	2
3.5	Vergleichen, Ordnen und Runden von Dezimalbrüchen	3
3.6	Rechnen mit Dezimalbrüchen	6
3.7	Gemischte Aufgaben	4
4	**Größen**	**16**
	Rückblick	1
4.1	Währung	2
4.2	Masse	3
4.3	Zeit	4
4.4	Länge	3
4.5	Gemischte Aufgaben	3
5	**Ebene Geometrie**	**25**
	Rückblick	4
5.1	Winkelbegriff	6
5.2	Das Koordinatensystem	2
5.3	Spiegelungen	3
5.4	Umfang und Flächeninhalt von Figuren	6
5.5	Gemischte Aufgaben	4
6	**Räumliche Geometrie**	**24**
	Rückblick	4
6.1	Geometrische Körper – Eigenschaften von Quadern	2
6.2	Schrägbilder von Quadern	4
6.3	Berechnen des Oberflächeninhalts von Quadern	2
6.4	Volumen von Körpern – Einheiten des Volumens	6
6.5	Gemischte Aufgaben	6
Summe:		**140**

	Klasse 6	Std.
1	**Teilbarkeit**	**12**
1.1	Teilermengen und Primzahlen	4
1.2	Teilbarkeitsregeln	4
1.3	Kleinstes gemeinsames Vielfaches	3
1.4	Größter gemeinsamer Teiler	1
2	**Gebrochene Zahlen**	**40**
2.1	Rückblick; Begriff der gebrochenen Zahl	5
2.2	Gleichnamigmachen von Brüchen	2
2.3	Vergleichen und Ordnen von ungleichnamigen Brüchen	3
2.4	Addieren und Subtrahieren von ungleichnamigen Brüchen	5
2.5	Multiplizieren von Brüchen	4
2.6	Dividieren durch einen Bruch	3
2.7	Dividieren von Dezimalbrüchen; Periodische Dezimalbrüche	8
2.8	Eigenschaften gebrochener Zahlen	4
2.9	Gemischte Aufgaben	6
3	**Stochastik**	**18**
3.1	Ermitteln der Anzahl von Möglichkeiten	3
3.2	Wahrscheinlichkeit und relative Häufigkeit	3
3.3	Berechnen von Wahrscheinlichkeiten	4
3.4	Arithmetisches Mittel	4
3.5	Darstellen und Auswerten von Daten	4
4	**Geometrie**	**70**
4.1	Geometrische Abbildungen	12
4.2	Winkelbeziehungen	9
4.3	Konstruieren	3
4.4	Dreiecke	16
4.5	Vierecke	10
4.6	Körper	15
4.7	Gemischte Aufgaben	5
Summe:		**140**

3 Natürliche Zahlen und Teilbarkeit

Hinweise zu den Aufgaben zu natürlichen Zahlen

E1
Roy liest in der Zeitung: "In der neuen Konzerthalle gibt es 84 Reihen mit je 72 Plätzen."
Stelle dir dazu eine Frage und beantworte sie.

E2
Für eine Urlaubsreise plant Familie Krajewski 380 € Benzinkosten, 970 € für die Unterkunft, 400 € für die Verpflegung und 270 € für Ausflüge. In der Urlaubskasse sind 1800 €.

Rolle der Aufgabe in Lernprozessen
Mit diesen Sachaufgaben, die keine oder eine offene Fragestellung enthalten, können die Schüler an das Arbeiten mit offenen Aufgaben herangeführt werden. In der Regel sollten die Schüler hierzu Erfahrungen aus der Primarstufe mitbringen, so dass sich die Notwendigkeit einer "Gewöhnungsphase" in Klasse 5 aus der vorhandenen Vertrautheit mit diesem Aufgabentyp erübrigt.

Mit diesen Aufgaben können die Einstellungen und Fähigkeiten zum Erfassen des Sachverhalts bei Sachaufgaben entwickelt werden (vgl. S. 12).

Zur Vorbereitung auf das Arbeiten mit polyvalenten Aufgaben können die Schüler mit diesen Aufgaben daran gewöhnt werden, dass sie möglichst viele Antworten bei solchen Aufgaben suchen sollten, auch wenn dies in der Aufgabenstellung nicht explizit verlangt ist.

Hinweise zum Einsatz der Aufgaben
Beide Aufgaben sind zu Beginn der Klasse 5 bei der Reaktivierung der Kenntnisse und Gewohnheiten zum Lösen von Sachaufgaben aus der Grundschule einsetzbar.
E1:
Die Schüler sollten zunächst 5 Minuten Zeit bekommen, um sich mögliche Fragestellungen zu überlegen. Dabei kann besonders bei leistungsstarken Schülern der Hinweis auf das Hinzufügen von Informationen gegeben werden.

E2:
Im Unterschied zu Aufgabe E1 ist hier keine explizite Aufgabenstellung enthalten. Bei Erprobungen zeigt sich, dass die meisten Schüler mit so einem Aufgabentyp vertraut sind und sofort beginnen, Überlegungen zum Sachverhalt zu entwickeln und Fragen zu stellen (vgl. S. 7).

Für die Feststellung, dass das vorhandene Geld nicht ausreicht, benötigen die Schüler etwa 5 Minuten. In der Grundschule wäre hier die Sachaufgabe als gelöst beendet worden. Jetzt kann der Lehrer den Hinweis geben, dass es nicht nur darum geht, herauszufinden, dass die Summe der geplanten Kosten das Budget um 220 Euro übersteigt, sondern dass auch Lösungsmöglichkeiten für dieses Problem der Familie Krajewski gefunden werden könnten. Hieraus ergibt sich dann eine Vielfalt von Möglichkeiten. Für die Ideensammlung zur Lösung des Problems sollten noch einmal 5 Minuten zur Verfügung gestellt werden.

Hinweise zu möglichen Schülerantworten
E1:
Viele Schüler sind oftmals mit einer Frage zufrieden. Es sollte hier Impulse durch den Lehrer gegeben werden, dass die Schüler möglichst viele weitere interessante Fragen finden.
Mögliche Fragestellungen wären:
– Wie viele Plätze gibt es in der Konzerthalle?
– Wie hoch ist das Eintrittsgeld insgesamt, wenn eine Karte 5 Euro kostet?
Das Hinzufügen von Informationen erhöht den Grad der Offenheit deutlich, wie z. B.
– Eine Karte kostet 10 €, Kinder zahlen die Hälfte.

– Die gesamten Kosten einer geplanten Veranstaltung (z. B. Künstlergagen, Bezahlung des Personals, Technik) betragen 40 000 €.

E2:

Denkbare und zu diskutierende Schülerantworten können hier sein: "Sie brauchen mehr Geld", "Sie müssen noch sparen", "Sie können nicht fahren" oder "Sie müssen die Ausflüge weglassen".
Verschiedene Rechenstrategien sind ebenfalls möglich. Der Versuch des Abziehens aller Einzelpositionen vom Gesamtbudget (1800 – 380 – 970 – 400 – 270 = ?) führt ebenso zu gültigen Antworten wie der Vergleich der gesamten geplanten Ausgaben mit der zur Verfügung stehenden Summe (380 + 970 + 400 + 270 > 1800).

Weitere Hinweise

Aufgaben und dazugehörige Lösungen können auch auf unterschiedliche zusammengehörige Kärtchen oder auf der Vor- und Rückseite einer Karte erstellt werden. So hat man für die Klasse zusätzliche Aufgaben für eine Freiarbeitsphase im Unterricht oder zur Differenzierung. Hier sollte dann für die Erstellung eines Aufgabenpools wesentlich mehr Zeit eingeplant werden.

Aufgabe 1

In einer Zahlenmauer ist eine Zahl (bis auf die Zahlen der untersten Reihe) immer die Summe bzw. das Produkt der beiden darunter stehenden Zahlen.
Baue selbst verschiedene Zahlenmauern.

Rolle der Aufgabe in Lernprozessen

Ziel der Aufgabe ist das Festigen der Kopfrechenfertigkeiten im Addieren und Multiplizieren. Die Schüler trainieren auf spielerische Weise den Umgang mit den natürlichen Zahlen und wenden Kopfrechenverfahren für die Rechenoperationen sowie das Kommutativgesetz an.

Bei der Aufgabe geht es um das Zerlegen von Zahlen in Summen und Produkte. Dieser Typ von Umkehraufgaben zum Berechnen von Summen und Produkten ist ein notwendiger Bestandteil der Entwicklung von sicheren Fertigkeiten im Rechnen mit natürlichen Zahlen.

Hinweise zum Einsatz der Aufgabe

Die Zahlenmauern sind den Schülern bereits aus der Grundschule bekannt, so dass die Aufgabe ohne Erklärung des Lehrers eingesetzt werden kann. Für das Lösen der Aufgabe werden in der Broschüre sechs Zahlenmauern vorgegeben. Damit wäre die Offenheit eigentlich eingeschränkt. Natürlich können die Schüler noch weitere Zahlenmauern zeichnen, um noch weitere Lösungen aufzunehmen. Für das Finden von möglichst vielen Lösungen sollten den Schülern für beide Aufgaben jeweils mindestens 15 Minuten zur Verfügung gestellt werden.
Zum Präsentieren der verschiedenen Lösungen hat sich der Einsatz eines Projektors und zweier Folien bewährt. Auf die untere Folie ist eine Zahlenmauer kopiert worden, auf der oberen, verschiebbaren Folie können die Schüler mit Folienstiften zeitsparend ihre Lösungen eintragen.
Die Aufgabe hat in den zahlreichen Erprobungen den Schülern stets viel Spaß gemacht.

Hinweise zu möglichen Schülerantworten

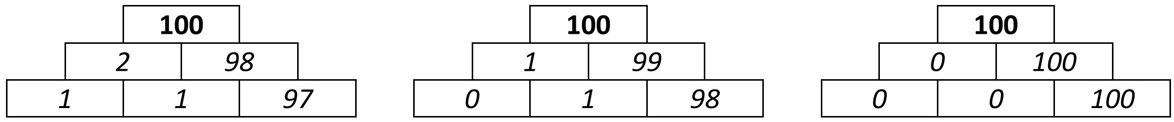
Bei den Aufgaben sind in der zweiten Zeile alle Zerlegungen der Zahl 100 in eine Summe aus zwei Summanden bzw. der Zahl 180 in ein Produkt aus zwei Faktoren möglich. Das Ausfüllen der Mauer erfolgt von oben nach unten.
Mögliche Lösungen:

a) Die Zahl 100 wird durch Addieren erreicht.

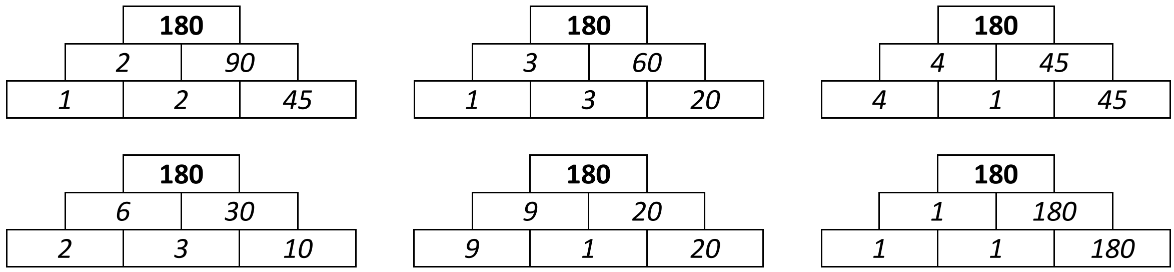
	100	
51	*49*	
21	*30*	*19*

	100	
50	*50*	
25	*25*	*25*

	100	
10	*90*	
5	*5*	*85*



b) Die Zahl 180 wird durch Multiplizieren erreicht.



Zu den Erfahrungen in den Erprobungen:

– Es wurde oft bei den Additionsmauern mit Vielfachen von 10 und 5 gearbeitet.
– Einige Schüler probierten Zahlenpaare systematisch durch, wie z. B. 80 + 20, 79 + 21, 78 + 22.
– Die Zahlen 0 und 1 wurden selten benutzt.
– Die Schüler haben oft nur die Zahlen vertauscht, was zu Diskussionen über die Verschiedenheit der Lösungen angeregt hat.
– Das Zerlegen der Zahl 180 in Faktoren bereitete in einigen Klassen einer Reihe von Schülern größere Schwierigkeiten.
– Die Schüler waren oft erstaunt über die zahlreichen Lösungen, eine Schülerin fand 40 Mauern.

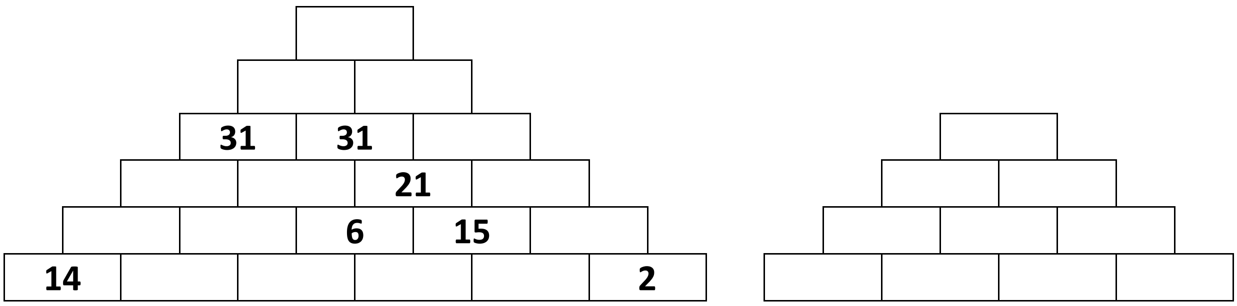
Die unterschiedliche Qualität der Antworten ergibt sich durch die Anzahl der gefundenen Lösungen und die Berücksichtigung von Sonderfällen, insbesondere mit den Zahlen 0 bzw. 1.

Um die oft unübersichtliche Vielfalt der Lösungen etwas zu begrenzen, könnte zu Beginn der Aufgabenstellung vereinbart werden, dass das Vertauschen von Summanden beziehungsweise Faktoren keine neue Lösung darstellt.

Weitere Hinweise

In einigen Klassen zeigte sich, dass die Schüler nicht aus der Grundschule mit dem Aufgabentyp vertraut sind. In diesen Fällen müssen vor dem Bearbeiten dieser polyvalenten Aufgabe Übungen zum Arbeiten mit Zahlenmauern durchgeführt werden, bei denen die Mauern von unten nach oben aufzubauen bzw. Lücken auszufüllen sind.
Eine mögliche Aufgabenstellung ist die folgende, die auch in den Erprobungen mit Erfolg eingesetzt wurde. Dabei handelt sich allerdings nicht um eine polyvalente Aufgabe.
In einer Zahlenmauer ist eine Zahl (bis auf die Zahlen der untersten Reihe) immer die Summe bzw. das Produkt der beiden darunter stehenden Zahlen.

a) Fülle die linke Zahlenmauer vollständig aus.
b) Trage in die rechte Zahlenmauer die Zahlen 23; 24; 25; 26; 49; 51; 100; 200 ein.
   Sie können auch doppelt vorkommen.



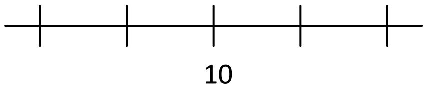
Lösung der Aufgabe:

141					
62	*79*				
31	**31**	*48*			
21	*10*	**21**	*27*		
17	*4*	**6**	**15**	*12*	
14	*3*	*1*	*5*	*10*	**2**

200			
100	*100*		
49	*51*	*49*	
23	*26*	*25*	*24*

Aufgabe 2

Beschrifte die Markierungen der Skalen.



Rolle der Aufgabe in Lernprozessen

Das Ziel dieser Aufgabe ist die Entwicklung von Fertigkeiten im Ablesen von Skalen, die in verschiedenen Unterrichtsfächern und im täglichen Leben oft benötigt werden. Die Aufgabe ist eine Umkehraufgabe der Standardaufgabe im Ablesen von Werten aus beschrifteten Skalen. Mit der Aufgabe kann durch die zahlreichen Lösungsmöglichkeiten und die große Aktivität der Schüler insbesondere die grundlegende Handlung verinnerlicht werden, dass man beim Arbeiten auf Skalen immer in gleichen Schritten nach rechts oder links gehen muss.

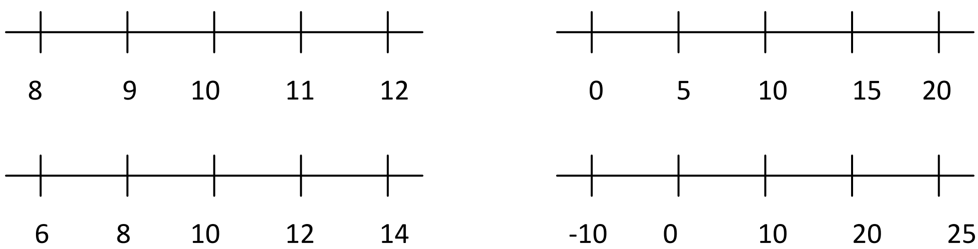
Hinweise zum Einsatz der Aufgabe

Die Aufgabe sollte in der Stoffeinheit "Verwenden und Darstellen natürlicher Zahlen" eingesetzt werden.

Zur Bearbeitung der Aufgabe hat sich Einzelarbeit bewährt. Die Schüler sollten erfahren, dass sie auch mehr als vier Skaleneinteilungen finden können. Während die Schüler ihre Lösungen erarbeiten, kann der Lehrer an der Tafel die Skalen für die Präsentation vorbereiten. Da die Aufgabe auch einen wesentlichen Erkenntnisprozess beinhaltet (Abstand der Skaleneinteilungen ist immer gleich), sollten sowohl für das Lösen als auch für das Präsentieren der Ergebnisse mindestens 10 Minuten eingeplant werden.

Hinweise zu möglichen Schülerantworten

Mögliche Beschriftungen der Skalen:



Erfahrungen aus den Erprobungen:

– Man muss mit den Schülern noch besprechen, was mit dem Wort "Markierung" gemeint ist. Auch der Begriff "Skale" sollte geklärt werden.
– Wenn die Schüler erkannt haben, dass der Abstand der Skaleneinteilungen immer gleich sein muss, finden sie ganz schnell immer wieder neue Lösungen.
– Wenn man mit den Schülern vorher klärt, dass bereits durch zwei Zahlen die fehlenden festgelegt sind, so erkennen sie bei der Aufgabe sofort, dass nur eine Zahl vorgegeben ist und sie jetzt selbst die zweite festlegen können.
– Einige Schüler versuchen zuerst immer, den ersten Strich mit der Null zu beschriften.

- Manchmal findet ein Schüler auch eine Einteilung, die auf negative Zahlen führt.
- Eine Erkenntnis, die ohne Vorbereitung nur einige Schüler finden, ist: "Da muss keine Null am Anfang stehen."
- Zu einer Diskussion führte das Zählen in 4er und 3er Schritten, weil diese Zählweise nicht zum nächsten Zehner führt. Am Ende der Diskussion einigten sich die Schüler, dass die Lösungen alle richtig, aber nicht alltagstauglich sind.
- Einige Schüler fanden auch ausgefallene Lösungen: wie -10 0 **10** 20 30; 0 5 **10** 5 0 oder 12 11 **10** 9 8. Zu diesen Lösungen gab es viele Diskussionen. Alle Vorschläge sind praktisch durchaus sinnvoll, was nicht immer erkannt wurde.
- Einige Teilnehmer hatten den Eindruck, dass leistungsschwächere Schüler länger und intensiver (kreativer) nach Lösungen gesucht haben als leistungsstärkere Schüler.

Die Aufgabe hat einen ausgeprägten polyvalenten Charakter, da fast alle Schüler eine Lösung finden können und durch die Anzahl und Art der Lösungen viel Spielraum für weiterführende Betrachtungen vorhanden ist (z. B. negative Zahlen, systematische Suche nach allen Möglichkeiten, Rolle der Null, Sinnhaftigkeit von bestimmten Einteilungen u. a.). Die Aufgabe ist deshalb auch gut geeignet, um die Schüler an den für sie neuen Typ der polyvalenten Aufgaben heranzuführen.

Weitere Hinweise

Als weitere Übungsmöglichkeit kann die Zahl 10 durch eine andere Zahl ausgetauscht werden. In unserer Erprobung wurden dazu die Zahlen 20, 150 und 3500 verwendet. Dadurch kann man eventuell diese Aufgabe in einer Hausaufgabe oder Kontrolle einsetzen. In der Präsentation der Ergebnisse hat sich bewährt, dass die Schüler die gefundenen Lösungen von der Tafel in das Heft übernehmen. So haben auch Schüler mit Konzentrationsproblemen in der Präsentationsphase eine Aufgabe.

Es sollte keine spezielle Sprechweise (z. B. Mittelzahl) und kein Algorithmus zum Lösen dieser Aufgabe vermittelt werden. Ziel der Aufgabe ist es lediglich, die geistige Handlung des gleichmäßigen Abzählens in Skalen zu festigen. Das Beschriften von Skalen selbst muss nicht als Fertigkeit ausgebildet werden.

Aufgrund der Bedeutung der auszubildenden Fertigkeiten im Arbeiten mit Skalen sollten Aufgaben dieses Typs auch im späteren Unterricht in täglichen Übungen verwendet werden. Dabei ist es ausreichend, wenn die vorgegebene Markierung nicht in der Mitte, sondern am 1. Skalenstrich von links eingetragen wird, da meist ein Ablesen auf einer Skala von links nach rechts erfolgt.

Aufgabe 3

Erfinde zu jeder Rechnung eine interessante Sachaufgabe und schreibe sie auf.

a) 13 + 17 b) 17 – 13 c) 3 · 7 d) 32 : 4

Rolle der Aufgabe in Lernprozessen

Ziele der Aufgabe sind das Festigen der Verwendungsaspekte von Rechenoperationen, z. B.

- Addieren: vermehren, zusammenfassen, hinzufügen, verlängern, bekommen, …
- Subtrahieren: verringern, wegnehmen, abziehen, abtrennen, verkürzen, ausgeben, …
- Multiplizieren: mehrfaches Addieren, zusammenfassen, vervielfachen, Paarbildung, …
- Dividieren: mehrfaches Subtrahieren, aufteilen, verteilen, halbieren, dritteln, … [7]

Die Schüler setzen die Rechenoperationen und ihre Formulierungen bewusst in Beziehung und verknüpfen diese fester. Die Schüler trainieren ihre Ausdrucksfähigkeit und erkennen, welche Vielfalt an Sachthemen in mathematische Modelle gebracht werden können bzw. die Umkehrung dessen. Die Aufgabe nimmt den Schülern die Angst vor dem Lösen von Sachaufgaben. Das Jonglieren mit verschiedenen Begriffen für ein und dieselbe Aufgabe trainiert die Beweglichkeit beim Denken und das richtige Zuordnen. Bei der Formulierung von sinnvollen Sachaufgaben spiegeln die Schüler z. T. ihre eigene Erlebniswelt wieder.

[7] Vgl. Broschüre "Sicheres Wissen und Können im Rechnen mit Zahlen und Größen", Schwerin 2009, S. 10.12

Hinweise zum Einsatz der Aufgabe

Das Zahlenmaterial ist für diese Aufgabe bewusst so gewählt worden, dass die Schüler die Möglichkeit haben, verschiedene reale Sachverhalte zu finden. Große Zahlen, welche eher dem Leistungsniveau der Schüler entsprechen, reduzieren die Anzahl der Sachverhalte. Es ist die Frage diskutiert worden, ob die verwendeten Zahlenwerte nicht zu simpel für die Orientierungsstufe sind. Eine Erprobung höherer Zahlenwerte ergab aber, dass die Zahl gefundener Sachverhalte aus dem Erfahrungsbereich der Schüler soweit abnahm, dass der polyvalente Charakter der Aufgabe verloren ging. Es ist nicht nötig, alle Teilaufgaben zu bearbeiten. Die Diskussion der Schülerantworten erfolgt separat für jede Teilaufgabe.
Bewährt hat sich für den Einsatz der Aufgabe die Partnerarbeit. Dabei überlegen sich die Partner verschiedene Sachverhalte für die Teilaufgaben. Für eine Teilaufgabe sollten zum Finden und Aufschreiben der Sachverhalte mindestens 10 Minuten zur Verfügung gestellt werden.

Hinweise zu möglichen Schülerantworten

Erfahrungen aus den Erprobungen:
- Die Aufgabe hat den Schülern viel Freude bereitet. Die Qualität der Antworten ist oft unterschiedlich. Die meisten Schüler treffen den Sachverhalt, wenige sind falsch oder widersprüchlich. Die Inhalte der Aufgaben waren immer alltagsbezogen z. B. Natur, Technik, Schule, Phantasie.
- Die Formulierungen für die Divisionsaufgabe fiel den Schülern am schwersten.
- Die Aufgabe passt auch gut in höhere Klassenstufen, z. B. Klasse 8 (Struktur und Aufstellen von Termen) oder auch als Wahlaufgabe für stärkere Schüler in der Wochenplanarbeit.

Schülerantworten zu 13 + 17
- Meine Freundin hat 17 neue CDs und ich habe 13. Wie viele haben wir zusammen?
- Auf einem Parkplatz parken 17 Autos. Zwei Stunden später haben sich noch 13 Wagen dazugestellt. Wie viele Autos stehen jetzt auf dem Platz?

Schülerantworten zu 17 – 13
- Ich habe 17 € und will mir eine CD für 13 € kaufen. Wie viel Geld bleibt für Eis übrig?
- Im Hundeheim sind 17 Hunde. 13 werden an neue Besitzer vermittelt. Um wie viele Tiere muss man sich im Heim jetzt noch kümmern?

Schülerantworten zu 3 · 7
- Philipp hat 3 Sparschweine. In jedem sind 7 €. Wie viel Geld hat er insgesamt?
- Ich habe 7 Teddys. Meine Freundin hat 3mal so viele. Wie viele Teddys hat meine Freundin?

Schülerantworten zu 32 : 4
- Jan hat 32 Bonbons. Diese will er mit Lukas, Mehmet und Dominik gerecht teilen. Wie viele Bonbons bekommt jeder?
- Ein Tischler hat ein Brett, das 32 cm lang ist. Er sägt es in vier gleich lange Stücke. Wie lang ist jedes Stück?

Aufgabe 4

Suche dir von den fünf Potenzen zwei heraus und vergleiche sie miteinander.
Finde Gemeinsamkeiten und Unterschiede.

(1) 10^2 (2) 5^2 (3) 10^3 (4) 2^5 (5) 3^2

Rolle der Aufgabe in Lernprozessen

Das Ziel der Aufgabe ist die Festigung der Begriffe Zehnerpotenz, Quadratzahl, Basis, Exponent und Potenz. Die sichere Kenntnis dieser Begriffe ist für den Mathematikunterricht in den oberen Klassen von großer Bedeutung.

Mit dieser Aufgabe können die Schüler auch an einen zentralen Typ polyvalenter Aufgaben, das Vergleichen von Objekten, herangeführt werden, der auf Seite 11 bereits charakterisiert wurde.

Hinweise zum Einsatz der Aufgabe

Die Aufgabe kann in der Klasse 5 in den gemischten Übungen zu Rechenoperationen mit natürlichen Zahlen eingesetzt werden. Sie ist auch in oberen Klassen zur Wiederholung der Begriffe geeignet.

Das Wort "vergleichen" verbinden die Schüler im Mathematikunterricht mit den Relationszeichen. Bei dieser Aufgabe liegt es zudem nahe, die Werte der Potenzen zu berechnen und diese miteinander zu vergleichen. Es hat sich bewährt, das Vergleichen von Objekten vor dem Einsatz der Aufgabe an einem außermathematischen Beispiel zu behandeln, z. B. "Vergleiche zwei Mitschüler miteinander. (Was ist gleich, was ist unterschiedlich?)".

Die Schüler sollen jeweils zwei Potenzen miteinander vergleichen. Eine Tabelle mit der Einteilung in Gemeinsamkeiten/Unterschiede kann die Schüler beim Vergleichen unterstützen. Dabei geht es nicht darum, möglichst viele Paare zum Vergleichen zu finden, sondern die Schüler sollten verschiedene Merkmale eines Paares miteinander vergleichen. Für das Finden von Gemeinsamkeiten und Unterschieden sollten in Einzelarbeit mindestens 5 Minuten pro Paar zu Verfügung stehen.

Leistungsstärkere Schüler können auch mehrere Objekte miteinander vergleichen.

Hinweise zu möglichen Schülerantworten

Analyse der Anforderungen der Aufgabe:

Um Gemeinsamkeiten und Unterschiede von Objekten zu finden, müssen die Schüler über die Merkmale nachdenken, nach denen man die Objekte vergleichen kann. Dies ist eine so genannte Metabetrachtung, die erhöhte Anforderungen an die geistigen Fähigkeiten der Schüler stellt.

In diesem Fall können folgende Merkmale der Objekte betrachtet werden:

– die vorkommenden Ziffern als ein äußeres Merkmal,
– die Zahl (oder die Variable), die die Basis der Potenz ist,
– die Zahl (oder die Variable), die der Exponent der Potenz ist oder
– die Frage, ob es sich um eine besondere Art von Potenzen handelt.

Es können 10 Paare von Ausdrücken gebildet und nach den Gemeinsamkeiten und Unterschieden bzw. nach der Art der genannten Merkmale untersucht werden.

In der folgenden Tabelle werden einige Paare aufgeführt und Gemeinsamkeiten und Unterschiede bezüglich der vier Merkmale genannt

Potenzen	**Gemeinsamkeiten**	**Unterschiede**
(1) und (2)	Es tritt in beiden Potenzen die Zahl 2 jeweils als Exponent auf.	Die Basen sind verschieden. (1) ist eine Zehnerpotenz, (2) ist eine Quadratzahl.
(1) und (3)	Beide haben die Basis 10 und sind Zehnerpotenzen.	Die Exponenten sind verschieden. (1) ist eine Zehnerpotenz.
(1) und (4)	Es kommt in beiden Potenzen die Zahl 2 vor.	Die Basen und Exponenten sind verschieden. (1) ist eine Zehnerpotenz.
(1) und (5)	Beides sind Quadratzahlen.	Die Basen sind verschieden. (1) ist eine Zehnerpotenz.
(2) und (3)	Es gibt keine Gemeinsamkeiten.	Die Basen und Exponenten sind unterschiedlich. (2) ist eine Quadratzahl und (3) ist eine Zehnerpotenz.
(2) und (4)	Es treten in beiden Potenzen die Zahlen 2 und 5 auf.	Basis und Exponent sind vertauscht. (2) ist eine Quadratzahl.

Erfahrungen aus den Erprobungen:

– In vielen Fällen hatten die Schüler Probleme mit der Aufgabenstellung, da sie mit diesem Typ von Aufgaben wenig vertraut waren. Wenn eine entsprechende Vorbereitung erfolgte, wie sie in den Hinweisen zum Einsatz der Aufgabe genannt ist, und an Beispielen das Vorgehen erläutert wurde, war oft ein erstaunlich systematisches Vorgehen der Schüler zu erkennen, das zu sehr vielen Ergebnissen geführt hat.

- In mehreren Fällen haben die Schüler zur Überraschung der Lehrer die vorher eingeführten Fachbegriffe Basis, Potenz oder Exponent nicht verwendet und nur Umschreibungen für diese Merkmale vorgenommen.
- Die Vorgabe einer Tabelle hat sich in allen Fällen bewährt.
- Bei mehreren Erprobung waren die Lehrer überrascht, wie viel Spaß diese Aufgabe den Schülern bereitet und auch die größten "Mathemuffel" ganz eifrig dabei waren.

Weitere Hinweise

Die Aufgabe ist in dieser Form oder auch in abgewandelter Form (z. B. durch Ergänzung weiterer Objekte, zu denen auch Produkte gehören sollten) ebenfalls in oberen Klassen zur Wiederholung und Festigung des Begriffssystems zur Potenz geeignet.

Es für Aufgaben dieser Art immer sinnvoll, dass die Schüler die Merkmale, nach denen die Objekte verglichen werden können, auch mündlich oder schriftlich formulieren. In diesem Fall sollte darauf noch verzichtet werden.

Aufgabe 5

Denke dir zu den angegebenen Informationen Fragen aus, die mit den Daten beantwortet werden können.

- In der Klasse 5a sind 23 Schülerinnen und Schüler und in der Klasse 5b sind es 26.
- Jeder aus der Klasse 5a soll 5 € zum Wandertag mitbringen.
- Im Sportunterricht der Mädchen sollen für einen Wettbewerb Gruppen gebildet werden. Aus der Klasse 5a nehmen 12 Mädchen und aus der Klasse 5b 15 Mädchen teil.

Rolle der Aufgabe in Lernprozessen

Mit der Aufgabe wird das Können der Schüler beim Lösen von Sachaufgaben entwickelt, indem sie daran gewöhnt werden, sich zu Beginn in den Sachverhalt hinein zu versetzen und sich selbst Fragen zum Sachverhalt zu stellen.

Hinweis zum Einsatz der Aufgabe

Die Aufgabe ist in der Klasse 5 zur Wiederholung des Lösens von Sachaufgaben geeignet.
Die Aufgabe kann in Einzelarbeit, aber auch in Partner- oder Gruppenarbeit gelöst werden.
Es hat sich bewährt, dass die Schüler ihre formulierten Aufgaben auf Karten bzw. Folienstreifen aufschreiben und dann an der Tafel oder mittels Projektor präsentieren können.
Die formulierten Aufgaben sollten in der Stunde selbst nicht gelöst werden, dies kann zu einem späteren Zeitpunkt erfolgen.
Die Schüler sollten motiviert werden, möglichst mehrere Fragen zu finden.
Da mit den gegebenen Informationen die Anzahl der Fragen schnell erschöpft war, haben einige Lehrer noch Zusatzinformationen hinzugefügt, so dass noch mehr Fragen gefunden werden. Für die selbstständige Schülerarbeit sollten 15 Minuten zur Verfügung stehen.

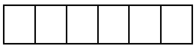
Hinweise zu möglichen Schülerantworten

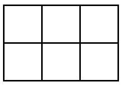
Erfahrungen aus den Erprobungen:
Typische Fragestellungen der Schüler waren:

- Wie viele Schüler sind es insgesamt?
- Wie viele Schüler sind in der Klasse 5b mehr als in der Klasse 5a?
- Wie viel Geld wurde eingesammelt?
- In wie viele Gruppen kann man die Mädchen einteilen, damit keines mehr übrig bleibt?

Aufgabe 6

Arne hat zwei Rechtecke aus sechs quadratischen Kästchen zusammengelegt.





Zeichne ein Rechteck, das aus folgenden Anzahlen quadratischer Kästchen zusammengelegt ist.

a) 12 Kästchen b) 13 Kästchen c) 14 Kästchen

Rolle der Aufgabe in Lernprozessen

Mit der Aufgabe können die Kenntnisse der Schüler zum Flächeninhalt von Rechtecken gefestigt werden, die zum sicheren Wissen und Können gehören. Es wird dabei sowohl an die Bestimmung des Flächeninhalts sowohl durch Auslegen als auch durch Berechnen des Produktes der Seitenlängen angeknüpft.

Die Aufgabe kann weiterhin in den Prozess der Entwicklung der Kenntnisse zum Begriff Primzahl eingeordnet werden, der allerdings nur eine lokale Bedeutung im Stoffgebiet Teilbarkeit hat.

Es wird weiterhin die Fertigkeit im Zerlegen von Zahlen in Produkte gefestigt, die eine notwendige Handlung für die Entwicklung von Rechenfertigkeiten darstellt.

Die Aufgabe führt weiterhin zu Betrachtungen der Kommutativität von Faktoren aus innermathematischer und außermathematischer Sicht.

Hinweise zum Einsatz der Aufgabe

Die Aufgabe kann zur Erarbeitung bzw. zur Festigung des Begriffs Primzahl eingesetzt werden. Es sollten alle drei Teilaufgaben gleichzeitig bearbeitet werden, um dann die Unterschiede in der Präsentation herausarbeiten zu können. Die Aufgabe kann auch in arbeitsteiliger Gruppenarbeit erledigt werden.

Die Schüler sollten die Rechtecke auf kariertem Papier zeichnen, wobei nur der Rand gezeichnet werden sollte. Für die Präsentation der Ergebnisse eignet sich eine Tafel mit untergelegtem Karomuster, eine Folie oder eine interaktive Tafel.

Für das Zeichnen der verschiedenen Rechtecke sollten für den Schüler in der Einzelarbeit 10 Minuten zur Verfügung stehen. Ziel dieser Phase sollte es nicht sein, dass ein Schüler oder eine Schülergruppe alle Möglichkeiten findet.

Hinweise zu möglichen Schülerantworten

Analyse der Anforderungen der Aufgabe:

Die Schüler müssen die Zahlen in ein Produkt aus zwei Faktoren zerlegen. Die Tabelle enthält die dabei möglichen Zerlegungen:

	a)						b)		c)			
Länge	1	12	2	6	3	4	1	13	1	14	2	7
Breite	12	1	6	2	4	3	13	1	14	1	7	2

Es ergibt sich die Frage, ob zwei Rechtecke als gleich angesehen werden können, wenn man die Länge und Breite vertauscht, bzw. aus geometrischer Sicht das Rechteck um 90° dreht. Diese Frage kann aus unterschiedlichen Perspektiven beantwortet werden. Geht es nur um die Berechnung des Flächeninhalts, so sind beide Figuren als gleich anzusehen. Spielt die Lage von Figuren eine Rolle, wie etwa bei den geometrischen Abbildungen, so sind die Figuren unterschiedlich (Eine Figur kann das Original und die andere das Bild bei einer Drehung sein). Außermathematisch ist es analog: wenn es nur um den Inhalt einer Fläche geht, spielt die Lage keine Rolle. Wenn die rechteckige Fläche selbst betrachtet wird (etwa ein Fenster) ist es durchaus von Bedeutung, was die Länge und was die Breite des betreffenden rechteckförmigen Objektes ist.

Die unterschiedliche Qualität der Antworten zeigt sich in der Anzahl der gefundenen Lösungen, dem Finden der maximalen Zahl der Möglichkeiten und den entwickelten Gedanken zur weiterführenden Frage: "Wann sind zwei Rechtecke verschieden?"

Aufgabe 7

Gib eine dreistellige Zahl an, die durch 3 teilbar ist.

Rolle der Aufgabe in Lernprozessen

Diese Aufgabe ist eine Umkehraufgabe zur Teilbarkeitsregel für die Zahl 3, die dadurch gefestigt werden kann. Mit der Aufgabe wird gleichzeitig der Begriff Quersumme gefestigt. Die Kenntnis dieser Teilbarkeitsregel und des Begriff Quersumme ist nur im Stoffgebiet Teilbarkeit von Bedeutung.

Mit dieser Aufgabe kann die Freude der Schüler am Umgang mit natürlichen Zahlen und am systematischen Bestimmen kombinatorischer Möglichkeiten entwickelt werden.

Hinweise zum Einsatz der Aufgabe

Die Aufgabe kann zur Erarbeitung der Teilbarkeitsregel für die Zahl 3 eingesetzt werden. Dazu müsste vorher die schriftliche Division einer mehrstelligen Zahl durch eine einstellige Zahl wiederholt werden. Durch Analyse der Gemeinsamkeiten der von den Schülern ermittelten Zahlen kann im Rahmen der Präsentation die Teilbarkeitsregel gefunden werden.
Zu empfehlen ist allerdings der Einsatz der Aufgabe nach Erarbeitung der Teilbarkeitsregel für die Zahl 3. Für die Bearbeitung der Aufgabe sollten den Schülern mindestens 10 Minuten zur Verfügung gestellt werden.

Hinweise zu möglichen Schülerantworten

Analyse der Anforderungen der Aufgabe:
Die Schüler müssen Zahlen finden, deren Quersumme 3 ist. Dabei können sie u. a. auf folgende Spezialfälle stoßen:

- drei gleiche Ziffern, die durch 3 teilbar sind: 333; 666; 999
- drei Ziffern, die alle durch 3 teilbar sind: z. B. 369; 663; 993
- drei aufeinander folgende Ziffern: z. B. 123; 345; 789
- alle Ziffern lassen den Rest 1 bei der Division durch 3: z. B. 147; 714
- alle Ziffern lassen den Rest 2 bei der Division durch 3: z. B. 258; 582
- eine Ziffer ist durch 3 teilbar, die anderen nicht: z. B. 372; 618

Antworten mit höherem Niveau: Schüler könnten auch herausfinden, welche Fälle nicht möglich sind (z. B. 2 Ziffern durch 3 teilbar, eine nicht) und wie viele Zahlen es insgesamt gibt. (300)

Aufgabe 8

poly ☑ alent

Gib zwei Zahlen an, deren kgV 30 ist.

Rolle der Aufgabe in Lernprozessen

Die Aufgabe dient – als Umkehraufgabe– dem Ausbilden von Fertigkeiten im Ermitteln des kgV. Diese Fertigkeiten sind für das Rechnen mit Brüchen von großer Bedeutung, da beim Vergleichen und Addieren von Brüchen der Hauptnenner als kgV der einzelnen Nenner bestimmt werden muss. Wenn im Rahmen der Teilbarkeit das Bestimmen des kgV bereits als Fertigkeit ausgebildet wird, kann dies als elementare Handlung beim Rechnen mit Brüchen vorausgesetzt werden.

Das Bestimmen des kgV bzw. des Hauptnenners sollte nicht über die Primfaktorenzerlegung, sondern über das Vervielfachen der größeren Zahl erfolgen. Die Kenntnis der Sonderfälle (die Nenner sind teilerfremd bzw. ein Nenner ist Teiler des anderen), die bei der Behandlung dieser Aufgabe ebenfalls eine Rolle spielen, sollte nicht zum sicheren Wissen und Können gehören.

Hinweise zum Einsatz der Aufgabe

Die Aufgabe ist zur Festigung des Verfahrens zum Bestimmen des kgV geeignet.
Für die Schüler sollte in Einzelarbeit 5 Minuten Zeit sein.

Hinweise zu möglichen Schülerantworten

Analyse der Anforderungen der Aufgabe:

Die Schüler können aufgrund ihrer Kenntnisse zum Bestimmen des kgV durch Probieren auf Lösungen kommen. Dazu müssen sie wissen, dass nur Zahlen oder Vielfache von Zahlen infrage kommen, die Teiler der Zahl 30 sind.

Es sind folgende Überlegungen eines Schülers auf höherem Niveau möglich:
Wie viele Zahlenpaare gibt es? Welche Besonderheiten/Sonderfälle treten auf? Kann man die Lösungen in Gruppen einteilen?
Antworten zu diesen Überlegungen können sein:

1. Fall: Beide Zahlen sind teilerfremd, d. h. ihr Produkt ist 30.
2. Fall: Eine Zahl ist 30 und die andere ein Teiler von 30.
3. Fall: Die Zahlen sind nicht teilerfremd, keine Zahl ist 30 (oder keine ist Teiler der anderen).

	1. Fall			2. Fall							3. Fall		
1. Zahl	5	3	2	1	2	3	5	6	10	15	6	6	10
2. Zahl	6	10	15	30	30	30	30	30	30	30	15	10	15

Aufgaben zu natürlichen Zahlen

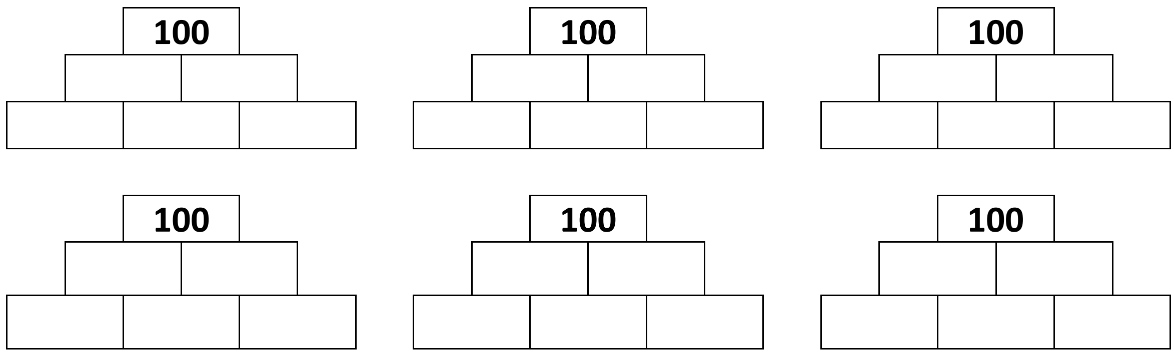
E1: Roy liest in der Zeitung: "In der neuen Konzerthalle gibt es 84 Reihen mit je 72 Plätzen."
Stelle dir dazu eine Frage und beantworte sie.

E2: Für eine Urlaubsreise plant Familie Krajewski 380 € Benzinkosten, 970 € für die Unterkunft, 400 € für Verpflegung und 270 € für Ausflüge. In der Urlaubskasse sind 1800 €.

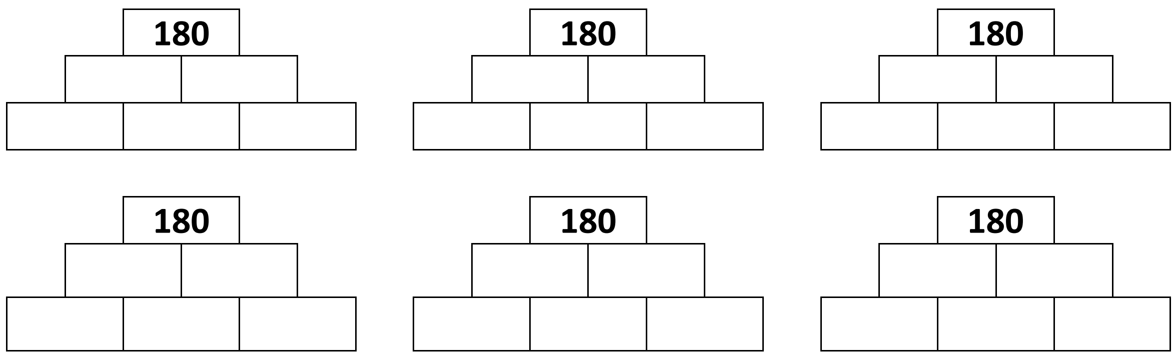
---

1. In einer Zahlenmauer ist eine Zahl (bis auf die Zahlen der untersten Reihe) immer die Summe bzw. das Produkt der beiden darunter stehenden Zahlen.
Baue selbst verschiedene Zahlenmauern.

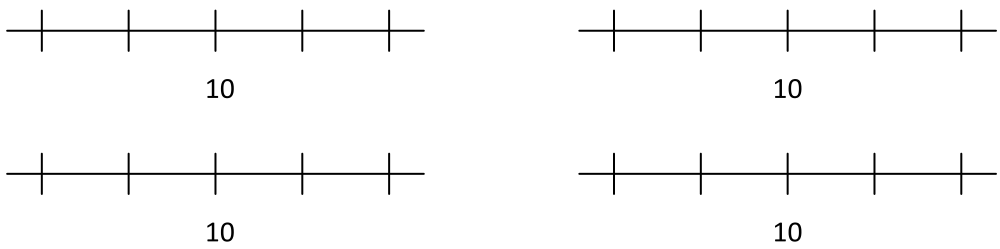
a) Die Zahl 100 wird durch Addieren erreicht.



b) Die Zahl 180 wird durch Multiplizieren erreicht.



2. Beschrifte die Markierungen der Skalen.



3. Erfinde zu jeder Rechnung eine interessante Sachaufgabe und schreibe sie auf.

a) 13 + 17
b) 17 – 13
c) $3 \cdot 7$
d) 32 : 4

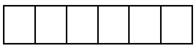
4. Suche dir von den fünf Potenzen je zwei heraus und vergleiche sie miteinander.
Finde Gemeinsamkeiten und Unterschiede.

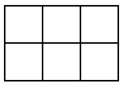
(1) 10^2 (2) 5^2 (3) 10^3 (4) 2^5 (5) 3^2

5. Denke dir zu den angegebenen Informationen Fragen aus, die mit den Daten beantwortet werden können.

- In der Klasse 5a sind 23 Schülerinnen und Schüler und in der Klasse 5b sind es 26.
- Jeder aus der Klasse 5a soll 5 € zum Wandertag mitbringen.
- Im Sportunterricht der Mädchen sollen für einen Wettbewerb Gruppen gebildet werden. Aus der Klasse 5a nehmen 12 Mädchen und aus der Klasse 5b 15 Mädchen teil.

6. Arne hat zwei Rechtecke aus sechs quadratischen Kästchen zusammengelegt.





Zeichne ein Rechteck, das aus folgenden Anzahlen quadratischer Kästchen zusammengelegt ist.

a) 12 Kästchen b) 13 Kästchen c) 14 Kästchen

7. Gib eine dreistellige Zahl an, die durch 3 teilbar ist.

8. Gib zwei Zahlen an, deren kgV 30 ist.

4 Gebrochene Zahlen

Hinweise zu den Aufgaben

Aufgabe 1

Finde Gemeinsamkeiten und Unterschiede bei den folgenden Brüchen:

$\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{6}{2}, \frac{3}{8}, \frac{7}{5}, \frac{2}{2}$ und $\frac{2}{8}$.

Rolle der Aufgabe in Lernprozessen

Mit der Aufgabe können die Kenntnisse der Schüler zum formalen Umgang mit Brüchen, insbesondere zu den Objektbegriffen "Zähler", "Nenner", "Bruchstrich", "echter Bruch" und "unechter Bruch", zu den Relationsbegriffen "gleichnamige Brüche" und "ungleichnamige Brüche" sowie weiterhin zu den Beziehungen von Brüchen zu natürlichen Zahlen entwickelt werden.

Neben diesen Bedeutungsaspekten des Bruchbegriffs sollten noch zahlreiche weitere inhaltliche Aspekte in der Phase der Einführung des Bruchbegriffs thematisiert werden[8].

Hinweise zum Einsatz der Aufgabe

Die Schüler sollten mit der für polyvalente Aufgaben typischen Aufgabenstellung, Gemeinsamkeiten und Unterschiede bei vorgegebenen Objekten zu finden, vertraut sein. Zur Berücksichtigung dieser Problematik ist es sowohl möglich, den Schülern die Aufgabe kommentarlos zu übergeben, als auch eine vorherige gemeinsame begriffliche Vorbereitung für "gemeinsame und unterschiedliche Eigenschaften" vorzunehmen.

Die Aufgabe ist vor allem zur komplexen Festigung der Kenntnisse zu den Begriffen geeignet, kann aber auch zur Erarbeitung der Begriffe "echter Bruch" und "unechter Bruch" eingesetzt werden.

Die Aufgabe sollte vor der Behandlung des Erweiterns und Kürzens eingesetzt werden. Leistungsstarke Schüler können die Äquivalenz von $\frac{1}{4}$ und $\frac{2}{8}$ anschaulich erfassen.

Weitere Hinweise:

– Die Aufgabe eignet sich sowohl für die Einzelarbeit als auch für die Arbeit in kleinen Gruppen, die entweder vom gleichem Leistungsniveau oder eine Gruppenmischung zwischen leistungsstärkeren und leistungsschwächeren Schülern sein können. Das Lösen der Aufgabe in Partnerarbeit wäre auch möglich.
– In jedem Fall sollte zunächst eine Phase der Einzelarbeit erfolgen, in der die Schüler ihre eigenen Lösungsgedanken aufschreiben. Diese können sie dann in einer Gruppe austauschen und eine gemeinsame Lösung finden, die dann vor der Klasse präsentiert wird.
– Die Präsentation kann von den leistungsschwächeren Gruppen begonnen werden und die leistungsstärkeren Gruppen ergänzen die Ausführungen.
– Bei der Präsentation besteht die Gefahr, dass die Aufmerksamkeit der Schüler nachlassen kann. Dem kann man entgegenwirken, indem die Schüler angehalten werden, ihre Ideen mit denen der Mitschüler zu vergleichen und Übereinstimmungen zu kennzeichnen.
– Zur Ergebnissicherung können die wichtigsten Fakten von der gesamten Klasse in die Hefter übernommen werden.
– Zeit für selbstständige Schülerarbeit: 10 – 15 min

Hinweise zu möglichen Schülerantworten

Bei einem Einsatz der Aufgabe zur Erarbeitung der Begriffe echter und unechter Bruch traten Schülerantworten auf wie: "Es sind (z. B. $\frac{1}{4}$) wahre/richtige Brüche." oder "$\frac{7}{5}$ geht nicht."

[8] Vgl. Broschüre "Sicheres Wissen und Können im Rechnen mit Zahlen und Größen", Schwerin 2009, S. 21

In anderen Erprobungen traten zum einen Schülerantworten der folgenden Art auf: "Die Nenner sind gleich groß.", "Die Zähler sind gleich groß.", "Der Zähler ist größer/kleiner als der Nenner." Es erfolgte bei einigen Schülern auch eine zutreffende Anwendung der Fachbegriffe "echter Bruch", "unechter Bruch" sowie "gleichnamige und ungleichnamige Brüche".
Mögliche Aussagen sind:

- Bei den Brüchen $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{2}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{5}$ sind die Nenner unterschiedlich. Die Brüche $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$ sowie $\frac{2}{8}$ und $\frac{3}{8}$ haben jeweils die gleichen Nenner.
- Die Brüche $\frac{3}{4}$ und $\frac{3}{8}$ haben die gleichen Zähler, bei anderen Brüchen sind die Zähler verschieden.
- $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{8}$ sind echte Brüche, der Zähler ist bei diesen Brüchen kleiner als der Nenner.
- $\frac{6}{2}$ und $\frac{7}{5}$ sind unechte Brüche, ihr Zähler ist größer als der Nenner, die Brüche sind größer als 1.
- Der Bruch $\frac{6}{2}$ stellt eine natürliche Zahl dar. Er hat den gleichen Wert wie die Zahl 3.
- Die Brüche $\frac{1}{4}$ und $\frac{2}{8}$ haben den gleichen Wert.
- Weitere Merkmale:
    - Die Unterschiede zwischen Zähler und Nenner sind gleich.
    - Die Zähler/Nenner sind gerade/ungerade Zahlen.
    - Der Nenner ist ein Vielfaches des Zählers.

Weitere Hinweise
In dieser Altersgruppe besteht die Gefahr, bei Verwendung anderer Wortformulierungen neue Ideen zu vermuten. Diesen Störfaktor sollte man durch vorherige Übungen mindern.
Zur Unterstützung der Präsentationen trägt die Vorgabe eines Tabellenkopfes bei. Er erleichtert den Schülern die entsprechenden Zuordnungen.

Aufgabe 2

Falte ein quadratisches Stück Papier (z. B. einen quadratischen Notizzettel) so, dass du mithilfe der entstandenen Faltkanten $\frac{3}{4}$ des Papiers färben kannst.

poly☑alent

Rolle der Aufgabe in Lernprozessen

Der Bruch $\frac{3}{4}$ ist der "einfachste" Bruch, der keinen Sonderfall darstellt (wie $\frac{1}{2}$) und leicht in einen Dezimalbruch überführt werden kann. Er sollte deshalb als Prototyp für einen Bruch beim Schüler entwickelt werden, d. h. wenn das Wort "Bruch" genannt wird, sollte ein Schüler als erstes an den Bruch $\frac{3}{4}$ denken. Mit diesem Prototyp sollten reichhaltige Vorstellungen verbunden sein. Dazu gehören auch visuelle Repräsentationen zum Bedeutungsaspekt "Bruch als Teil eines Ganzen", die mit dieser Aufgabe in nachhaltiger Weise ausgebildet werden können.

Weiterhin können mit der Aufgabe die Begriffe Zähler und Nenner gefestigt und das Erweitern und Kürzen von Brüchen vorbereitet bzw. gefestigt werden.

Hinweise zum Einsatz der Aufgabe
Die Aufgabe hat sich bei zahlreichen Erprobungen als eine Aufgabe erwiesen, die allen Schüler viel Freude bereitete und sie zu vielen Ideen anregte, die die Lehrer oft in Erstaunen versetzten.

- Die Schüler sollten Vorkenntnisse über den Begriff "Quadratisch" haben und wissen, dass es sich beim Bruch $\frac{3}{4}$ wie bei einer Pizza um 3 von 4 gleichen Teilen handelt. Bei der Suche nach verschiedenen Möglichkeiten sollten sie erkennen, dass durch mehrfaches Falten genauso 6 von 8 gleichen Teilen markiert werden können, um so den Bruch $\frac{3}{4}$ darstellen zu können.
- Es muss eine ausreichende Anzahl von "Notizzetteln" bereitgestellt werden, da Schüler sehr viele Ideen entwickeln können.
- Der gleiche Bruch repräsentiert gleich große Flächen unterschiedlicher Gestalt.

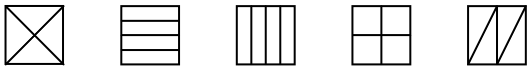
- Die gleiche Fläche kann verschiedenen Bruchdarstellungen zugeordnet werden.
- Lösungsvarianten können an der Tafel dargestellt werden, wobei schon Quadrate an der Tafel vorbereitet sind.
- Möglich wäre auch eine Gruppenbildung nach der Einzelarbeit, wobei dann alle möglichen Ergebnisse der Gruppe auf einem Plakat dargestellt werden können.
- Eine weitere Möglichkeit wäre die Arbeit in Gruppen. Die Einteilung kann nach Zufallsprinzip wie durch das Ziehen von Karten oder durch das selbstständige Wählen der Gruppen erfolgen.
  Die Aufgabenstellung kann auf einem Arbeitsblatt gestellt werden. Material wie Notizzettel, A3-Papier, Kleber und Filzstifte werden bereitgestellt.

Zeiteinteilung:	10 min	organisatorische Vorbereitung,
	15 min	Einzelarbeit – finden von verschiedenen Faltmöglichkeiten,
	15 min	Gruppenarbeit – Austausch der Ergebnisse und Finden der gemeinsamen Varianten,
	30 min	Gestalten des Plakates,
	15 min	Präsentation der Plakate, Aufhängen im Klassenraum.

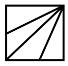
- Arbeitszeit 90 min

Hinweise zu möglichen Schülerantworten

- Die Schüler können das Papier in verschiedener Weise falten, so dass 4 gleiche Teile entstehen. Es ist jeweils möglich (zumindest theoretisch), noch weiter zu falten, so dass 8 (16, …) gleiche Teile entstehen.



- Es entstanden auch "ausgefallene Lösung" z. B.



- Die Kennzeichnung von $\frac{3}{4}$ kann ebenfalls in verschiedenen Varianten erfolgen.
- Eine Differenzierung ergibt sich aus der Anzahl der gefundenen Falt- und Färbemöglichkeiten.

Weitere Hinweise

Die Aufgabe erzielt eine gute Motivation für leistungsschwächere Schüler. Die Faltaufgabe ist eine gute Voraussetzung für das Erweitern und Kürzen von Brüchen.

Aufgabe 3

Finde verschiedene Erklärungen dafür, dass $\frac{1}{4}$ kleiner als $\frac{1}{3}$ ist.

Rolle der Aufgabe in Lernprozessen

Es können verschiedene Bedeutungsaspekte des Bruchbegriffs gefestigt werden. Die Aufgabe erfordert Überlegungen zur Verwendung von Brüchen im täglichen Leben. Erworbenes Wissen zum Begriff Bruch in seiner Vielfalt kann angewendet werden, ebenfalls das Vergleichen und Erweitern von Brüchen. Mit dieser einprägsamen Aufgabe kann Fehlvorstellungen über die Ordnung von Brüchen entgegengewirkt werden.

Hinweise zum Einsatz der Aufgabe

Die Aufgabe sollte in der Phase der Einführung des Bruchbegriffs, d. h. vor der Behandlung des Gleichnamigmachens und Vergleichens ungleichnamiger Brüche eingesetzt werden.

- Mögliche Sozialformen: Einzelarbeit, Partner- oder Gruppenarbeit.
- Möglicher Ablauf:
  1. ca. 5 min Einzelarbeit (Jeder für sich findet verschiedene Erklärungen.)
  2. ca. 5 min Partner- oder Gruppenarbeit (Austausch der Ergebnisse in der Gruppe, Einigung auf gemeinsame Ergebnisse),
  3. anschließend ca. 10 min Präsentation der Gruppenergebnisse.

Hinweise zu möglichen Schülerantworten

– Vergleich durch Veranschaulichung der Brüche im Bild (z. B. im Rechteck 3 cm mal 4 cm), Auszählen der "kleinen Quadrate"
– Betrachtungen zur Veränderung des Nenners: Je kleiner der Nenner, desto größer ist der Bruch
– Vergleich durch Berechnung als Teile von Ganzen (z. B. $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{3}$ von 12 kg)
– Vergleich durch Darstellung auf dem Zahlenstrahl
– Vergleich von $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{3}$ Liter Wasser, eventuell auch durch Abfüllen im Messbecher
– Vergleich über die Vorstellung einer Torte bzw. der Pizza
– Vergleich durch das Erweitern beider Brüche auf gleiche Nenner (z. B. $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$, $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$, $\frac{3}{12} < \frac{4}{12} \Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{1}{3}$)

Weitere Hinweise

Diese Aufgabe bietet sich auch zum Einsatz in der Freiarbeit/Stationsarbeit an. Sie kann Teil einer komplexen Übung zum Bruchbegriff sein.
Folgende Arbeitsmittel sollten bereitgestellt werden: Messbecher, Papier, Schere, Kreisvorlagen mit Winkelkennzeichnung am Rand. Eventuell ist auch ein Pizzaessen möglich.

Aufgabe 4

a) Gib Brüche an, deren Summe 1 ergibt.
b) Gib Brüche an, deren Summe 2 ergibt.

poly alent

Rolle der Aufgabe in Lernprozessen

Die Aufgabe ist eine Umkehraufgabe zur Addition gleichnamiger Brüche, wobei im Ergebnis auch Summen ungleichnamiger Brüche entstehen können. Sie ist für die Entwicklung von Fertigkeiten im Addieren von Brüchen ein notwendiger Aufgabentyp.
Bei Aufgabe a) treten nur echte Brüche auf, bei Aufgabe b) können die Summanden auch unechte Brüche sein.
Im Laufe der Berechnungen müssen natürliche Zahlen in Summen zerlegt werden. Dies ist für die Entwicklung von Rechenfertigkeiten im Bereich der natürlichen Zahlen ein notwendiger Aufgabentyp.

Hinweise zum Einsatz der Aufgabe

Die Aufgabe kann bereits nach Einführung der Addition gleichnamiger Brüche, aber auch nach Einführung der Addition ungleichnamiger Brüche eingesetzt werden.
– Mögliche Sozialformen: Einzelarbeit, Partner- und Gruppenarbeit
– Möglicher Ablauf: s. Aufgabe 3
– Arbeitszeit: insgesamt ca. 20 min

Hinweise zu möglichen Schülerantworten

Analyse der Anforderungen:
– Im einfachsten Fall erfolgt bei a) und b) eine Zerlegung in zwei Brüche mit gleichem Nenner, z. B. $\frac{3}{5}+\frac{2}{5}$ bzw. $\frac{3}{5}+\frac{7}{5}$. Dazu muss (in Umkehrung der Handlungen beim Addieren gleichnamiger Brüche) die Zahl 1 bzw. 2 als Bruch geschrieben, der Zähler in geeigneter Weise zerlegt und dann eine Summe von Brüchen gebildet werden: z. B. $1=\frac{12}{12}=\frac{7+5}{12}=\frac{7}{12}+\frac{5}{12}$.
– Es gibt eine unendliche Anzahl möglicher Lösungen, die allgemein mithilfe von Variablen in folgender Form dargestellt werden können:
$1 = \frac{z}{n}+\frac{n-z}{n}$ bzw. $2 = \frac{z}{n}+\frac{2n-z}{n}$, wobei n und z natürliche Zahlen mit n > z > 0 sind.

Nach der Aufgabenstellung ist auch eine Zerlegung in drei und mehr Summanden möglich, wobei im Ergebnis dann auch ungleichnamige Brüche auftreten können.

Beispiele: $1 = \frac{12}{12} = \frac{3+4+5}{12} = \frac{3}{12} + \frac{4}{12} + \frac{5}{12} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{5}{12}$

$1 = \frac{12}{12} = \frac{2+3+3+4}{12} = \frac{2}{12} + \frac{3}{12} + \frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3}$

Die unterschiedliche Qualität der Schülerantworten zeigt sich in der Zahl der gefundenen Lösungen, in der Betrachtung von Sonderfällen (Ein Summand ist 0. Ein Summand ist 1.), in der Betrachtung von mehr als zwei Summanden oder allgemeinen Betrachtungen zur Lösungsmenge.

Weitere Bemerkungen
Bei den Lösungen mit mehreren Summanden lassen sich zahlreiche besondere Fälle und Muster unterscheiden. Ein besondere Fall, der auch kulturhistorisch von Bedeutung ist (In der ägyptischen Mathematik wurde nur mit Stammbrüchen gerechnet.), ist eine Zerlegung in eine Summe von Brüchen, die alle den Zähler 1 haben, z. B. $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$.

Aufgabe 5

Stelle die gebrochene Zahl $\frac{3}{4}$ als Produkt zweier Brüche dar.

Rolle der Aufgabe in Lernprozessen
Diese Umkehraufgabe zur Multiplikation von ungleichnamigen Brüchen dient der Ausbildung sicherer Fertigkeiten im Multiplizieren zweier Brüche und ist ein notwendiger Aufgabentyp zur Entwicklung dieser Fertigkeiten. Insbesondere geht es um das Kürzen beim Multiplizieren zweier Brüche.

Trotz der Bedeutung des Aufgabentyps geht es nicht um die Entwicklung eines Können im Lösen solcher Aufgaben, es ist lediglich ein Mittel zur Entwicklung der Fertigkeiten im Multiplizieren von Brüchen.

Mit der Aufgabe wird weiterhin das Können im Erweitern von Brüchen, im Schreiben von natürlichen Zahlen als Bruch und im Vertauschen der Reihenfolge von Faktoren (Assoziativgesetz der Multiplikation) gefestigt.

Hinweise zum Einsatz der Aufgabe
Die Aufgabe sollte bei der Behandlung der Multiplikation gemeiner Brüche eingesetzt werden. Neben der Angabe der Lösungen sollte auch der Weg zum Finden der Lösungen vorgetragen werden. Es lassen sich leicht einfache Lösungen finden. Es gibt aber auch mehrere anspruchsvolle Wege zum systematischen Finden von Lösungen, die nicht alle in der Präsentation besprochen werden können.

Hinweise zu möglichen Schülerantworten
Analyse der Anforderungen:
Zu a):

– Es kann zunächst versucht werden, Zähler und Nenner in ein Produkt zweier natürlicher Zahlen zu zerlegen, was für den Zähler nur unter Nutzung des Sonderfalls 3 = 3 · 1 möglich ist. Für den Nenner sind folgende Zerlegungen möglich: 4 = 2 · 2 = 4 · 1. Daraus ergeben sich durch Umkehrung der Handlungsfolge zur Multiplikation zweier Brüche und der Vertauschung der Faktoren folgende Lösungen:
  $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}$ $\quad$ $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 1} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1} = \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{4}$
– Aus diesen Lösungen können viele weitere gefunden werden, in dem einer der Faktoren oder beide mit einer beliebigen Zahl erweitert werden, z. B.: $\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{6}{4} \cdot \frac{7}{14}$.

- Durch Umkehrung des Kürzens beim Multiplizieren als letzten Schritt der Handlungsfolge kann die Idee entstehen, im Zähler und Nenner den gleichen Faktor einzufügen, woraus sich z. B. folgende Lösung ergibt: $\frac{3}{4}=\frac{3\cdot 7}{7\cdot 4}=\frac{3}{7}\cdot\frac{7}{4}$
- In Fortführung dieser Idee kann man sich die Faktoren 3 und 4 auch als Ergebnis eines Kürzens vorstellen, woraus nach geeigneter Zusammenfassung der Faktoren z. B. folgende Lösungen entstehen können. $\frac{3}{4}=\frac{3\cdot 5\cdot 7}{7\cdot 4\cdot 5}=\frac{15}{7}\cdot\frac{7}{20}=\frac{21}{4}\cdot\frac{5}{35}$
- Zu gleichen Resultaten wie die bisherigen Ideen führt die Idee, den Bruch $\frac{3}{4}$ vor seiner Zerlegung erst zu erweitern und dann auch durch Vertauschung der Reihenfolge der Faktoren im Zähler und Nenner eine Zerlegung in ein Produkt zwei Brüche vorzunehmen.

  z. B. $\frac{3}{4}=\frac{3\cdot 2}{4\cdot 2}=\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{2}$ $\qquad$ $\frac{3}{4}=\frac{3\cdot 5\cdot 7}{4\cdot 5\cdot 7}=\frac{3}{20}\cdot\frac{35}{7}$
- Jeder Schüler sollte mindestens 2 Lösungen finden. Die unterschiedliche Qualität der Antworten zeigt sich in der Anzahl der gefundenen Ideen und Lösungen sowie in der Berücksichtigung von Sonderfällen.

Aufgabe 6

Es sind 16 mit Zahlen bedruckte Karten ausgelegt. Bilde Rechenaufgaben nach den angegebenen Regeln, die das folgende Ergebnis haben.

a) 1 $\qquad$ b) 2 $\qquad$ c) $\frac{1}{4}$ $\qquad$ d) $\frac{5}{2}$

Rolle der Aufgabe in Lernprozessen

Die Aufgabe fördert Fertigkeiten im sicheren Rechnen mit natürlichen Zahlen und mit Brüchen. Weiterhin wird das Können im Arbeiten mit Termstrukturen gefestigt.

Die Aufgabe ist eine Umkehraufgabe, bei der zu gegebenen Zahlen und einem gegebenen Ergebnis die Rechenoperationen bzw. eine geeignete Struktur des Rechenausdrucks gesucht werden.

Hinweise zum Einsatz der Aufgabe

- Die Aufgabe sollte in gemischten Übungen am Ende des Stoffgebiete zur Bruchrechnung eingesetzt werden.
- Den Schülern oder Schülergruppen sollten nach Möglichkeit in der Phase der selbstständigen Arbeit die 16 Karten in die Hand gegeben werden.
- Für die Präsentation der Ergebnisse der Schüler sollte ein entsprechender Satz von Applikationen für die Tafel vorhanden sein.
- Es sollte jeweils nur eine Teilaufgabe bearbeitet werden.
- Zeit für die selbstständige Arbeit: 10 - 15 min

Hinweise zu möglichen Schülerantworten

- Zu dem Ergebnis 1 sind unter anderem folgende Terme möglich:

  3 – 2 (zweimal) $\quad$ 2 – 1 $\quad$ $2\cdot\frac{1}{2}$ $\quad$ $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ $\quad$ $\frac{1}{2}:\frac{1}{2}$ $\quad$ $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 4$ $\quad$ $(3+1)\cdot\frac{1}{4}$
- Folgende Terme haben das Ergebnis 2:

  4 – 2 $\quad$ 4 : 2 $\quad$ 8 : 4 $\quad$ $1:\frac{1}{2}$ $\quad$ $\frac{1}{2}:\frac{1}{4}$ $\quad$ $4\cdot\frac{1}{2}$ $\quad$ $8-3\cdot\frac{1}{2}\cdot 4$
- Die Schülerantworten können sich unterscheiden durch die Wahl der Operanden (Natürliche Zahlen oder gemeine Brüche), die Wahl der Rechenoperationen (z. B. Addition, Division durch

gemeine Brüche, Potenzieren), die Zahl der verwendeten Operanden in den Aufgaben und die Zahl der gefundenen Aufgaben.
- Weitere mögliche Ergebnisse, zu denen sich mehrere Aufgaben bilden lassen, sind z. B. 0; 4; 6; 8, 9; $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{2}$, 24, 36.

Weitere Bemerkungen

Eine analoge Aufgabe dieses Typs, mit der ebenfalls die Kreativität der Schüler im Finden von Rechenausdrücken unterschiedlicher Struktur entwickelt werden kann, ist das "Spiel 40", bei dem die Schüler aus den vier Zahlen, die sich beim gleichzeitigen Würfeln mit vier Würfeln ergeben haben, die Zahl 40 errechnen sollen.

Aufgabe 7

Bilde eine Rechenoperation mit zwei Brüchen, die das Ergebnis $\frac{5}{8}$ hat.

Rolle der Aufgabe in Lernprozessen

Diese Aufgabe dient der Entwicklung sicherer Fertigkeiten im Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren von einfachen Brüchen.

Hinweise zum Einsatz der Aufgabe

- Die Aufgabe sollte in gemischten Übungen nach Behandlung aller vier Rechenarten mit gleichnamigen Brüchen eingesetzt werden.
- Arbeitszeit 10 min

Hinweise zu möglichen Schülerantworten

- Lösungen sind z. B.: $\frac{3}{8}+\frac{1}{4}=\frac{5}{8}$ $\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4}=\frac{5}{8}$ $\frac{5}{3}:\frac{8}{3}=\frac{5}{8}$ $\frac{9}{8}-\frac{1}{2}=\frac{5}{8}$
- Jeder Schüler sollte mindestens vier Lösungen finden. Die unterschiedliche Qualität der Antworten zeigt sich in der Anzahl der gefundenen Lösungen und der unterschiedlichen Verwendung der verschiedenen Rechenoperationen.

Weitere Bemerkungen

Für leistungsstarke Schüler kann die Aufgabe auf das Bilden eines Terms aus drei Brüchen erweitert werden. Weiterhin können auch gemischte Zahlen zugelassen werden.

Aufgabe 8

Finde Begründungen für die Richtigkeit der folgenden Gleichung:

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=1\frac{1}{4}.$$

Rolle der Aufgabe in Lernprozessen

Mit dieser Aufgabe können zum einen die Kenntnisse zum Rechnen mit Brüchen und zum anderen die inhaltlichen Vorstellungen zu Brüchen und zur Addition gefestigt werden. Es können auch zielgerichtete Fähigkeiten im Argumentieren und Begründen entwickelt werden.

Hinweise zum Einsatz der Aufgabe

- Die Aufgabe kann bereits vor der Behandlung der Addition ungleichnamiger Brüche eingesetzt werden, da es viele inhaltliche Begründungen gibt.
- Die Schüler sollten Hilfsmittel zur Veranschaulichung von Brüchen erhalten.
- Zeit für selbstständige Schülerarbeit: 10 – 15 min

Hinweise zu möglichen Schülerantworten

Auf der inhaltliche Ebene sind folgende Antworten möglich:

- Es kann die Größe Zeit mit der Einheit Stunden verwendet werden. Schon vor der Behandlung der Bruchrechnung wissen die Schüler, dass eine halbe und eine dreiviertel Stunde eine und eine Viertelstunde ergibt.
- Es kann die Größe Volumen mit der Einheit Liter verwendet werden. So könnte auch unter Einsatz von Gefäßen die Gültigkeit der Gleichung $\frac{1}{2}l + \frac{3}{4}l = 1\frac{1}{4}l$ leicht nachgewiesen werden.
- Auch die Einheit Meter kann zur Begründung herangezogen werden, dabei ergibt sich leicht der Gedanke, mit Dezimalbrüchen zu arbeiten.
- Ein Nachweis kann ebenfalls mithilfe von geometrischen Veranschaulichungen (Strecken oder Flächen) erfolgen.

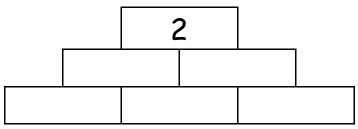
Auf der formalen Ebene sind Begründungen mithilfe der Regeln zum Rechnen mit gemeinen Brüchen oder nach Umwandlung der Brüche in Dezimalbrüche zum Rechnen mit Dezimalbrüchen möglich.

Die unterschiedliche Qualität der Antworten zeigt sich in der Vielzahl der gefundenen Aufgaben und der Anwendung der verschiedenen Rechenverfahren.

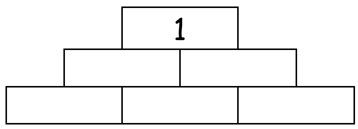
Aufgabe 9

In einer Zahlenmauer ist eine Zahl (bis auf die unterste Reihe) immer die Summe bzw. das Produkt der beiden darunter stehenden Zahlen.
Baue selbst verschiedene Zahlenmauern.

(1) Die Zahl 2 wird durch Addieren erreicht.



(2) Die Zahl 1 wird durch Multiplizieren erreicht.



Rolle der Aufgabe in Lernprozessen

Mit diesen Aufgaben können die Kenntnisse zum Addieren und Multiplizieren von gemeinen Brüchen und Dezimalbrüchen sowie zum Umwandeln von gemeinen Brüchen in Dezimalbrüche gefestigt werden.

Vorschläge zur Unterrichtsgestaltung

- Es handelt sich insgesamt um sechs Teilaufgaben, die nacheinander bearbeitet werden sollten.
- Die Schüler sollten von jeder Pyramide bei jeder Teilaufgabe je vier Exemplare auf einem Arbeitsblatt erhalten.
- Für jede der Teilaufgaben sollte eine selbstständige Schülerarbeit von 15 min eingeplant werden.

Hinweise zu möglichen Schülerantworten

Analyse der Anforderungen:

Es können drei Fälle unterschieden werden:

a) Es wird nur mit Brüchen gearbeitet.
b) Es wird nur mit Dezimalbrüchen gearbeitet.
c) Es wird mit Brüchen und mit Dezimalbrüchen gearbeitet.

(1): Bei der Verwendung von Brüchen können sich die Schüler auf das Addieren gleichnamiger Brüche beschränken. Beginnen sie mit kleinen Nennern (z. B. 2 oder 3), so müssen sie in der nächsten Zeile eine Erweiterung der Brüche vornehmen. Fangen die Schüler mit einem großen Nenner an (z. B. 8), brauchen sie in der nächsten Zeile nur die Zähler in geeigneter Weise in Summen zerlegen. Als Sonderfall könnten sie erkennen, dass auch die Zahl 1 und die Zahl 0 als Bruch dargestellt werden können. Grenzfälle sind die Verwendung sehr großer Nenner.
Bei der Verwendung von Dezimalbrüchen sind einfache Zerlegungen in Dezimalbrüche mit einer Kommastelle möglich. Sonderfälle sind die Verwendung der Zahlen 1 und 0, Grenzfälle die Verwendung sehr kleiner Dezimalbrüche.
Die Ergebnisse zu c) können leicht aus den Ergebnissen von a) und b) gewonnen werden.
Die Schüler können bei allen Teilaufgaben einfache Lösungen im Bereich des sicheren Wissens und Könnens, aber auch ausgefallene anspruchsvolle Lösungen finden.

(2): Das Zerlegen der Zahl 1 in ein Produkt zweier gemeiner Brüche bzw. zweier Dezimalbrüche ist im Allgemeinen recht anspruchsvoll. Bei der Verwendung gemeiner Brüche müssen die Schüler in der ersten Zeile erkennen, dass sich die Zahl 1 als Produkt aus einem Bruch und seinem Kehrwert darstellen lässt. Für die zweite Zeile müssen dann Überlegungen analog zur Aufgabe 5 angestellt werden (vgl. S. 38). Wenn in der ersten Zeile Brüche mit kleinen Nennern verwendet werden (z. B. ½), ist eine weitere Zerlegung schwieriger, als wenn man einen Bruch und seinen Kehrwert wählt, bei dem sich Zähler und Nenner wieder in Faktoren zerlegen lassen.

Der Sonderfall, dass alle Zahlen gleich 1 sind, ist eine einfache Lösung für alle Teilaufgaben.

Bei der Verwendung von Dezimalbrüchen führt der Gedanke, Zehnerpotenzen verwenden (z. B. $0{,}1 \cdot 10$ oder $0{,}001 \cdot 100$) zu einfacheren Lösungen, als wenn mit anderen Dezimalbrüchen gearbeitet wird (etwa $0{,}5 \cdot 2$).

Die unterschiedliche Qualität der Antworten zeigt sich in der Vielzahl der gefundenen Aufgaben, dem Schwierigkeitsgrad der Rechenoperationen und der Berücksichtigung von Sonderfällen.

Aufgabe 10

Finde Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen folgenden drei Dezimalbrüchen.

(1) 1,6 (2) $1{,}\overline{6}$ (3) 1,678910111213…..

Rolle der Aufgabe in Lernprozessen

Diese Aufgabe dient der Entwicklung von Kenntnissen zu endlichen und unendlichen Dezimalbrüchen.

Hinweise zum Einsatz der Aufgabe

– Die Aufgabe ist nach der Einführung der periodischen Dezimalbrüche zur Begriffsfestigung sinnvoll.
– Die Schüler sollten in 10 Minuten ihre Gedanken zum Vergleich der gebrochenen Zahlen schriftlich festhalten.

Hinweise zu möglichen Schülerantworten

– Bei den Gemeinsamkeiten könnten die Schüler feststellen, dass es sich jeweils um Dezimalbrüche handelt, die zwischen 1 und 2 bzw. sogar noch genauer zwischen 1,6 und 1,7 liegen, alle mit 1 anfangen und an der Zehntelstelle eine 6 steht.
– Unterschiede bestehen im Wert der Zahlen sowie in der der Art des Dezimalbruches. Der Dezimalbruch 1,6 ist ein endlicher Dezimalbruch und der Dezimalbruch $1{,}\overline{6}$ ist ein unendlicher periodischer Dezimalbruch. Beim Dezimalbruch 1,678910111213… müssen die Schüler anhand des Bildungsgesetzes erkennen, dass er nicht abbricht und auch nicht periodisch ist.

Weitere Hinweise
Der Dezimalbruch (3) ist ein unendlicher nichtperiodischer Dezimalbruch und damit keine gebrochene Zahl. Mit dieser Aufgabe erfolgt ein Ausblick auf den Bereich der irrationalen Zahlen, der in der Klasse 7 bei der Behandlung der Quadratwurzeln und in der Klasse 9 bei der Einführung der reellen Zahlen weiter thematisiert wird.

Aufgabe 11
Stelle deinem Banknachbarn unterschiedliche Aufgaben zur Addition zweier Brüche und korrigiere seine Lösungen.

Rolle der Aufgabe in Lernprozessen
Die Aufgabe dient der Festigung der Kenntnisse zum Addieren von Brüchen. Die Kontrolle des Ergebnisses (und des Rechenweges) des Banknachbarn erfordert das Nachvollziehen des Rechenweges. Bei unterschiedlichen Lösungen muss das richtige Ergebnis durch die Schüler gemeinsam gefunden werden, dadurch werden die Fähigkeiten im Begründen und Argumentieren entwickelt.
Durch die Wahl der Summanden wird der Schwierigkeitsgrad der Aufgabe bestimmt. Es liegt im Interesse der Schüler, den Schwierigkeitsgrad angemessen zu halten – dazu ist mathematisches Vorausdenken und Abschätzen im Hinblick auf das zu erwartende Ergebnis nötig, um „günstige“ Summanden auszuwählen. Damit wird der Bruchbegriff gefestigt, insbesondere die Bedeutung von Zähler und Nenner sowie Größenvorstellungen zu Brüchen.

Hinweise zum Einsatz der Aufgabe
- Die Aufgabe sollte in der Stoffeinheit zur Addition und Subtraktion ungleichnamiger Brüche oder in gemischten Übungen eingesetzt werden.
- Falls Schüler in der Klasse unter dem Wort Brüche auch Dezimalbrüchen verstehen, sollte zu Beginn darauf hingewiesen werden, dass es um gemeine Brüche geht.
- Die Aufgabenstellung erfordert Partnerarbeit. Günstig ist es, ein bis zwei kleinere Proberunden durchzuführen, damit die Arbeitsabläufe geklärt sind und die Schüler ein Gefühl für die Auswahl eines geeigneten Zahlenmaterials bekommen. Die eigenständige Partnerarbeit sollte 15 Minuten nicht überschreiten.
- In der Auswertung wird es nicht möglich sein, alle Aufgaben auch nur annähernd zu präsentieren. Denkbar wäre es, Leitfragen zu stellen wie etwa: „Welches war die schwerste gestellte Aufgabe – und warum?“, um eine Reflexion der Schüler zum Algorithmus der Bruchaddition anzuregen.

Hinweise zu möglichen Schülerantworten
- Die Vielzahl möglicher Schülerantworten lässt sich klassifizieren in die Addition gleichnamiger Brüche, die Addition ungleichnamiger Brüche und die Einbeziehung gemischter Brüche.
- Der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben ergibt sich aus den gewählten Nennern und den damit verbundenen Problemen zur Bestimmung eines Hauptnenners sowie aus der Größe der Zahlen, die bei den Rechnungen auftreten.

Die unterschiedliche Qualität der Antworten zeigt sich in der Vielzahl der gefundenen Aufgaben, dem Schwierigkeitsgrad der Aufgaben, der Berücksichtigung von Sonderfällen und nicht zuletzt in der Anzahl der richtigen Lösungen.

Aufgaben zu gebrochenen Zahlen

1. Finde Gemeinsamkeiten und Unterschiede bei den folgenden Brüchen: $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{6}{2}, \frac{3}{8}, \frac{7}{5}, \frac{2}{2}$ und $\frac{2}{8}$.

2. Falte ein quadratisches Stück Papier (z. B. einen quadratischen Notizzettel) so, dass du mithilfe der entstandenen Faltkanten $\frac{3}{4}$ des Papiers färben kannst.

3. Finde verschiedene Erklärungen dafür, dass $\frac{1}{4}$ kleiner als $\frac{1}{3}$ ist.

4. a) Gib Brüche an, deren Summe 1 ergibt.
b) Gib Brüche an, deren Summe 2 ergibt.

5. Stelle die gebrochene Zahl $\frac{3}{4}$ als Produkt zweier Brüche dar.

6. Es sind 16 mit Zahlen bedruckte Karten ausgelegt. Bilde Rechenaufgaben nach den angegebenen Regeln, die das folgende Ergebnis haben.

a) 1 b) 2 c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{5}{2}$

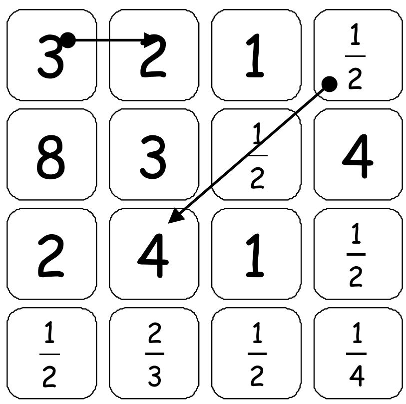
3	2	1	$\frac{1}{2}$
8	3	$\frac{1}{2}$	4
2	4	1	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Regeln:
(1) Man darf von einer Karte waagerecht, senkrecht oder diagonal zur nächsten oder übernächsten Karte gehen.

(2) Die Zahlen können in dieser Reihenfolge durch beliebige Rechenzeichen oder Klammern verbunden werden.

Beispiel:
Das Ergebnis soll 5 sein:

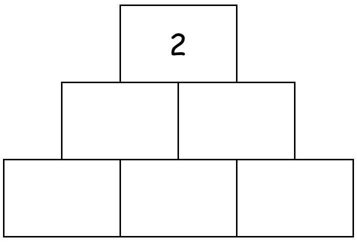
$3 + 2 = 5$ *oder* $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 4 = 5$

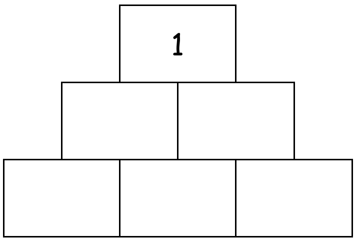


7. Bilde eine Rechenoperation mit zwei Brüchen, die das Ergebnis $\frac{5}{8}$ hat.

8. Finde Begründungen für die Richtigkeit der folgenden Gleichung: $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = 1\frac{1}{4}$.

9. In einer Zahlenmauer ist eine Zahl (bis auf die unterste Reihe) immer die Summe bzw. das Produkt der beiden darunter stehenden Zahlen.
Baue selbst verschiedene Zahlenmauern.
a) Die Zahl 2 wird durch Addieren erreicht. b) Die Zahl 1 wird durch Multiplizieren erreicht.





10. Finde Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen folgenden drei Dezimalbrüchen.
(1) 1,6 (2) $1,\overline{6}$ (3) 1,678910111213 …

Hinweis: Die Dezimalstellen bei der Zahl (3) sind nach einer Regel gebildet worden, die du aus der folgenden Darstellung erkennen kannst: 1,6 7 8 9 10 11 12 13 …

11. Stelle deinem Banknachbarn unterschiedliche Aufgaben zur Addition zweier Brüche und korrigiere seine Lösungen.

5 Größen

Hinweise zu den Aufgaben

Aufgabe 1

Anne, Boris, Carolin und Dominik spielen oft zusammen Oldtimer-Auto-quartett. Sie haben die Daten Ihrer Lieblingsautos in einer Tabelle zusammengestellt. Sie überlegen nun gemeinsam

a) welches das größte Auto ist und
b) welche der vier Karten insgesamt die stärkste Karte ist.

	Anne	Boris	Carolin	Dominik
Höchstgeschwindigkeit in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$	174	188	173	180
Länge in mm	4100	3500	3700	4100
Breite in mm	1620	1650	1610	1600
Höhe in mm	1360	1100	1400	1400
Leistung in PS	95	130	96	113
Umdrehungszahl in $\frac{\text{U}}{\text{min}}$	5750	5400	6500	6500
Hubraum in cm^3	1490	1962	1290	1570
Baujahr	1983	1980	1955	1962

Wie würdest Du entscheiden? Begründe!

Rolle der Aufgabe in Lernprozessen

Mit der Aufgabe a) können die Vorstellungen und Kenntnisse der Schüler zu den Wörtern "Größe" und "groß" vertieft und gefestigt werden. Das Wort "Größe" hat in der Umgangssprache viele unterschiedliche Bedeutungen[9], die sich teilweise von der im mathematischen Sinne unterscheiden. Weiterhin kann "Größe" eines Objektes (hier die "Größe" eines Autos) nach unterschiedlichen Merkmalen bestimmt werden.

Bei der Teilaufgabe b) geht es um ein Problem der Auswertung statistischer Daten. Die Schüler können an diesem einprägsamen Beispiel erleben, dass man dieselben Daten ganz unterschiedlich auswerten kann, was in vielen Fällen beim Umgang mit Daten in der Praxis durchaus der Fall ist.

Hinweise zum Einsatz der Aufgabe

Die Teilaufgaben sollten nacheinander und in getrennten Unterrichtsphasen bearbeitet werden.

Für die Aufgabenstellung a) sollte die Bedeutung der Größen Geschwindigkeit, Leistung, Umdrehungszahl und Hubraum geklärt werden. Dabei kann auf das Vorwissen an Technik interessierter Schüler zurückgegriffen werden.

Vor Bearbeitung der Aufgabenstellung b) durch die Schüler sollten zunächst noch einmal möglichst mithilfe eines konkreten Kartenspiels die Regeln bei einem solchen Spiel besprochen werden. Üblicherweise wird von einem Spielpartner ein Merkmal des Autos auf seiner Karte angegeben und wer den besten Wert zu diesem Merkmal hat, gewinnt die Spielrunde.

Die Aufgabe kann unter Nutzung kooperativer Lernformen bearbeitet werden, bei der sich zunächst die Schüler in Einzelarbeit eine Meinung bilden und diese dann in einer Kleingruppe austauschen. In einem letzten Schritt werden die Ergebnisse der Gruppen zusammengetragen. Insgesamt sollten mindestens 30 Minuten eingeplant werden. Als weiterführende Aufgabe bietet sich der Vergleich dieser Daten mit denen heutiger Automodelle an.

Hinweise zu möglichen Schülerantworten

Bei der Aufgabe a) kann im einfachsten Fall die Größe des Autos als seine Höhe oder seine Länge interpretiert werden. Je nach verwendetem Kriterium sind Carolins und Dominiks (Höhe je 1400 mm), Boris' (Breite = 1650 mm) oder Annes und Dominiks (Länge jeweils 4100 mm) das größte Auto. Qualitativ hohe Schülerantworten können durch die simultane Berücksichtigung mehrerer Ei-

[9] vgl. Broschüre „Sicheres Wissen und Können Größen“, S. 9

genschaften wie Länge, Breite und Höhe entstehen. Obwohl kein Auto quaderförmig ist, könnte – ähnliche Karosserieformen der Limousinen vorausgesetzt – das Produkt aus Länge, Breite und Höhe als Vergleichswert für den Rauminhalt des Autos dienen. In diesem Fall wäre Dominiks Auto das größte. Das Einbeziehen technischer Daten, wie die Leistung oder die Größe des Hubraums, ist eine weitere denkbare Interpretationsmöglichkeit. Die Qualität der sprachlichen Darstellung ist ebenfalls ein qualitativer Aspekt der Schülerantwort.

Bei der Teilaufgabe b) geht es darum, dass das jeweilige Auto möglichst oft den besten Wert hat. Wenn man für jedes Merkmal Plätze für die einzelnen Autos vergibt, so hat das Auto von Boris viermal, das Auto von Dominik dreimal, das Auto von Anne zweimal und das Auto von Carolin nur einmal den ersten Platz. Werden alle Platzziffern der Merkmale addiert, so ergibt sich für das Auto von Dominik die Summe 16, für das Auto von Boris 18, für das Auto von Anne 20 und für das Auto von Carolin der Wert 23.

Aufgabe 2

Gib Paare von Einheiten an, bei denen die Umrechnungszahl folgenden Wert hat
a) 10 b) 100 c) 1000

Rolle der Aufgabe in Lernprozessen
Der Einsatz der Aufgabe ist sinnvoll nach der Behandlung aller Größen zur komplexen Festigung des Umrechnens von Größen.

Beim Umrechnen von Größen – das für andere Unterrichtsfächer, die weitere Ausbildung und den Alltag von großer Bedeutung ist – sollte zwischen einem sicheren, einem reaktivierbaren und einem exemplarischen Wissen und Können unterschieden werden. Das sichere Wissen und Können umfasst Größenvorstellungen und sicheres Umrechnen zu ausgewählten Einheiten bei jeder Größe[10]. Das Umrechnen zwischen allen übrigen Einheiten sollte als Problemlöseprozess konzipiert werden.

Zur Orientierung der Schüler für die komplexe Handlung des Umrechnens ist es sinnvoll, zwischen den Teilhandlungen "Bestimmen der Umrechnungszahl" und "Bestimmen der Rechenoperation" zu unterscheiden. So ist zum Beispiel die Umrechnungszahl von Meter in Zentimeter und auch von Zentimeter in Meter jeweils 100, während sich die anzuwendenden Rechenoperationen unterscheiden[11].

Zum Lernen der jeweiligen Einheitenketten und Umrechnungszahlen ist es sinnvoll, sich bestimmte Größengleichungen einzuprägen (zum Beispiel 1 m = 100 cm).

Die Aufgabe selbst ist eine Umkehraufgabe zum Bestimmen der Umrechnungszahl bei zwei gegebenen Einheiten und somit ein notwendiger Bestandteil des Lernprozesses.

Hinweise zum Einsatz der Aufgabe
Zum rationellen Notieren der Ergebnisse sollte vorher vereinbart werden, nur die Abkürzungen der Einheiten ohne die Maßzahl 1 zu verwenden, also z. B. für die Einheit 1 m nur "m" zu schreiben.

Bei der Angabe der Einheitenpaare ist die Reihenfolge der Einheiten nicht von Bedeutung.

Die Verwendung eines Nachschlagewerkes oder des Lehrbuches sollte bei dieser Aufgabe nicht gestattet werden, um eine ausreichende Differenzierung in der Anzahl der Antworten der Schüler zu erhalten.

Da es bei der Teilaufgabe a) nur relativ wenige Einheitenpaare gibt, kann diese Aufgabe als Einstieg gewählt werden.

Bei den Teilaufgaben b) und c) können nicht nur benachbarte Einheiten gewählt werden, wodurch sich weitere Möglichkeiten für Antworten unterschiedlicher Qualität ergeben.

[10] vgl. Broschüre „Sicheres Wissen und Können Größen“
[11] vgl. Broschüre „Sicheres Wissen und Können Größen“, S. 10/11

Bei dieser Aufgabe ist es sinnvoll, im Anschluss an die Präsentation der Schülerlösungen gemeinsam eine systematische Darstellung der Einheitenpaare für jede Umrechnungszahl vorzunehmen.

Hinweise zu möglichen Schülerantworten

Für die Umrechnungszahlen 100 und 1000 sind in der Tabelle nicht alle möglichen Einheitenpaare angegeben.

Umrechnungszahl	Einheitenpaare
10	m – dm; cm – dm, cm – mm; t – dt
100	€ - ct; dt – kg; cm – m; km² - ha; m² - dm²; cm² - mm²; hl – l; …
1000	t – kg; kg – g; g – mg; km – m; mm – m;m^3 – l; l – ml; cm^3 – mm^3; …

Aufgabe 3

a) Nenne Eigenschaften eines Brotes, die du mit mathematischen Größen beschreiben kannst. Gib die Größe und sinnvolle Einheiten der Größe an.

b) Finde andere Gegenstände, auf die du die Aufgabenstellung übertragen kannst.

Rolle der Aufgabe in Lernprozessen

Mit dieser Aufgabe können die Kenntnisse der Schüler zum Wort Größe, das in der Umgangssprache und in der Mathematik unterschiedliche Bedeutungen hat[12], gefestigt werden.
Die Schüler erleben an einem einprägsamen Beispiel, dass man verschiedene, aber nicht alle Eigenschaften eines Objektes mit mathematischen Größen beschreiben kann.
Die Schüler üben sich im Beschreiben und verständlichen Darstellen ihrer Überlegungen, Lösungswege und Ergebnisse.

Hinweise zum Einsatz der Aufgabe

Der Einsatz der Aufgabe ist vor allem bei gemischten Aufgaben am Ende des Stoffgebietes sinnvoll. Zunächst sollten die Schüler nur die Aufgabe a) bearbeiten. Das Ergebnis kann an der Tafel in Form einer Mindmap (mit einem gezeichneten Brot in der Mitte) für alle Schüler nachvollziehbar festgehalten werden. Nach einer etwa 30-minütigen Bearbeitung und Diskussion im Unterricht kann die Aufgabe b) als Hausaufgabe gestellt werden.

Hinweise zu möglichen Schülerantworten

In der Erprobung war zu beobachten, dass die Schüler die Beschreibung von Eigenschaften mithilfe von Größen in unterschiedlicher Art vornehmen. Während einige Schüler mit konkreten Angaben operieren (Ein Brot wiegt 1 kg und ist etwa 25 cm lang.), nennen andere nur den Namen der Eigenschaft und eine mögliche Maßeinheit. Beide Ansätze unterscheiden sich durch den Grad der Abstraktion und sollten jeweils als zutreffende Antwort gewertet werden.

[12] vgl. Broschüre „Sicheres Wissen und Können Größen“, S. 9

Objekt	Eigenschaft	Größe	sinnvolle Einheiten
a) Brot	Preis	Währung	€; ct
	Gewicht	Masse	g; kg
	Größe	Volumen	cm^3; l
	Länge	Länge	cm
	Backdauer	Zeit	min; h
b) z. B. Glühlampe	Preis	Währung	€, ct
	Betriebsdauer	Zeit	h
	Höhe	Länge	cm
	Durchmesser	Länge	cm
z. B. Kühlschrank	Preis	Währung	€
	Stellfläche	Flächeninhalt	m^2
	Länge/ Breite/ Höhe	Länge	m; cm
	Größe	Volumen	l

Aufgabe 4

Wie viele Holzstämme sind auf dem Foto zu sehen?
Suche verschiedene Möglichkeiten, wie man die Anzahl näherungsweise bestimmen kann und beschreibe, was dabei zu beachten ist.

Rolle der Aufgabe in Lernprozessen

Die Aufgabe sollte in die Prozesse der Entwicklung von Kenntnissen zur Arbeit mit Näherungswerten sowie insbesondere zum Schätzen von Anzahlen eingeordnet werden. So können die Schüler gut erkennen, dass oft eine genaue Lösung nicht möglich und mit Blick auf die Verwendung des Ergebnisses auch nicht sinnvoll ist.

Die möglichen Verfahren zur näherungsweisen Bestimmung der Anzahl sind selbst kein Lerngegenstand. Es kann aber ein Bezug des "Rasterverfahrens" zur generellen Methode des Schätzens von Größen durch Vergleichen mit geeigneten Vergleichsgrößen hergestellt werden.

Mit dieser Aufgabe können die Schüler auch eindrucksvoll erleben, dass es verschiedene Lösungswege für ein Ergebnis gibt und dass man die Meinungen und Lösungswege anderer Schüler akzeptieren sollte.

Hinweise zum Einsatz der Aufgabe

Die Aufgabe sollte im Zusammenhang mit der Wiederholung von Näherungswerten und Rundungsregeln sowie der Möglichkeiten zum Schätzen von Größen eingesetzt werden.

Bei der Erprobung der Aufgabe haben sich folgende Vorgehensweisen bewährt:
- Jeder Schüler hat sich zunächst etwa 10 min selbstständig mit der Aufgabe beschäftigt.
- Die Beschäftigung mit der Aufgabe erfolgte in Partner- oder auch Gruppenarbeit.
- Jeder Schüler bzw. jede Gruppe erhält eine Kopie des Fotos (möglichst in Farbe).
- Zusammen mit der Aufgabe wurden den Schülern noch weitere analoge Bilder vorgelegt, wozu eine PowerPoint-Präsentation angefertigt wurde (s. http://www.mathe-mv.de).

Hinweise zu möglichen Schülerantworten

Bei den Erprobungen ergaben sich folgende Schülerantworten:
- Nur sehr wenige Schüler wussten mit der Aufgabe gar nichts anzufangen.
- Viele Schüler haben sofort angefangen zu zählen und dabei jeden Stamm markiert, einige durch einen Punkt oder Strich, andere haben die Baumstämme ausgemalt.
- Einige Schüler haben die Anzahl der Stämme an den Seiten des Fotos gezählt und miteinander multipliziert.
- Einige Schüler haben das Bild in verschiedene, auch unterschiedlich große Segmente zerlegt und die Stämme in jedem dieser Segmente gezählt und anschließend addiert.

- Wenige Schüler kamen auf die Idee, das Bild in gleichgroße Rechtecke zu zerlegen, die Anzahl der Baumstämme in einem Rechteck auszuzählen und dann mit der Anzahl der Rechtecke zu multiplizieren. In einer Klasse hat dies nur der langsamste Schüler getan, der dann aber am schnellsten fertig war.
- Es ergaben sich sehr viele verschiedene Lösungen. In einer Klasse waren es 22, die zwischen 210 und 367 lagen.
- Es war oft zu beobachten, dass einige Schüler nur auf das Finden einer "genauen" Lösung bedacht waren – mit der Befürchtung, dass der nicht genaue Wert eine "falsche" Lösung sei.

Auf dem Bild sind etwa 290 Baumstämme ganz oder teilweise zu sehen. Teilt man das Bild in 8 Teile, so befinden sich im linken oberen Feld nur etwa 27 Baumstämme.

Es muss diskutiert werden, ob man ein Objekt noch zählt, wenn es nur sehr wenig zu sehen ist.

Die *unterschiedliche Qualität der Antworten* ergibt sich aus der gefundenen Zahl von Einteilungsmöglichkeiten und der Qualität der Diskussionen zu den Bedingungen der Anzahlermittlung.

Aufgabe 5

Frau Müller will mit der Bahn von Schwerin nach Stralsund fahren.. Im Internet hat Frau Müller folgende Zugverbindungen gefunden:
Frau Müller muss um 10:00 Uhr in Stralsund sein. Für die Fahrt zum Bahnhof benötigt sie eine halbe Stunde. Wann sollte sie ihre Wohnung spätestens verlassen haben?

Rolle der Aufgabe in Lernprozessen

Die Aufgabe kann einen Beitrag zur Entwicklung des Interesses und der Fähigkeiten im Lösen von Sachaufgaben leisten. In der Aufgabe wurden bewusst Informationen fortgelassen, die eine eindeutige Lösung ermöglichen würden. Die Schüler können nicht einfach drauflos rechnen und müssen sich zunächst fragen, was in der Wirklichkeit noch alles zu beachten ist und welche weiteren Fragen man noch stellen müsste. Dies sind wesentliche Teilhandlungen zum Erfassen des Sachverhalts (vgl. S. 12).

Die Aufgabe ist weiterhin geeignet, das Können der Schüler im Arbeiten mit Fahrplänen weiterzuentwickeln, wofür es aber auch eine Reihe weiterer Aufgabenstellung mit möglichst realen Fahrplänen bedarf.

Aufgaben zum Planen von Wandertagen und Klassenfahrten wecken bei den Schülern positive Assoziationen und motivieren. In dieser Aufgabe werden dabei Informationen zum Problem des Fahrens mit öffentlichen Verkehrsmitteln, insbesondere der Eisenbahn, diskutiert, die für einen großen Teil der Schüler nicht alltäglich sind.

Hinweise zum Einsatz der Aufgabe

Die Aufgabe kann bei der Behandlung der Größen, insbesondere bei den Größen Währung und Zeit, aber auch im Rahmen der gemischten Aufgaben eingesetzt werden. Es sollten vorher Übungen zum Arbeiten mit Fahrplänen erfolgt sein.

Bewährt haben sich bei den zahlreichen Erprobungen folgende Formen der Unterrichtsgestaltung:

- Die Aufgabe wurde ausgedruckt und jedem Schüler zum Einkleben in den Hefter gegeben bzw. mit einem Beamer projiziert.
- Den Schülern wurde die Aufgabe mit der Bemerkung gegeben, dass sie sich in die Lage von Frau Müller versetzen sollen und die Aufgabe nicht als reine "Matheaufgabe" ansehen sollen.
- Wenn Schüler zu Beginn der Bearbeitung der Aufgabe Fragen zur weiteren Informationen zum Sachverhalt gestellt haben, wurden diese Fragen nicht beantwortet.
- Den Schülern wurde 20 min Zeit gegeben, um die Ergebnisse ihrer Überlegungen schriftlich festzuhalten.

- Jeder Schüler sollte in 10 min drei Fragen zum Sachverhalt auf einen Zettel schreiben. Danach wurden Gruppen gebildet, in denen sich die Schüler austauschen konnten. Anschließend hatte jeder noch 10 min Zeit, seine Lösung aufzuschreiben.
- Vor dem Bearbeiten der Aufgabe wurde die Reiseroute anhand einer Karte des Landes als fächerübergreifendes Element zum Geographieunterricht veranschaulicht.
- Von einigen Kollegen wurde eine Veränderung der Reiseroute unter Einbeziehung des Heimatortes als Ausgangspunkt der Reise vorgenommen. In größeren Städten wurden innerstädtische Nahverkehrsverbindungen verwendet.
- Durch die Auslöschung bestimmter Informationen in der Tabelle (wie Reisedauer oder Abfahrts- bzw. Ankunftszeiten) wurde in einer ersten Phase das Rechnen mit Zeitdifferenzen geübt.
- Es wurden verschiedene reale Auskunftssysteme (wie Fahrplanauskunft im Internet bzw. gedruckte Fahrpläne) einbezogen.
- Angesichts der Vielfalt der Aufgabenvariationen ist auch das zu planende Zeitmaß verschieden. In der vorliegenden Version sollten mindestens 30 Minuten veranschlagt werden, mit den Erweiterungen können bis zu 90 Minuten ausgefüllt werden.

Hinweise zu möglichen Schülerantworten

Obwohl es sich um eine Sachaufgabe handelt, haben bei den zahlreichen Erprobungen der Aufgabe fast immer alle Schüler eine akzeptable Antwort gefunden und sich mit Freude an der Bearbeitung dieser Aufgabe beteiligt. Es kam zu zahlreichen Diskussionen, an denen sich insbesondere auch leistungsschwächere Schüler aktiv beteiligt haben.

In einigen Fällen haben sich die Schüler aber auch nicht auf den Sachverhalt eingelassen und nur "rein mathematisch" gedacht, ohne weitere Bedingungen zu berücksichtigen.

Bei den schriftlichen Überlegungen zur Aufgabe haben die Schüler eine kleine Geschichte entwickelt.

Alle Schüler haben erkannt, dass nur die ersten drei Züge in Frage kommen und die meisten haben sich für den zweiten Zug entschieden.

Von den Schülern wurden unter anderem folgende Fragen und Probleme genannt, sowie Begründungen angegeben.

- Wie kommt Frau Müller zum Bahnhof in Schwerin?
- Was gehört zur Fahrt zum Bahnhof – nur die reine Fahrzeit oder auch Wartezeiten für ÖPNV bzw. Parkplatzsuche und Weg zum Bahnsteig?
- Muss Frau Müller noch eine Fahrkarte kaufen und wie lange könnte das dauern?
- Wo in Stralsund findet das Treffen statt: direkt am Bahnhof oder an einem anderen Ort? Muss der Weg zum Treffpunkt berücksichtigt werden?
- Für welchen Zug entscheidet sich Frau Müller – schnell, bequem (ohne Umsteigen) oder preiswert?
- Schüler, die den ersten Zug ausgewählt hatten, gaben als Begründung an, dass man nicht umsteigen muss, im Zug ja noch schlafen kann und am Zielbahnhof noch Frühstück essen oder shoppen könnte.
- Die meisten Schüler wussten nicht, was ein Nachtzug ist und dass man dort auch sitzen kann.
- Den dritten Zug wählten Schüler aus, die es sonst auch nicht so genau mit der Pünktlichkeit nehmen bzw. noch nie Zug gefahren sind.
- In einigen Klassen haben viele Schüler außer den vorgegebenen 30 min für die Fahrt zum Bahnhof keine weiteren Zeiten für andere Dinge eingeplant.

Aufgabe 6

Jens hat für den Besuch des Freibades 8 € bekommen. Er bezahlt davon den Eintritt und für die Busfahrt hin und zurück insgesamt 1,70 €. Nach dem Baden geht Jens mit seinem Restgeld zum Kiosk, um sich etwas zu essen und zu trinken zu kaufen. Was könnte sich Jens kaufen?

Freibad zum Waldsee

Öffnungszeiten:
täglich von 10:00 – 21:00 Uhr

Eintritt:
Erwachsene: ....4 €
Kinder (3 bis 16 Jahre): ....2 €

Heute im Angebot
Mineralwasser...... 0,5 l......................... 1 €
Cola .... 0,25 l....................... 1 €
Saft .... 0,2 l.......................... 1,20 €
Kartoffelsalat........ Portion.................... 1,50 €
Würstchen........... 1 Paar...................... 1,80 €
Kuchen................. ofenfrisch............... 0,80 €
Pommes............... klein .... 1,50 €
Pommes............... groß .... 2 €
Döner .... 2,80 €

Rolle der Aufgabe in Lernprozessen

Mit dieser Sachaufgabe, die einen engen Bezug zur Lebensumwelt der Schüler hat, können die Einstellung und das Können der Schüler im Erfassen des Sachverhaltes entwickelt werden. Insbesondere erleben Schüler, dass man verschiedene Überlegungen zum Sachverhalt anstellen kann.

Da jeder Schüler in der Regel eine Lösung findet, ist die Aufgabe auch zur Motivation des Lösens von Sachaufgaben geeignet.

Weiterhin können mit der Aufgabe die Fertigkeiten im Addieren und Subtrahieren von Dezimalbrüchen sowie im Umgang mit der Größe Währung gefestigt werden.

Hinweise zum Einsatz der Aufgabe

Angesichts des umfangreichen Zahlenmaterials hat sich das Ausgeben eines Arbeitsblatts an die Schüler bewährt.
Nach einer Phase der selbstständigen Schülerarbeit von etwa 20 min wurden die Ergebnisse in der Regel durch die Schüler an der Tafel notiert. Die meisten Kollegen gaben dazu keine Struktur der Darstellung vor. Das Erfassen der Schülerlösungen in einer Tabelle hat sich in einer Klasse als sehr günstig erwiesen.
Die Aufgabe wurde von einigen genutzt, um über Fragen der gesunden Ernährung mit den Schülern zu diskutieren.
In einem Fall wurde die Aufgabe in der Freiarbeit eingesetzt.

Hinweise zu möglichen Schülerantworten

Bei der Erprobung der Aufgabe wurde noch der Wert 1,45 € für die Busfahrt verwendet. Einige Schüler hatten dadurch Probleme beim schriftlichen Addieren bzw. Subtrahieren. Damit daran im Sinne einer polyvalenten Aufgabe möglichst wenige Schüler scheitern, haben wir den Wert auf 1,70 € geändert.

Die Tabelle enthält einige mögliche Zusammenstellungen.

1. Beispiel		2. Beispiel		3. Beispiel		4. Beispiel	
Busfahrt	1,70 €	Busfahrt	1,70 €	Busfahrt	1,70 €	Busfahrt	1,70 €
Eintritt	2,00 €	Eintritt	2,00 €	Eintritt	2,00 €	Eintritt	2,00 €
Cola	1,00 €	Wasser	1,00 €	Saft	1,20 €	Cola	1,00 €
Pommes (groß)	2,00 €	Kartoffelsalat	1,50 €	Döner	2,80 €	Pommes (klein)	1,50 €
Wasser	1,00 €	Würstchen	1,80 €			Kuchen	0,80 €
Betrag	7,70 €	Betrag	8,00 €	Betrag	7,70 €	Betrag	7,80 €
Restgeld	0,30 €	Restgeld	0,00 €	Restgeld	0,30 €	Restgeld	0,20 €

Bei den Lösungen der Schüler zeigten sich die unterschiedlichen Vorlieben für Getränke und Esswaren. In der Regel gaben die Schüler mindestens zwei Lösungen an, wobei sich v. a. leistungsstärkere Schüler oft auch darauf beschränkten. Die Vielzahl der mögliche Lösung hat aber den meisten viel Freude bereitet, es wurden teilweise 16 und 20 (im Rahmen der Freiarbeit sogar bis 79) verschiedene Lösungen gefunden.

Es gab zwei Vorgehensweisen. Einige haben erst ausgerechnet, wie viel Geld für Essen und Trinken übrig bleibt und die anderen haben erst ausgerechnet, was an "Festkosten" da ist und entsprechend dann die Beträge addiert.

Einige interessante Schülerantworten:
- Ein Schüler gab das Restgeld komplett für Kuchen aus.
- Meistens wurden Pommes, Döner und Cola gekauft.
- Einige hatten die Idee, das Geld für die Rückfahrt zu sparen und dafür zu Fuß nach Hause zu gehen oder die Eltern mit dem Handy anzurufen, damit sie von ihnen abgeholt werden.

Aufgaben zu Größen

Abb. mit freundlicher Genehmigung von www.best-classics.de

1. Anne, Boris, Carolin und Dominik spielen oft zusammen Oldtimer-Autoquartett. Sie haben die Daten ihrer Lieblingsautos in einer Tabelle zusammengestellt. Sie überlegen nun gemeinsam
a) welches das größte Auto ist und
b) welche der vier Karten insgesamt die stärkste Karte ist.
Wie würdest Du entscheiden? Begründe!

	Anne	Boris	Carolin	Dominik
Höchstgeschwindigkeit in $\frac{km}{h}$	174	188	173	180
Länge in mm	4100	3500	3700	4100
Breite in mm	1620	1650	1610	1600
Höhe in mm	1360	1100	1400	1400
Leistung in PS	95	130	96	113
Umdrehungszahl in $\frac{U}{min}$	5750	5400	6500	6500
Hubraum in cm^3	1490	1962	1290	1570
Baujahr	1983	1980	1955	1962

2. Gib Paare von Einheiten an, deren Umrechnungszahl 10 (100, 1000) ist.

3. a) Nenne Eigenschaften eines Brotes, die du mit mathematischen Größen beschreiben kannst. Gib die Größe und sinnvolle Einheiten der Größe an.
b) Finde andere Gegenstände, auf die du die Aufgabenstellung übertragen kannst.

4. Wie viele Holzstämme sind auf dem Foto zu sehen?
Suche verschiedene Möglichkeiten, wie man die Anzahl näherungsweise bestimmen kann und beschreibe, was dabei zu beachten ist.

Foto: privat

5. Frau Müller will mit der Bahn von Schwerin nach Stralsund fahren. Im Internet hat Frau Müller folgende Zugverbindungen gefunden:

Strecke	Zeit	Dauer	Umsteigen	Zug	Preis
Schwerin Hbf Stralsund	ab 05:46 an 07:58	2:12	0	RE	24,60 €
Schwerin Hbf Stralsund	ab 06:55 an 09:26	2:31	1	RE	24,60 €
Schwerin Hbf Stralsund	ab 07:46 an 09:58	2:12	1	RE, NZ	30,00 €
Schwerin Hbf Stralsund	ab 08:37 an 10:41	2:04	0	IC	30,00 €
Schwerin Hbf Stralsund	ab 09:46 an 11:58	2:12	1	RE	24,60 €
Schwerin Hbf Stralsund	ab 10:37 an 12:51	2:14	0	IC	30,00 €

RE: Regionalexpress

NZ: Nachtzug

IC: Intercity

Frau Müller muss um 10:00 Uhr in Stralsund sein. Für die Fahrt zum Bahnhof benötigt sie eine halbe Stunde. Wann sollte sie ihre Wohnung spätestens verlassen haben?

6. Jens hat für den Besuch des Freibades 8 € bekommen. Er bezahlt davon den Eintritt und für die Busfahrt hin und zurück insgesamt 1,70 €. Nach dem Baden geht Jens mit seinem Restgeld zum Kiosk, um sich etwas zu essen und zu trinken zu kaufen. Was könnte sich Jens kaufen?

Freibad zum Waldsee

Öffnungszeiten:
täglich von 10.00 Uhr – 21.00 Uhr

Eintritt:
Erwachsene:............................4 €
Kinder (3 bis 16 Jahre): ....2 €

Heute im Angebot

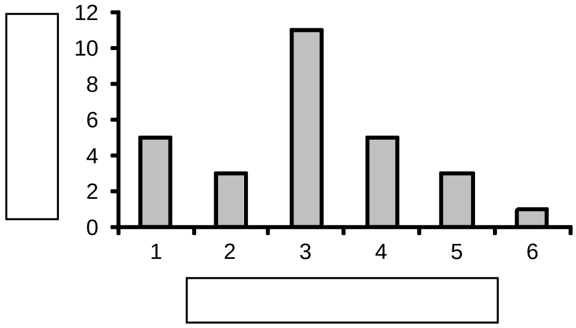
Mineralwasser ....0,5 l...................... 1 €
Cola ....0,25 l.................... 1 €
Saft.........................0,2 l...................... 1,20 €
Kartoffelsalat ....Portion .... 1,50 €
Würstchen ....1 Paar .... 1,80 €
Kuchen ....ofenfrisch .... 0,80 €
Pommes ....klein..................... 1,50 €
Pommes ....groß..................... 2 €
Döner .... 2,80 €

6 Stochastik

Hinweise zu den Aufgaben

Aufgabe 1

1. Was könnten die Angaben in dem Diagramm bedeuten? Finde für dein Beispiel die Beschriftung für die Achsen.



Rolle der Aufgabe in Lernprozessen
Die Aufgabe ist sehr gut geeignet zur Festigung folgender Teilhandlungen zum Lesen und Anfertigen von Diagrammen: Erkennen der auf den Achsen dargestellten Größen, Erkennen der Einteilung der Achsen, Ablesen von Werten auf den Achsen und einander zugeordneter Größenpaare, Erkennen größter und kleinster Werte, Beschreiben des dargestellten Zusammenhangs.

Es können weiterhin Begriffe aus der beschreibenden Statistik wie absolute Häufigkeit, Häufigkeitsverteilung, Maximum, Minimum, Modalwerte und Spannweite gefestigt werden.

Hinweise zum Einsatz der Aufgabe
Die Aufgabe kann in allen Klassenstufen in Stoffgebieten zur beschreibenden Statistik eingesetzt werden.

Erprobt wurde folgende Variante in fünften Klassen:
Jeder Schüler bekommt ein Arbeitsblatt mit der Aufgabenstellung in die Hand mit dem Hinweis, wenn möglich verschiedene Bedeutungen für das Diagramm zu finden. 10 Minuten Zeit werden vorgegeben.

Variationen: Die Aufgabe kann schon als Hausaufgabe gestellt worden sein. Ein Vorgeben der Aufgabe an der Tafel ist ebenfalls möglich.

Danach findet in weiteren 8 Minuten ein Austausch der Schülerergebnisse in Gruppen zu 3-4 Schülern statt. Die Ergebnisse sollen auf Wirklichkeitsnähe überprüft werden und jeder Schüler stellt für eines seiner Beispiele die Beschriftung des Diagramms vor.
Anschließend stellt jede Gruppe kurz und präzise ein Beispiel vor, Wiederholungen sind zu vermeiden, deshalb werden sehr originelle Beispiele vorgestellt.

Variation: Bewährt hat sich auch ein Vorstellen der Gruppenergebnisse auf Plakaten.

Zuletzt werden an einem Schülerbeispiel Begriffe aus der Stochastik wiederholt und gefestigt (Umfang der Stichprobe, absolute Häufigkeit, Minimum, Maximum, Spannweite).

Hinweise zu möglichen Schülerantworten
Generell ließen sich in der Erprobung die Schülerantworten in zwei Kategorien einteilen: Die numerischen Bezeichnungen der Abszisse können entweder direkt als Zahlenwert (z. B. Zensuren, Augenzahl beim Würfel, Anzahl der Katzen pro Wurf) oder auch als Codierung für nichtnumerische Daten (Sportarten, Haustierarten usw.) interpretiert werden.
Gelegentlich wurden die Werte auf der Ordinatenachse auch als Vielfache von Zehnerpotenzen aufgefasst.

In der Erprobung traten folgende Schülerantworten auf, wobei eine Beschriftung der Achsen nicht verlangt wurde.

– allgemeine Antworten: Diagramm kann sehr vieles bedeuten, z. B. Tiere oder Sportarten.

- Es könnte das Ergebnis einer Umfrage sein, wie viele Münzen die Leute gerade im Portmonee haben.
- Es wird erfasst, wie viele Grippekranke in den letzten 6 Tagen zum Hausarzt gegangen sind.
- Es sind Antworten auf die Frage, wie viele Kinder in einer Familie sind.
- Das Diagramm zeigt, wie viele Stimmen bei einer Wahl an 6 Kandidaten gegeben wurden.
- Der Zensurenspiegel einer Arbeit ist für 28 Schüler ablesbar.
- Anzahl der Touristenbesuche an 6 berühmten Orten, Einteilung in 10000.
- Dargestellt sind die Vorräte von 6 Getreidesorten in Tonnen.

Aufgabe 2

Der Tourismusverband Mecklenburg-Vorpommern möchte wissen, wie viele Urlauber im September ungefähr auf der Insel Rügen waren.
Wie könnte der Tourismusverband dies ermitteln?

Rolle der Aufgabe in Lernprozessen

Diese Aufgabe kann eingesetzt werden, wenn die Schüler erste Erfahrungen zur Auswertung von Daten gesammelt haben. Hier werden den Schülern die vielfältigen Möglichkeiten und die dabei zu beachtenden Probleme des Sammelns von Daten bewusst gemacht.

Hinweise zum Einsatz der Aufgabe

Hier empfiehlt sich der Einsatz der Ich-Du-Wir-Methode. Die Schüler überlegen zunächst allein, tauschen sich dann mit ihrem Banknachbarn aus, danach in einer kleinen Gruppe. Die Ergebnisse der Gruppe werden dann präsentiert. Für selbstständige Schülerarbeit (Ich-Phase) sollten 10 Minuten zur Verfügung stehen.

Hinweise zu möglichen Schülerantworten

Eine Idee sollte jeder Schüler finden. Weiterführende Gedanken sind die Betrachtung auftretender Probleme und die Überlegung, dass eine Vollerhebung oder eine Stichprobe möglich sind.

Ideen zum Sammeln von Daten	mögliche auftretende Probleme
Befragung der Hotels und Zimmervermieter zu den Übernachtungen im Monat September	Eine Berücksichtigung von Übernachtungen über die Monatsgrenzen hinweg ist nicht möglich. Tagesurlauber werden nicht erfasst.
Zählen der Autos, die über den Rügendamm und die Rügenbrücke fahren	Autos von Rüganern und Tagesbesuchern sowie Ausflüge von Urlaubern aufs Festland werden ebenfalls erfasst;
Zählen der Personen, die die Tourismusinformation besuchen	Nicht alle Touristen besuchen die Tourismusinformationen, einige vielleicht auch mehrfach.

Aufgabe 3

Alle Schüler einer 5. Klasse gaben in einer Umfrage ihre Lieblingstätigkeit an.
Stelle Fragen, die man mit diesen Daten beantworten kann.

Lieblingstätigkeit	Anzahl der Schüler
Fußball spielen	3
Treffen mit Freunden	8
Lesen	10
Computerspiele spielen	6

Rolle der Aufgabe in Lernprozessen

Diese Aufgabe kann zur Übung der Auswertung von Tabellen dienen. Die Schüler haben die Möglichkeit, diese Daten auszuwerten und dabei Auswertungskriterien zu finden.

Hinweise zum Einsatz der Aufgabe

Hier kann man zum späteren Präsentieren den Schülern in der Arbeitsphase vorbereitete Folien für den Overhead-Projektor oder große Papierstreifen zum Anheften an die Tafel geben. So spart man in der Präsentationsphase Zeit. Für die Arbeitsphase, die als Einzelarbeit gestaltet werden kann, sollten 10 Minuten zur Verfügung stehen.

Hinweise zu möglichen Schülerantworten

Mögliche Fragen und Antworten:

Frage	Antwort
Wie viele Schüler sind in der Klasse?	27
Welches ist die häufigste Lieblingstätigkeit?	Lesen
Was ist beliebter, Treffen mit Freunden oder Computerspielen?	Treffen mit Freunden

Es sind folgende kritische Überlegungen zur Durchführung der Befragung möglich:

- Es wird nicht klar, ob jeder Schüler nur eine Lieblingstätigkeit angeben durfte. Ansonsten kann man aus den Daten nicht auf die Anzahl der Schüler in der Klasse schließen.
- Die Kategorie Lesen ist sehr allgemein formuliert. Dahinter können sich unterschiedliche Tätigkeiten verbergen, wie Lesen von Zeitungen, Zeitschriften oder Büchern.
- Man kann sich auch mit Freunden treffen, um Computerspiele zu spielen.
- Die Anzahl der Lieblingstätigkeiten ist relativ gering für Schüler einer 5. Klasse, es fehlen z. B. weitere Sportarten, das Fernsehen und anderes.

Weitere Hinweise

Die Aufgabe könnte Anlass für eine selbst durchgeführte Befragung in der Klasse sein.

Aufgabe 4

Stimmt dies in deiner Klasse? Überlege, mit welchen Daten man dies untersuchen könnte.

Wir leben auf großem Fuß!

Rolle der Aufgabe in Lernprozessen

Mit der Aufgabe können die Kenntnisse und Fähigkeiten zur Planung und Auswertung von statistischen Untersuchungen weiterentwickelt werden. Klassendaten sind eine sehr gut geeignete Möglichkeit, die Schüler intensiv an den dabei auftretenden Problemen arbeiten zu lassen. Bei dieser Aufgabe ist es sinnvoll, sich auf die Planung einer Datenerfassung zu beschränken.

Hinweise zum Einsatz der Aufgabe

Die Schüler sollten zuerst überlegen, was mit der Formulierung gemeint sein könnte.
Hier könnten folgenden Deutungen erfolgen:

1. Es könnte die Fuß- bzw. Schuhgröße gemeint sein, die im Mittel besonders groß ist.
2. Es könnte auch um die finanziellen Verhältnisse bei den einzelnen Schülern gehen.
3. Es könnte der finanzielle Aufwand bei Klassenveranstaltungen gemeint sein.

Dann sollte eine Einigung auf den erstem oder dritten Gesichtspunkt erfolgen, da der zweite Ansatz schon aus Gründen des Datenschutzes nicht weiterverfolgt werden kann.

Die Frage für die selbstständige Schülerarbeit ist danach: Wie könnte man herausfinden, ob die Aussage in der betreffenden Deutung für unsere Klasse zutrifft. Für die Bearbeitung sollten den Schülern 10 Minuten zur Verfügung stehen.

Hinweise zu möglichen Schülerantworten

Zum Beantworten der Frage müssen neben den Daten der Klasse auch Daten aus vergleichbaren Populationen (Schüler der Altersgruppe; 5. Klassen) vorhanden sein. Diese werden in der Regel nicht vorliegen, so dass nur eine Diskussion der Möglichkeiten zur Datenerfassung erfolgen kann.

Aufgabe 5

Diese Zuschauertabelle ist nach dem letzten Spieltag einer Bundesliga-Saison entstanden.
Jede Mannschaft bestreitet in einer Saison 17 Heimspiele.

	Zuschauerzahlen bei den Heimspielen der Mannschaften		
Mannschaft	**am letzten Spieltag**	**Minimum in der Saison**	**Maximum in der Saison**
FC Bayern München	66 000	22 500	66 000
1. FC Köln	20 600	20 600	50 374
MSV Duisburg	61 500	14 000	66 000
DSC Arminia Bielefeld	35 000	18 000	35 000

a) Formuliere Fragen, die man mithilfe der Angaben aus der Tabelle beantworten kann und gib die jeweiligen Antworten an.
b) Vergleiche die Zuschauerzahlen und stelle eine Reihenfolge der Mannschaften auf.
Gib an, wie du die Mannschaften geordnet hast und was dies bedeuten könnte.

Rolle der Aufgabe in Lernprozessen

Das Hauptziel der Aufgabe ist die Entwicklung der Fähigkeiten im Lesen von Tabellen und in der Formulierung von Fragen, die mit Daten beantwortet werden können. Dabei werden die sprachlichen Fähigkeiten der Schüler entwickelt. Es werden die Wörter Minimum und Maximum geübt.
Die Schüler müssen weiterhin Zahlen lesen können und es werden die schriftlichen Verfahren der Addition und der Subtraktion natürlicher Zahlen wiederholt und geübt. Es können auch Vorstellungen zu großen Zahlen entwickelt werden, wenn geeignete Vergleiche etwa mit Einwohnerzahlen von Städten angestellt werden.
Ausgehend von der Angabe der maximalen Zuschauerzahl beim 1. FC Köln kann auch über sinnvolle Angaben und gerundete Werte bzw. Schätzungen diskutiert werden.
Mit der Teilaufgabe b) kann gezeigt werden, dass aus denselben Daten ganz unterschiedliche Schlussfolgerungen gezogen werden können.

Hinweise zum Einsatz der Aufgabe

Es sollte zunächst nur die Teilaufgabe a) bearbeitet werden, die nach unserer Einschätzung im Unterschied zur Teilaufgabe b) einen polyvalenter Charakter hat.
Fehlt die Teilaufgabe a), sollten 10 min für selbstständige Schülerarbeit und 20 min für die Präsentation der Ergebnisse eingeplant werden.
Die Teilaufgabe b) kann auch als Hausaufgabe gestellt werden.

Hinweise zu möglichen Schülerantworten:

Bei einer Erprobung ergaben sich folgende Erfahrungen:
– Es gab anregende Dispute, vor allem die Jungen fühlten sich angesprochen.
– Die gestellten Fragen waren recht einfach und liefen stets auf die Betrachtung der Angaben in einer Spalte hinaus: Wie viele Zuschauer waren mindestens im Stadion? Wie viele Zuschauer sahen an den Tagen mit den meisten Zuschauern insgesamt zu? Wie viele Zuschauer waren am letzten Spieltag bei den vier Mannschaften dabei?

Weiterhin sind noch folgende Fragestellungen möglich:
– Welche der vier Mannschaften hatte in der Saison die meisten/die wenigsten Zuschauer?
– Bei welcher Mannschaft ist der Unterschied zwischen Minimum und Maximum am größten/am kleinsten?

– Wie viele Zuschauer waren bei den Heimspielen von Bayern München mindestens/maximal anwesend? (22 500 · 16 + 66 000 = 426 000 / 22 500 + 66 000 · 16 = 1 078 500)

Bei der Teilaufgabe b) sind folgende Rangfolge möglich:
(M … München; K … Köln; D … Duisburg; B … Bielefeld)

Reihenfolge	Merkmal	mögliche Bedeutungen
K B D M	Anzahl der Zuschauer am letzten Spieltag	– Wie spannend war es bei den Mannschaften am letzten Spieltag? – Wie waren die Zuschauer mit dem Abschneiden der Mannschaften zufrieden?
D B K M	Minimum der Zuschauerzahlen	– Wie treu sind die Fans, wenn es nicht so läuft?
B K D/M	Maximum der Zuschauerzahlen	– Wie viele Zuschauer kommen, wenn es gut läuft oder der Gegner interessant ist?
B K M D	Differenz zwischen Maximum und Minimum	– Wie stabil sind die Zuschauerzahlen? – Wie lassen sich die Anhänger der Mannschaften durch die Leistungen beeinflussen? – Wie treu sind die Fans?

Aufgabe 6

Auf einem Kinderfest kann man an einem Glücksrad drehen, das rote, gelbe, grüne und blaue Felder hat. Nur wenn der Zeiger auf ein grünes Feld zeigt, gewinnt man. Die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen, ist genauso groß wie die Wahrscheinlichkeit, nicht zu gewinnen.
Zeichne solche Glücksräder und begründe.

Rolle der Aufgabe in Lernprozessen

Die Aufgabe ist eine Umkehraufgabe zum Bestimmen von Wahrscheinlichkeiten bei Glücksrädern. Mit der Aufgabe können die Kenntnisse der Schüler zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten bei gleich möglichen Ergebnissen (Laplace-Wahrscheinlichkeiten) gefestigt werden.

Hinweise zum Einsatz der Aufgabe

Die Aufgabe ist einsetzbar, nachdem die Laplace-Formel eingeführt wurde.
Die Schüler sollten eine Kopiervorlage mit 6 Kreisen und einer markierten Einteilung in 12 gleiche Teile als Vorlage enthalten. Es sollen weitere Kopien vorhanden sein, so dass nicht der Anschein erweckt wird, dass es nur 6 Lösungen gibt. Für eine bessere Präsentation an der Tafel können die Glücksräder auch vergrößert werden.
Die Schüler sollten mindestens 15 Minuten Zeit zum Finden der Möglichkeiten und zum Ausmalen erhalten.

Hinweise zu möglichen Schülerantworten

Analyse der Anforderungen:

Die Schüler müssen erkennen, dass die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen $\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$ beträgt und sie somit sechs grüne Segmente ausmalen müssen, was zusammen der Fläche eines halben Kreises entspricht. Die Vielzahl der möglichen Ergebnisse ergibt sich aus der unterschiedlichen Größe der einzelnen Sektoren (1 Halbkreis, 2 Viertel-, 3 Sechstel-, 4 Achtel- oder 6 Zwölftelkreise) und ihrer Anordnung sowie in der Möglichkeit die verbleibenden Sektoren unterschiedlicher Weise mit den restlichen Farben auszumalen. Die restlichen Farben müssen entsprechend der Beschreibung des Glücksrades alle verwendet werden.

Aufgabe 7

Anja zählt in jeder Stunde, wie oft sie sich gemeldet hat und schreibt die Ergebnisse auf.
In den 6 Stunden am Montag hat sie folgendes notiert: 5, 3, 4, 8, 6, 4.

a) Am Dienstag hat sie erneut 6 Stunden Unterricht. Sie möchte im Durchschnitt die gleiche Anzahl von Meldungen erreichen wie am Montag. Schreibe auf, wie oft sie sich in den Stunden melden müsste.
b) Am Mittwoch hat sie nur 5 Stunden Unterricht. Wie oft müsste sie sich in diesen Stunden melden, wenn sie im Durchschnitt wieder die gleiche Anzahl von Meldungen erreichen möchte?

Rolle der Aufgabe in Lernprozessen

Mit Aufgabe können die Kenntnisse der Schüler zum arithmetischen Mittel gefestigt werden. Insbesondere wird die Interpretation des arithmetischen Mittels als Ausgleichswert vertieft. In diesem Fall bedeutet das, dass das arithmetische Mittel der Wert ist, der sich ergibt, wenn Anja sich in jeder Stunde gleich oft gemeldet hätte.
Daneben hat der Mittelwert noch eine zweite Interpretationsmöglichkeit, nämlich als Schwerpunkt einer Häufigkeitsverteilung. Dazu müsste eine Häufigkeitsverteilung gezeichnet werden, aus der sich dann der Schwerpunkt ergibt.

Hinweise zum Einsatz der Aufgabe

Die Aufgabe kann nach Einführung des arithmetischen Mittels eingesetzt werden.
Für die selbstständige Bearbeitung beider Teilaufgaben sollten 15 Minuten eingeplant werden. Es ist sinnvoll, die Schüler beide Teilaufgaben lösen zu lassen, bevor die Präsentation der Ergebnisse erfolgt, da sich aus einem möglichen Sonderfall bei Teilaufgabe a) sofort die Lösung für b) ergibt.

Hinweise zu möglichen Schülerantworten

Analyse der Anforderungen:
Zur Lösung der Teilaufgabe a) muss nicht das arithmetische Mittel der Meldungen berechnet werden. Im einfachsten Fall können die gleichen Anzahlen genannt werden. In Anwendung des arithmetischen Mittels als Ausgleichswert können die Schüler auch einfach eine andere Verteilung der gleichen Anzahl etwa auch nur zwischen 2 Stunden vornehmen. Als Sonderfall kann sich bei diesen Umverteilungen bereits ergeben, dass sich Anja in jeder Stunde fünfmal gemeldet hat.
Wenn der Schüler bei der Teilaufgabe a) bereits den Sonderfall der Gleichverteilung gefunden hat, kann er sofort auf die durchschnittliche Anzahl der Meldungen am Mittwoch schließen. Ansonsten müsste das arithmetische Mittel der Werte von Montag berechnet werden. Es beträgt 30 **:** 6 = 5. Die Summe aller Meldungen muss am Dienstag also 25 ergeben. Alle entsprechenden Mengen aus fünf natürlichen Zahlen, deren Summe 25 ergibt, sind somit Lösung.

Aufgabe 8

Zwei Mannschaften wetteifern darum, welche die beste im Werfen sei. Dazu darf jedes Mannschaftsmitglied einen schweren Ball genau einmal werfen. Die Ergebnisse lauten:

Mannschaft 1:	14 m,	12 m,	19 m,	14 m,	13 m,	18 m	
Mannschaft 2:	11 m,	21 m,	10 m,	10 m,	17 m,	16 m,	13 m

Die Jury kann sich nicht einigen, welche Mannschaft gewonnen hat. Wie würdest Du entscheiden? Begründe!

Rolle der Aufgabe in Lernprozessen

Mithilfe der Aufgabe können die Schüler erleben, dass man aus denselben Daten durchaus ganz unterschiedliche Schlussfolgerungen ziehen kann. Im Zusammenhang mit der Auswertung der Daten können die Kenntnisse zur Berechnung des arithmetischen Mittels gefestigt werden.

Hinweise zum Einsatz der Aufgabe

Die Schüler führen im Sportunterricht verschiedene Arten von Wettbewerben durch und können schnell verschiedene Ideen entwickeln. Hilfreich ist auch die Frage: Wenn du in Mannschaft 1 (oder 2) wärst, wie würdest du der Jury begründen, warum gerade deine Mannschaft gewonnen hat?
Da das Aufschreiben mehrerer Ideen für die Schüler viel Zeit in Anspruch nimmt, sollten für die Erarbeitung 15 Minuten eingeplant werden.

Hinweise zu möglichen Schülerantworten:

Analyse der Anforderungen:

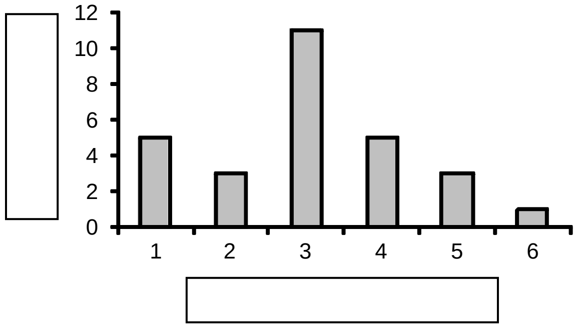
Abhängig von der für die Auswertung der Daten verwendeten Methode erscheint entweder Mannschaft 1 oder Mannschaft 2 als Sieger:

Auswertungsmethode	Mannschaft 1	Mannschaft 2	Sieger
arithmetisches Mittel über alle Würfe	15 m	14 m	Mannschaft 1
bester Wurf	19 m	21 m	Mannschaft 2
arithmetisches Mittel der besten drei Würfe	17 m	18 m	Mannschaft 2
arithmetisches Mittel aus bestem und schlechtestem Wurf	15,5 m	15,5 m	unentschieden

Eine weitere Auswertungsmethode könnte das Streichen des besten und schlechtesten Wurfs und die anschließende Auswertung der verbleibenden Daten sein.

Aufgaben zur Stochastik

1. Was könnten die Angaben in dem Diagramm bedeuten? Finde für dein Beispiel die Beschriftung für die Achsen.



2. Der Tourismusverband Mecklenburg-Vorpommern möchte wissen, wie viele Urlauber im September ungefähr auf der Insel Rügen waren.
Wie könnte der Tourismusverband dies ermitteln?

3. Alle Schüler einer 5. Klasse gaben in einer Umfrage ihre Lieblingstätigkeit an.
Stelle Fragen, die man mit diesen Daten beantworten kann.

Lieblingstätigkeit	**Anzahl der Schüler**
Fußball spielen	3
Treffen mit Freunden	8
Lesen	10
Computerspiele spielen	6

4. Stimmt dies in deiner Klasse? Überlege, mit welchen Daten man dies untersuchen könnte.

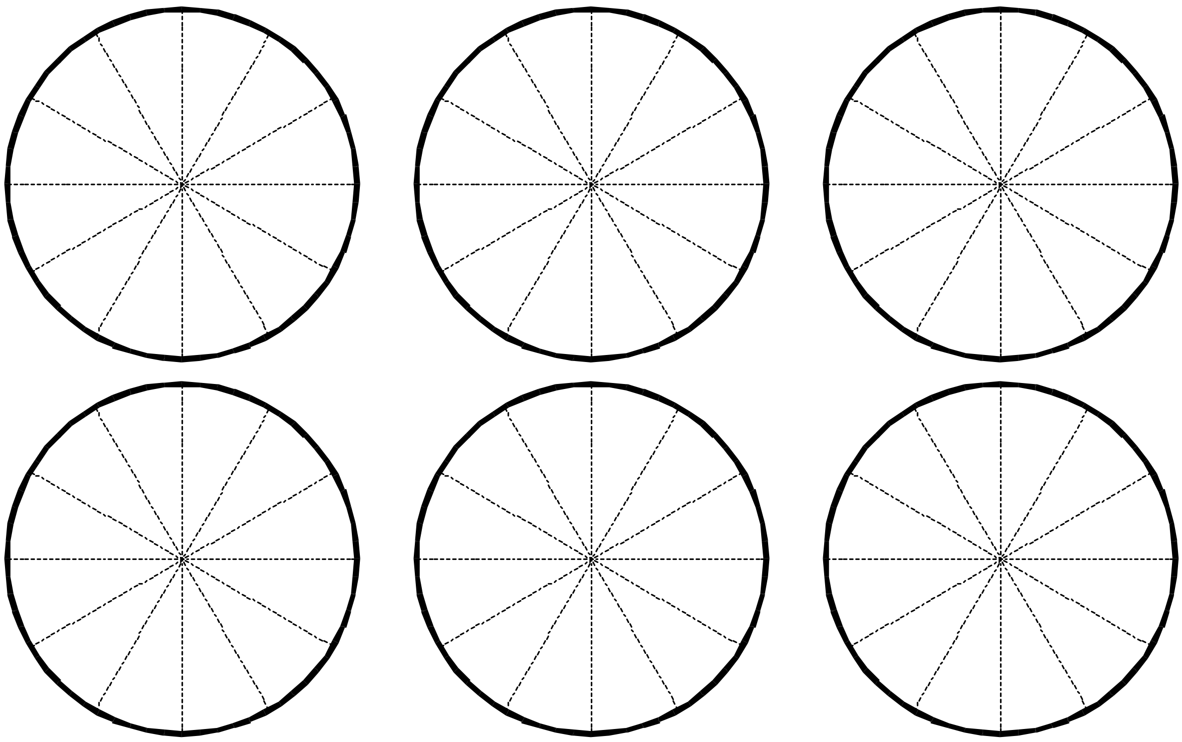
Wir leben auf großem Fuß!

5. Diese Zuschauertabelle ist nach dem letzten Spieltag einer Bundesliga-Saison entstanden. Jede Mannschaft bestreitet in einer Saison 17 Heimspiele.

	Zuschauerzahlen bei den Heimspielen der Mannschaften		
Mannschaft	**am letzten Spieltag**	**Minimum in der Saison**	**Maximum in der Saison**
FC Bayern München	66 000	22 500	66 000
1. FC Köln	20 600	20 600	50 374
MSV Duisburg	61 500	14 000	66 000
DSC Arminia Bielefeld	35 000	18 000	35 000

a) Formuliere Fragen, die man mithilfe der Angaben aus der Tabelle beantworten kann und gib die jeweiligen Antworten an.
b) Vergleiche die Zuschauerzahlen und stelle eine Reihenfolge der Mannschaften auf.
Gib an, wie du die Mannschaften geordnet hast und was dies bedeuten könnte.

6. Auf einem Kinderfest kann man an einem Glücksrad drehen, das rote, gelbe, grüne und blaue Felder hat. Nur wenn der Zeiger auf ein grünes Feld zeigt, gewinnt man. Die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen, ist genauso groß wie die Wahrscheinlichkeit, nicht zu gewinnen.
Zeichne solche Glücksräder und begründe.



7. Anja zählt in jeder Stunde, wie oft sie sich gemeldet hat und schreibt die Ergebnisse auf.
In den 6 Stunden am Montag hat sie folgendes notiert: 5, 3, 4, 8, 6, 4.

a) Am Dienstag hat sie erneut 6 Stunden Unterricht. Sie möchte im Durchschnitt die gleiche Anzahl von Meldungen erreichen wie am Montag.
Schreibe auf, wie oft sie sich in den Stunden melden müsste.

b) Am Mittwoch hat sie nur 5 Stunden Unterricht.
Wie oft müsste sie sich in diesen Stunden melden, wenn sie im Durchschnitt wieder die gleiche Anzahl von Meldungen erreichen möchte?

8. Zwei Mannschaften wetteifern darum, welche die beste im Werfen sei. Dazu darf jedes Mannschaftsmitglied einen schweren Ball genau einmal werfen. Die Ergebnisse lauten:

Mannschaft 1:	14 m,	12 m,	19 m,	14 m,	13 m,	18 m	
Mannschaft 2:	11 m,	21 m,	10 m,	10 m,	17 m,	16 m,	13 m

Die Jury kann sich nicht einigen, welche Mannschaft gewonnen hat.
Wie würdest Du entscheiden? Begründe!

7 Geometrie

7.1 Hinweise zu den Aufgaben zur ebenen Geometrie

Aufgabe 1

Finde Gemeinsamkeiten und Unterschiede in der Bedeutung des Wortes "Strecke" in der Mathematik und in den folgenden Formulierungen:

a) Auf der Strecke von Berlin nach Rostock kommt es zu Verspätungen im Zugverkehr.

b) Die letzte Strecke des Weges gingen sie zu Fuß.

c) Die Läufer legen eine Strecke von 100 m zurück.

Rolle der Aufgabe in Lernprozessen
Das Wort "Strecke" hat wie auch andere geometrische Grundbegriffe (zum Beispiel "Punkt" und "Strahl") im alltäglichen Gebrauch und in der mathematischen Fachsprache unterschiedliche Bedeutungen. Den Schülern sind diese Bedeutungen aus dem Alltag und dem Mathematikunterricht in der Grundschule bekannt. Mit dieser Aufgabe können die Kenntnisse der Schüler zum mathematischen Begriff der Strecke, insbesondere zur Darstellung und Bezeichnung von Strecken gefestigt werden.

Sie können weiterhin erleben, dass die mathematischen Begriffe aus der Wirklichkeit entstanden sind, aber immer nur bestimmte Eigenschaften beinhalten. Die Wirklichkeit ist immer viel reichhaltiger als die Mathematik, die eine Idealisierung bestimmter Verhältnisse darstellt. Die Schüler können mit diesem Aufgabentyp weiterhin daran gewöhnt werden, bei jedem neuen Begriff in der Mathematik nach seinen Bezügen und zur Bedeutung dieses Wortes im Alltag zu suchen

Hinweise zum Einsatz der Aufgabe
Die Aufgabe kann zu Beginn des Geometrieunterrichts in der Klasse 5 bei der Wiederholung der Kenntnisse aus der Grundschule eingesetzt werden.
Die Schüler sollten in etwa 10 min in Einzel- oder Partnerarbeit ihre Gedanken zu Gemeinsamkeiten und Unterschieden schriftlich in geeigneter Form darstellen.

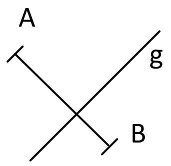
Hinweise zu möglichen Schülerantworten
Gemeinsamkeiten der Bedeutungen der Wörter:
Alle Strecken haben eine Länge. Alle Strecken werden durch zwei Punkte begrenzt, die allerdings bei der Bahnstrecke nicht eindeutig bestimmt sein müssen.

Unterschiede in den Bedeutungen:
Die Bahnstrecke und die Wegstrecke sind in der Regel nicht geradlinig, während eine Laufstrecke von 100 Metern im Normalfall geradlinig ist. Eine Strecke in der Mathematik ist die kürzeste Verbindung zweier Punkte. Das trifft nur für die Laufstrecke zu.

Bei einer Strecke in der Mathematik sind die Endpunkte gleichberechtigt, man kann eigentlich nicht vom Anfangs und Endpunkt einer Strecke sprechen. Bei den drei Strecken in der Realität sind die Endpunkte nicht gleichwertig, es handelt sich jeweils um den Start und das Ziel einer gerichteten Bewegung.

Weitere Hinweise
Es könnte mit interessierten Schülern darüber diskutiert werden, ob man in der Mathematik auch von einem Anfangs- und einem Endpunkt einer Strecke sprechen könnte. Damit werden die gerichteten Strecken (Verschiebungspfeil in Kl. 6, Vektoren in Kl. 12) vorbereitet.

Aufgabe 2



Untersuche die Bedeutung des Wortes "senkrecht" in den folgenden Zusammenhängen.

a) Die Strecke $\overline{AB}$ ist senkrecht zur Geraden g.
Betrachte verschiedene Lagen der Geraden g und der Strecke $\overline{AB}$.

b) Der Zaunpfahl steht senkrecht.
Betrachte Zaunpfähle in einem ebenen Gelände und Zaunpfähle an einem Berg.

Rolle der Aufgabe in Lernprozessen
Im Alltag wird das Wort "senkrecht" als Gegenbegriff zu "waagerecht" wie ein Eigenschaftsbegriff behandelt, das heißt, man kann von einem Objekt sagen, ob es senkrecht ist bzw. senkrecht steht oder nicht. Diese Bedeutung ist im semantischen Netz der Schüler fest verhaftet. In der Mathematik ist "senkrecht" ein Relationsbegriff, das heißt, ein Objekt kann nur senkrecht zu einem anderen sein. Deshalb sollte auch stets die Wortverbindung "senkrecht zu" bzw. "senkrecht zueinander" im Unterricht verwendet werden. Das Beherrschen der Relation "senkrecht zu" sollte zum sicheren Wissen und Können der Schüler gehören, da es an vielen Stellen im Unterricht verwendet wird, so zum Beispiel beim Erkennen von Höhen in Figuren und Körpern, auch wenn diese "schräg" liegen. Die Aufgabe kann also eine wesentliche Rolle in diesem Lernprozess spielen.

Hinweise zum Einsatz der Aufgabe
Als Einstieg hat eine Kollegin von einem Schüler eine Kerze in einen Leuchter stellen lassen (es war gerade Weihnachtszeit) und die anderen Schüler sollten das Resultat beurteilen.

Die Schüler sollten zunächst die Teilaufgabe a) in selbstständiger Arbeit etwa 10 min lang bearbeiten. Dann kann eine Präsentation der Ergebnisse an der Tafel erfolgen, indem die Schüler mit Lineal und Geodreieck die verschiedenen Lagemöglichkeiten anzeichnen und ihre Gedanken dazu äußern.

Hinweise zu möglichen Schülerantworten
Zur Beschreibung der Stellung der Kerze im Leuchter verwendeten die Schüler unter anderem folgende Ausdrücke: "schief", "schräg", "steht nicht gerade", "ist nicht kerzengerade", "steht nicht aufrecht", "steht nicht senkrecht".

Gemeinsamkeiten: In beiden Fällen treten rechte Winkel auf.

Unterschiede: Eine Strecke und eine Gerade bilden, wenn die Eckpunkte der Strecke nicht auf der Geraden liegen, vier rechte Winkel. Der Zaunpfahl und die Erdoberfläche (eben, bei vernachlässigter Krümmung) bilden zwei rechte Winkel. Der Zaunpfahl ist immer senkrecht zur Horizontalen. Wenn eine Gerade schräg zu einer Heftkante verläuft, dann verläuft auch die Strecke schräg zur Heftkante. Das Wort 'waagerecht' ist kein mathematischer Begriff, sondern bezieht sich auf die Erdoberfläche. Ein Zaunpfahl kann senkrecht stehen und trotzdem schräg zu seiner Standfläche sein, zum Beispiel an einem Hang.

Weitere Hinweise
Es können auch Bezüge zur Bedeutung der Wörter lotrecht, horizontal und vertikal hergestellt werden. Es handelt sich dabei ebenfalls nicht um mathematische Begriffe, sondern um Relationen, die Gemeinsamkeiten mit der Relation der Orthogonalität (rechter Winkel) in der Mathematik haben.

Aufgabe 3

Ein Raum besitzt eine Grundfläche von 36 m².
Welche Form kann die Grundfläche dieses Raumes haben?

Rolle der Aufgabe in Lernprozessen

Die Aufgabe ist als Umkehraufgabe zur Berechnung des Flächeninhalts von Rechtecken ein notwendiger Bestandteil der Entwicklung des entsprechenden Könnens und sollte in der Phase der Festigung der Flächeninhaltsformel eingesetzt werden.

Die notwendigen Überlegungen zur verschiedenen Form von Räumen können die Freude am Lösen von Sachaufgaben und die Bereitschaft zur Analyse des Sachverhaltes entwickeln.

Hinweise zum Einsatz der Aufgabe

Die Schüler sollten 10 min Zeit für die selbstständige Arbeit erhalten und die möglichen Grundrisse der Räume mit den entsprechenden Maßen in ihrem Heft skizzieren. Bei der Präsentation der Ergebnisse sollten diese Skizzen dann an die Tafel gezeichnet werden.

Hinweise zu möglichen Schülerantworten

Als Lösungen können zunächst Rechtecke mit den entsprechenden Seitenlängen (Spezialfall: Quadrat mit Seitenlänge 6 m) erwartet werden. Das gründliche Analysieren des Sachverhaltes führt zum Ausschluss wenig wahrscheinlicher Lösungsmöglichkeiten (z. B. 1 m × 36 m). Die Wahl nicht ganzzahliger Seitenlängen (z. B. 8,5 m × 4 m) erfordert ein tieferes Zahlenverständnis. Die Betrachtung verwinkelter Räume, d. h. von aus Rechtecken zusammengesetzten Figuren sind qualitativ höherwertige Lösungsideen, ebenso wie allgemeine Lösungsvorschläge. Mathematisch begabte Schüler könnten über den Schulstoff hinausgehende Formen einbeziehen, die keine Rechtecke sind oder in sie zerlegt werden können (z. B. rechtwinklige Dreiecke).

Aufgabe 4

Bauer Piepenbrink möchte mit 16 Zaunfeldern einen neuen Hühnerhof einzäunen. Jedes Zaunfeld ist 1 m lang. Welche Form kann der Hühnerhof haben?

Rolle der Aufgabe in Lernprozessen

Mit dieser Aufgabe, die bei einer entsprechenden Gestaltung einen hohen Erlebniswert für die Schüler hat, kann ein prototypisches Beispiel für den Begriff "Umfang einer Figur" nachhaltig im Gedächtnis der Schüler verankert werden. Bei jeder Umfangsberechnung in den folgenden Klassen bis zur Klasse 10 könnte mit dem Stichwort "Bauer Piepenbrink" oder "Hühnerhof" an dieses Beispiel erinnert werden. Es ist nicht erforderlich, wie es leider oft geschieht, spezielle Formeln für die Berechnung des Umfangs von Figuren zu behandeln, wenn die Schüler einen allgemeinen Umfangsbegriff als Länge des Randes einer Figur verinnerlicht haben.

Hinweise zum Einsatz der Aufgabe

Die Aufgabe sollte in engem Zusammenhang mit der Wiederholung des Begriffs "Umfang", den die Schüler bereits aus der Grundschule kennen, bzw. mit der Behandlung des Umfangs von Rechtecken und Quadraten bearbeitet werden.

In den zahlreichen Erprobung in dieser Aufgabe wurden folgende Erfahrungen zur Gestaltung des Unterrichts gesammelt.

- Zu Beginn war es oft erforderlich, den Begriff Zaunfeld zu klären.
- Bei Verwendung von gegenständlichen Hilfsmitteln wurde vereinbart, dass jeder 1 m veranschaulichen soll. Bei Zeichnungen auf kariertem Papier sollte vorher festgelegt werden, dass 2 Kästchen und zur Vereinfachung auch eine Diagonale (2 x 2 Kästchen) 1 m entsprechen sollen.
- Die in der ursprünglichen Fassung der Aufgabe verwendete Anzahl von 36 Zaunfeldern erwies sich insbesondere bei einem Einsatz von Hilfsmitteln und bei dem Skizzieren der Formen als zu

groß. Mit der Anzahl von 24 Zaunfeldern wurden gute Erfahrung gemacht, aber auch eine Anzahl von 16 Zaunfeldern erwies sich als ausreichend.

- Bei vielen Erprobungen haben die Schüler zunächst mit Hilfsmitteln (z. B. Zaunfeldern aus Plaste, Holzstäbchen, Streichhölzer, Zahnstocher, Faserstifte) mögliche Figuren gelegt. Dabei war eine Partner- oder Gruppenarbeit oft sinnvoll. Anschließend wurden ausgewählte Formen skizziert.
- Nachdem jede Schülergruppe einen Hühnerhof gelegt hatte, durften alle Schüler in einer Reihe durch die Klasse gehen und sich alle Figuren anschauen.
- Wenn sofort auf kariertem Papier gezeichnet wird, ist dies in Einzelarbeit möglich und erfordert einen geringeren Zeitaufwand.
- Ausgehend vom Sachverhalt wurde zum Teil die Frage aufgeworfen, welche der Hühnerhöfe am besten wären ("glückliche Hühner"). Dies führte dann zu umfangreichen Diskussionen über eine artgerechte Tierhaltung, Kuschel- und Schlafplätze und anderes.
- Ausgewählte Formen von Schülern oder Schülergruppen wurden auf Folie oder weißem Papier gezeichnet und an die Tafel geheftet.
- Nach der Präsentation der Ergebnisse durch die Schüler erfolgte eine Verallgemeinerung der Lösungen. Es wurde mit den Schülern erarbeitet, dass die unterschiedlichen Formen eine gemeinsame Eigenschaft, nämlich die gleiche Länge des Randes haben und dies als Umfang der Figur bezeichnet wird. In den Erprobungen zeigte sich, dass die Schüler das Wort Umfang von sich heraus bei der Aufgabe nicht verwendeten, obwohl es aus dem bisherigen Unterricht bereits bekannt war.
- Es ist zur weiteren Festigung des Begriffs Umfang sinnvoll, im Anschluss an diese Aufgabe Umfänge an Gegenständen und Personen schätzen und messen zu lassen sowie eine zeichnerische und rechnerische Ermittlung des Umfangs von Figuren durchzuführen. Bei dieser Vorgehensweise zeigte sich, dass die Schüler mit dem Begriff Umfang wesentlich sicherer umgehen konnten als vorher.
- Für die Aufgabe wird insgesamt mindestens eine Unterrichtsstunde, bei Verwendung von gegenständlichen Hilfsmitteln bis zu einer Doppelstunde benötigt.

Hinweise zu möglichen Schülerantworten

- Die Schüler haben bei den Erprobungen, insbesondere bei Verwendung von gegenständlichen Hilfsmitteln eine sehr große Anzahl unterschiedlicher, oft sehr fantasievoller Formen von Hühnerhöfen gefunden, die unsere ursprünglichen Erwartungen, dass die Schüler nur Formen mit rechten Innenwinkeln oder regelmäßige Figuren zeichnen würden, weit übertrafen. Originelle Formen waren zum Beispiel tannenbaumähnliche Konstruktionen, treppenähnliche Variationen, Tulpenformen, Labyrinthe oder auch das Gesicht eines Fuchses.
- Sollten die Schüler die Formen sofort auf kariertem Papier skizzieren, war die Anzahl möglicher Formen nicht zu groß und es traten vor allem Rechtecke beziehungsweise aus Rechtecken zusammengesetzte Figuren auf, aber auch andere meist regelmäßige Figuren wie Dreiecke, Trapeze, Sechsecke, Parallelogramme oder Drachenvierecke.
- Ohne entsprechende Hinweise durch den Lehrer haben Schüler teilweise noch Zaunfelder in den Hühnerhof hinein gebaut.
- Bei direkter Arbeit auf kariertem Papier sind leistungsstärkere Schüler bei der Planung systematischer vorgegangen, während die anderen erst einmal probierten und dann das Resultat entsprechend korrigierten.
- In einer Klasse hatte jeder der 20 Schüler 16 Streichhölzer erhalten und alle haben in 10 min drei verschiedene Lösungsmöglichkeiten gefunden und auch skizziert, von denen alle nur rechte Winkel hatten.

Weitere Hinweise

Bei dieser Aufgabe besteht die Gefahr, dass die Stunde zu einer reinen Spielstunde wird, die den Schülern zwar großen Spaß macht und zu vielen Diskussionen herausfordert, aber letztlich einen geringen Beitrag zur Entwicklung ihres mathematischen Wissens und Könnens leistet.

Bei dem gewählten Sachverhalt ist es nahe liegend, die Frage zu stellen, wie groß die Fläche des eingezäunten Hofes ist und wie man eine möglichst große Fläche erhalten könnte. Dies führt auf das so genannte isoperimetrische Problem (Bestimmung einer Fläche größten Inhalts bei gegebenem Umfang), das für Spezialfälle in der Oberstufe mithilfe der Differenzialrechnung bearbeitet wird. Eine solche Diskussion sollte möglichst vermieden werden, da sie vom eigentlichen Anliegen, der Entwicklung des Umfangsbegriffes ablenkt.

Aufgabe 5

Ermittle den Flächeninhalt der abgebildeten Figur. Beschreibe dein Vorgehen. 2 Kästchenlängen entsprechen 1 cm.

Rolle der Aufgabe in Lernprozessen
Die Aufgabe kann einen bedeutenden Beitrag zur Entwicklung des Begriffs "Flächeninhalt" bei den Schülern leisten und an verschiedenen Stellen des Entwicklungsprozesses eingesetzt werden. In der Grundschule erwerben die Schüler Vorstellungen zum Flächeninhalt durch manuelle Tätigkeiten wie Auslegen oder Zerschneiden von Figuren. Sie lernen, dass Figuren den gleichen Flächeninhalt haben, wenn sie aus gleichen Teilfiguren zusammengesetzt sind. Bei der Einführung des Flächenmaßes und der Berechnung von Flächeninhalten in der Orientierungsstufe sollte an diese Vorstellungen angeknüpft werden.

Bereits in der Orientierungsstufe sollten die Schüler mit dem Problem der Bestimmung des Flächeninhalts zusammengesetzter Flächen vertraut gemacht werden, das dann in den oberen Klassen eine zunehmende Rolle spielt. An dieser Aufgabe können die beiden unterschiedlichen Methoden, das Zerlegen in Teilfiguren bzw. das Ergänzen zu einer Gesamtfigur gut veranschaulicht werden.

Hinweise zum Einsatz der Aufgabe
Die Aufgabe kann bereits vor der Behandlung der Flächeninhaltsformeln eingesetzt werden, aber ein Einsatz im Rahmen gemischter Übungen in diesem Stoffgebiet bietet größere Möglichkeiten für unterschiedliche Vorgehensweisen.

Bei den bisher nur wenigen Erprobungen der Aufgabe wurden folgende Erfahrungen gemacht.
- Jeder Schüler hat eine oder mehrere Kopien der Figur zur selbstständigen Arbeit erhalten. Bei einer Vergrößerung der Vorlage wurde darauf hingewiesen, dass zwei Kästchenlängen immer noch 1 cm entsprechen sollen.
- Die Schüler konnten entsprechende Einteilungen auf diesen Arbeitsblättern vornehmen oder sie auch zerschneiden.
- Die Schüler arbeiteten einzeln oder in Partnerarbeit.
- Die Lösung der Schüler wurde auf einer Folie oder durch Arbeitsblätter an der Tafel präsentiert.
- Das Beschreiben der Lösungsmöglichkeiten erfolgte mündlich.

Hinweise zu möglichen Schülerantworten
Es konnte folgendes Schülerverhalten bzw. folgende Schülerantworten beobachtet werden.
- Viele Schüler haben die Figur in Einheitsquadrate unterteilt und diese ausgezählt.
- Es wurde die Figur in drei oder fünf Rechtecke zerlegt und der Flächeninhalt ebenfalls durch Auszählen der Einheitsquadrate ermittelt.
- Die Figur wurde durch Einzeichnen von einer oder zwei Symmetrieachsen in kongruente Teile zerlegt und deren Inhalt durch Auszählen bestimmt.
- Die Figur wurde zu einem Rechteck ergänzt und der Flächeninhalt durch Subtraktion des Inhalts der vier kleinen Quadrate ermittelt.
- In wenigen Fällen haben die Schüler auch nach einer geeigneten Zerlegung bzw. Ergänzung eine Berechnung des Flächeninhalts der Teilflächen vorgenommen.
- Alle Schüler haben sich bemüht, mehrere Möglichkeiten zur Ermittlung des Flächeninhalts zu finden.

Weitere Hinweise
Wegen der Bedeutung der verschiedenen Möglichkeiten zur Bestimmung des Flächeninhalts zusammengesetzter Figuren sollte in einer dritten Arbeitsphase eine Zusammenstellung und Systematisierung der Möglichkeiten erfolgen.

Aufgabe 6

Vergleiche eine achsensymmetrische und eine drehsymmetrische Figur miteinander.
Finde Gemeinsamkeiten und Unterschiede.

Rolle der Aufgabe in Lernprozessen
Die Behandlung der Spiegelung und Drehung sollte im engen Wechselverhältnis mit den entsprechenden Symmetrien, der Achsen- und der Drehsymmetrie erfolgen. Die Untersuchung von Symmetrien realer Objekte in dieser Aufgabe verdeutlicht den engen Bezug geometrischer Abbildungen zur Wirklichkeit.

Hinweise zum Einsatz der Aufgabe
Die Aufgabe sollte im Rahmen gemischter Übungen nach Behandlung der Verschiebung und Drehung eingesetzt werden.

Nach 10 min selbstständiger Schülerarbeit können die Gedanken zusammengetragen werden.

Hinweise zu möglichen Schülerantworten
Es lassen sich insgesamt 9 Paare bilden, die unter unterschiedlichen äußeren oder mathematischen Gesichtspunkten verglichen werden können.
Mögliche Gemeinsamkeiten: Es handelt sich um Verkehrsschilder. Die Blumen sind nicht genau symmetrisch. Drehung um 180°: Hauptstraße, linke Blume (Blaukissen), Bube, rechte Blume (Vergissmeinnicht); mehrere Symmetrieachsen: Hauptstraße, Vorfahrt,
Mögliche Unterschiede: Anzahl der Blütenblätter; Anzahl der Symmetrieachsen; Drehwinkel 120°;
Antworten auf höherem Niveau: Die Verkehrszeichen und Blüten sind sowohl achsen- als auch drehsymmetrisch.

Aufgabe 7

Erkenne Buchstaben, bei denen Nebenwinkel, Scheitelwinkel, Stufenwinkel oder Wechselwinkel vorkommen und kennzeichne die betreffenden Winkel.

Rolle der Aufgabe in Lernprozessen
Die Winkelbegriffe und Winkelsätze an geschnittenen Geraden und Parallelen gehören zum reaktivierbaren Wissen und Können, das im weiteren Mathematikunterricht an mehreren Stellen benötigt wird. Mit dieser Aufgabe kann das Erkennen der Winkel in außermathematischen Sachverhalten gefestigt werden. Weiterhin wird deutlich, dass diese Winkelbegriffe Relationsbegriffe sind, das heißt, dass die Schüler immer Paare von Winkeln finden müssen.

Hinweise zum Einsatz der Aufgabe
Die Aufgabe sollte in den gemischten Übungen nach Behandlung der Winkelsätze an geschnittenen Parallelen eingesetzt werden. Die Schüler sollten die Buchstaben als Vorlage erhalten und dort die entsprechenden Winkel mit gleichen Farben markieren.

Hinweise zu möglichen Schülerantworten
Jeder Schüler sollte leicht Neben- und Scheitelwinkel z. B. bei **T** und **X** finden. Etwas mehr Überlegungen sind für Stufen- und Wechselwinkel nötig (z. B. **E, F**, **Z**).
Auf dem höchsten Niveau liegen bei dieser Aufgabe etwa folgende mögliche Schülerantworten, die für ein vertieftes Verständnis der Winkelbegriffe sprechen:

- Der Buchstabe **Y** hat keine Nebenwinkel, obwohl zwei Winkel nebeneinander liegen.
- Es gibt Buchstaben, bei denen mehrere Arten von Winkelpaaren vorkommen (**H, E, F**), aber keinen Buchstaben, bei dem alle Arten vorkommen.

Das Auffinden der Winkel bei den Buchstaben **B, D, P** und **R** ist von der verwendeten Schriftart abhängig. Für die verwendete Schrift "Arial" erfüllen diese Buchstaben die Aufgabenstellung.

Buchstaben mit Nebenwinkeln	A, E, F, H, K, T	B, P, R
Buchstaben mit Scheitelwinkeln	X	
Buchstaben mit Stufenwinkeln	E, F	B, P, R
Buchstaben mit Wechselwinkeln	H, N, Z, W	B, D, P, R

Weitere Hinweise

Die Begriffe Wechselwinkel und Stufenwinkel sind nicht an das Vorhandensein paralleler Geraden gebunden. So müssen beim Buchstaben **W** die schrägen Linien nicht parallel zueinander sein, damit Wechselwinkel vorliegen.

Aufgabe 8

Das Dreieck ABC ist rechtwinklig und gleichschenklig. Weiterhin ist AE $\perp$ BC und GF || AB.
Bestimme die Größe von Winkeln in dieser Figur und begründe deine Angaben.

Rolle der Aufgabe in Lernprozessen

Mit dieser Aufgabe kann die Einstellung der Schüler zum selbstständigen Finden von Begründungen und Argumenten entwickelt werden. Im Unterschied zu den üblichen Beweisaufgaben ist in dieser Aufgabe kein konkretes Ziel vorgegeben, so dass ein Schüler bereits mit wenigen Berechnungen die Aufgabenstellung erfüllen kann.

Es können Winkelbeziehungen und Eigenschaften von Dreiecken, insbesondere von gleichschenkligen Dreiecken gefestigt werden.

Hinweise zum Einsatz der Aufgabe

Die Aufgabe kann nach der Behandlung des Basiswinkelsatzes und des Innenwinkelsatzes im Dreieck eingesetzt werden.

Die Schüler sollten eine Vorlage mit der Konfiguration erhalten, in der sie die Winkel markieren und beschriften können. Die Begründungen sollten schriftlich erfolgen.

Nach 15 min selbstständiger Arbeit sollten die Ergebnisse an der Tafel zusammengetragen werden oder schrittweise auf einer Folie notiert werden.

Hinweise zu möglichen Schülerantworten

Der offene Charakter der Aufgabe entsteht durch die Begrenzung der Arbeitszeit. Es ist nicht beabsichtigt, dass ein Schüler in der zur Verfügung stehenden Arbeitszeit alle Lösungen findet. Da die Aufgabe unterschiedliche Herangehensweisen ermöglicht, kann die vollständige Lösung im Unterrichtsgespräch entwickelt werden.
Jeder Schüler sollte die rechten Winkel, die Neben- bzw. Scheitelwinkel bei F und unter Anwendung des Basiswinkelsatzes (sicheres Wissen und Können) die Winkel mit der Größe 45° finden.
Eine vollständige Lösung könnte wie folgt aussehen.

Winkel	Größe	Mögliche Begründung
CFE	75	Nebenwinkel zu Winkel EFD
AFD	75	Nebenwinkel zu Winkel EFD
AEC	90	Rechter Winkel
FCE	15	Innenwinkelsummensatz
ADE	90	Rechter Winkel
AFC	105	Scheitelwinkel zu Winkel EFD

Winkel	Größe	Mögliche Begründung
EAB	45	halber rechter Winkel im gleichschenkligen Dreieck
EAC	45	
ADF	60	Innenwinkelsummensatz
BDC	120	Nebenwinkel zu Winkel ADC
DBC	45	Eigenschaft des gleichschenkligen Dreiecks bzw. Innenwinkelsummensatz
ACB	45	
ACD	30	Innenwinkelsummensatz

Weitere Hinweise

Die Ergebnisse der Winkelgrößen sind durch die entsprechenden Vorgaben eindeutig.
Für weitere Festigungsübungen ist die Skizze mit der gegebenen Größe veränderbar, indem man eine andere Strecke CF wählt, die entsprechende Winkelgröße angibt oder den gegebenen Winkel an einer anderen Stelle kennzeichnet.

Aufgabe 9

Gegeben sind sechs verschieden lange Strecken: 1 cm; 2 cm; 3 cm; 4 cm; 5 cm; 6 cm.
Mit welchen Strecken kannst du Dreiecke konstruieren?

Rolle der Aufgabe in Lernprozessen

Diese Aufgabe dient der Einführung der Dreiecksungleichung, deren Kenntnis eine wichtige Voraussetzung zum Zeichnen von Dreiecken ist. Die Schüler sollten bereits in der Lage sein, aus drei Seiten ein Dreieck zeichnen zu können.

Hinweise zum Einsatz der Aufgabe

Den Schülern könnten eine entsprechende Anzahl von Stäbchen mit den jeweiligen Längen gegeben werden, mit denen sie alle möglichen Dreiecke legen.
Auf jeden Fall sollten sie alle möglichen Dreiecke zeichnen.

Hinweise zu möglichen Schülerantworten

Die Schüler werden sehr schnell einige Möglichkeiten finden. Dabei wird das Probieren zunächst im Vordergrund stehen. Leistungsstärkere Schüler sollten systematisch vorgehen und schnell auf die gesuchte Gesetzmäßigkeit kommen. Dabei ist auf eine mathematisch exakte Formulierung dieser Eigenschaft von Dreiecken zu achten. Die Lösungsangaben können z. B. in Tabellenform gemacht werden:

1. Seite	2. Seite	3. Seite	Konstruktion möglich?
6 cm	5 cm	4cm	Ja
6 cm	5 cm	2 cm	Ja
6 cm	5 cm	1 cm	Nein

Aufgabe 10

Zeichne verschiedene Parallelogramme.

Rolle der Aufgabe in Lernprozessen

Mit dieser Aufgabe können der Begriff Parallelogramm, die Begriffsbeziehungen der Vierecksarten und die bildlichen Vorstellungen zu ebenen Figuren gefestigt werden.

Hinweise zum Einsatz der Aufgabe
Die Aufgabe sollte in gemischten Übungen zu den Vierecken eingesetzt werden.

Die Schüler können die Parallelogramme auf weißen Blättern zeichnen, die dann an die Tafel geheftet werden. Es sollten 15 min für die selbstständige Schülerarbeit eingeplant werden.

Hinweise zu möglichen Schülerantworten
Jeder Schüler sollte Parallelogramme mit unterschiedlichen Seitenlängen und Winkelgrößen zeichnen können. Geistig beweglichere Schüler sollten auf die Idee kommen, auch Rechtecke und Quadrate (Spezialfälle) als Lösungen anzugeben oder die Lage zu variieren (z. B. eine Kante nicht parallel zur Heftkante oder den linken unteren Winkel als stumpfen Winkel). Je kreativer die Schüler sind, umso mehr unterschiedliche Möglichkeiten werden sie finden.

Aufgabe 11

Zeichne jeweils mehrere verschiedene Vierecke, die die angegebene Eigenschaft haben.
Begründe deine Lösungen.
a) 2 Seiten des Vierecks sind gleich lang.
b) Nicht alle Seiten des Vierecks sind gleich lang.
c) Das Viereck hat genau einen rechten Innenwinkel.
d) Das Viereck hat zwei stumpfe Innenwinkel.
e) Das Viereck hat einen rechten Winkel und mindestens ein Paar gleich langer benachbarter Seiten.

Rolle der Aufgabe in Lernprozessen
Die Aufgabe ermöglicht eine komplexe Festigung von Kenntnissen zu Vierecken und ihren Eigenschaften sowie zu Zusammenhängen zwischen Vierecken. Ein weiterer Schwerpunkt dieser Aufgabe ist die exakte Anwendung der Fachsprache und die Entwicklung logischer Fähigkeiten, insbesondere bei der Verwendung der Begriffe "ein", "genau ein", "nicht alle" und "mindestens".

Hinweise zum Einsatz der Aufgabe
Die Aufgabe sollte in gemischten Übungen zu den Vierecksarten eingesetzt werden. Für jede Teilaufgabe sollten 10 min selbstständige Schülerarbeit geplant werden. Die Schüler können dann ihre Vorschläge an der Tafel skizzieren.

Hinweise zu möglichen Schülerantworten
Zu a)
– Es kann ein Rechteck oder ein Parallelogramm sein, da die gegenüberliegenden Seiten gleich lang sind.
– Es können auch alle vier Seiten gleich lang sein, dann ist es ein Quadrat oder Rhombus.
– Es können auch jeweils zwei Seiten gleich lang sein, dann käme ein Drachenviereck in Frage.
– Es können aber auch zwei Seiten gleich lang und die anderen beiden unterschiedlich lang sein. Dann ist es kein spezielles Viereck, außer die gleich langen Seiten liegen sich gegenüber und sind parallel.
– Es kann ein gleichschenkliges Trapez sein.

Zu b)
– Es kann kein Quadrat und kein Rhombus sein.
– Es kann ein Parallelogramm oder Rechteck sein.
– Es können auch drei Seiten oder nur zwei Seiten gleich lang sein.
– Alle Seiten können auch verschieden lang sein.

Zu c)
– Es kann ein beliebiges Viereck mit vier unterschiedlich langen Seiten und einem rechten Innenwinkel sein.
– Es kann kein Parallelogramm (auch Quadrat, Rechteck, Rhombus) sein.

- Auch ein Trapez ist nicht möglich. Wenn ein Winkel 90° ist, so gibt es auch noch einen weiteren rechten Winkel.

Zu d)

- In jedem Parallelogramm (außer einem Rechteck) und in jeder Raute (außer einem Quadrat) gibt es zwei stumpfe Innenwinkel.
- Es kann auch ein bestimmtes Trapez oder ein beliebiges unregelmäßiges Viereck sein.
- Mehr als zwei stumpfe Winkel kann ein Viereck nicht haben.

Zu e)

- Es kann zwei gleich lange Seiten haben, die einen rechten Winkel bilden, die anderen Seiten sind beliebig.
- Die anderen Seiten können auch gleich lang sein, es kann ein Drachenviereck mit einem rechten Innenwinkel sein oder auch ein Quadrat.
- Das Viereck kann auch einen überstumpfen Winkel haben.
- Der rechte Winkel muss nicht von den gleich langen Seiten eingeschlossen werden. Damit sind weitere unregelmäßige Vierecke möglich.

Aufgabe 12

Welche der Vierecke (1) bis (6) haben eine gemeinsame Eigenschaft?
Gib die Eigenschaft und die Nummern der betreffenden Vierecke an.

Rolle der Aufgabe in Lernprozessen
Die Aufgabe dient der komplexen Festigung der Kenntnisse über ebene Figuren. Dabei soll u. a. die Erkenntnis vertieft werden, dass die Lage der Figuren ohne Bedeutung für die Lösung der Aufgabe ist. Indem die Schüler Eigenschaften bestimmen, nach denen sie die Vierecke vergleichen können, müssen sie über die Figuren sprechen. Bei dieser geistigen Anforderung kann der Grad der Allgemeinheit der Kenntnisse überprüft und weiter entwickelt werden.

Hinweise zum Einsatz der Aufgabe
Die Aufgabe sollte in gemischten Übungen zu den Vierecksarten eingesetzt werden.

Die Schüler sollten Überlegungen anstellen, wie sie ihre Ergebnisse dokumentieren, z. B. stichpunktartig, in Sätzen oder tabellarisch. So kann auch das mathematische Argumentieren geübt werden.

Wichtig ist, dass die Eigenschaften schriftlich notiert werden.

Hinweise zu möglichen Schülerantworten
Mögliche Antworten:

Eigenschaft	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
ein rechter Winkel	x			x		
ein Paar parallele Seiten	x	x	x	x	x	
zwei gleichlange Seiten	x	x	x	x	x	x
eine Symmetrieachse	x		x	x	x	x
Diagonalen sind senkrecht zueinander				x	x	x

Weitere Hinweise
Die Aufgabe kann durch weitere Vierecke erweitert werden.

Aufgabe 13

Es sind zwei parallele Geraden gegeben. Zeichne zwei weitere Geraden so ein, dass eine Figur entsteht.

Rolle der Aufgabe in Lernprozessen
Die Aufgabe dient der Anwendung der Kenntnisse zu ebenen Figuren, insbesondere den Vierecksarten und ihren Eigenschaften. Durch den dynamischen Charakter der Aufgabe können die Begriffsbeziehungen zwischen den Vierecksarten gut realisiert werden.

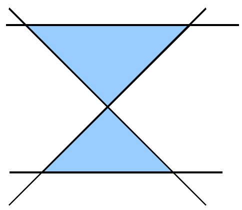
Hinweise zum Einsatz der Aufgabe
Die Schüler sollten in 10 min auf einem vorgegebenen Arbeitsblatt mit mehreren parallelen Linien Lösungen der Aufgabe finden, die dann von ihnen an die Tafel gezeichnet werden können. Zum Finden von Lösungen können die Schüler auch mit zwei Stiften die verschiedenen Lagen der neuen Linien probieren.

Zur Präsentation ist auch dynamische Geometriesoftware geeignet.

Hinweise zu möglichen Schülerantworten
Durch die Vorgabe zweier zueinander paralleler Geraden lassen sich durch zwei weitere Geraden, die sich nicht auf den vorgegebenen Geraden oder zwischen ihnen schneiden, alle Formen von Trapezen konstruieren. Inbegriffen sind die Spezialfälle Parallelogramm, Rechteck, Quadrat und Rhombus, wenn die hinzukommenden Geraden zueinander parallel sind. Ist diese Parallelität nicht gegeben, entsteht außerhalb des Gebietes zwischen den Geraden ein Dreieck. Schneiden sich die beiden neu eingezeichneten Geraden auf einer der beiden Parallelen, so entsteht nur ein beliebiges Dreieck.

Die unterschiedliche Qualität der Schülerantworten ergibt sich aus der Vielzahl der gefundenen Möglichkeiten und dem Grad der Systematisierung.

Weitere Hinweise
Wenn sich die Geraden zwischen den beiden Parallelen schneiden, entsteht ein sog. überschlagenes Viereck. (s. Abb.)
Das Finden eines überschlagenen Vierecks durch die Schüler kann als Anlass genommen werden, den Begriff des (allgemeinen) Vierecks zu diskutieren.



Aufgabe 14

In ein Koordinatensystem wurden die Punkte A (1|1) und B (5|1) eingezeichnet. Zeichne zwei weitere Punkte C und D in das Koordinatensystem ein, so dass ein Trapez entsteht. Gib die Koordinaten der Punkte C und D an.

Rolle der Aufgabe in Lernprozessen
Das Trapez und seine Spezialfälle Rechteck und Quadrat gehören zu den Vierecken, die bei Anwendungen am häufigsten auftreten. Sichere Kenntnisse zum Trapez sind deshalb ein wichtiges Ziel des Unterrichts. Die Aufgabe ermöglicht eine Realisierung von Trapezen in unterschiedlicher Lage.

Mit dieser Aufgabe kann weiterhin das Eintragen und Ablesen von Punkten in ein Koordinatensystem gefestigt werden.

Hinweise zum Einsatz der Aufgabe
Die Schüler sollten die Vorlage aus der Broschüre mit den sechs Möglichkeiten als Kopie erhalten und in 15 min ihre Lösungsvorschläge dort eintragen. Zur Präsentation der Lösungen können die Koordinaten der zwei weiteren Punkte genannt werden, die dann vom Lehrer an der Tafel oder auf einer Folie eingetragen werden. Zur Präsentation ist auch dynamische Geometriesoftware geeignet.

Hinweise zu möglichen Schülerantworten

Grundsätzlich lassen sich die Lösungen in zwei Klassen einteilen: (1) $\overline{AB}$ ist eine der Parallelen oder (2) $\overline{AB}$ ist ein Schenkel des Trapezes. Im Fall (1) müssen die Ordinaten der Punkte C und D übereinstimmen. Eine solche Figur sollte jeder Schüler zeichnen können. Ein tieferes Verständnis des Trapezbegriffes zeigt sich, wenn $\overline{CD}$ länger als $\overline{AB}$ ist, einer der Schenkel senkrecht auf $\overline{AB}$ steht oder Parallelogramm, Rechteck und Quadrat als Spezialfall erkannt werden. Einige Schüler können C und D unterhalb von A und B einzeichnen. Schwerer für die Schüler zu erkennen ist der Fall (2). Ist $\overline{AB}$ ein Schenkel des Trapezes, so stehen im einfachsten Fall die Parallelen $\overline{BC}$ und $\overline{AD}$ senkrecht zu $\overline{AB}$. Dann stimmen jeweils die Abszissen von A und D sowie von B und C überein. In einem allgemeineren Fall schließen die Parallelen mit $\overline{AB}$ den gleichen Winkel ein und besitzen somit den gleichen Anstieg.

Aufgabe 15

ABCD ist ein Parallelogramm, $\overline{DF}$ ist die Verlängerung der Seite $\overline{AD}$. $\overline{BF}$ ist die Winkelhalbierende des Winkels ABC.
Finde Beziehungen zwischen den Winkeln und Strecken in der Figur.

Rolle der Aufgabe in Lernprozessen

Mit der Aufgabe ist eine komplexe Übung der Winkelsätze an Geraden und geschnittenen Parallelen sowie des Basiswinkelsatzes möglich. Sie dient auch der Festigung des mathematischen Argumentierens und leistet einen Beitrag zur Notwendigkeit von mathematischen Beweisen als eine lückenlose Kette von Begründungen.

Hinweise zum Einsatz der Aufgabe

Die Zeit für selbstständige Schülerarbeit sollte 20 min betragen.
Zu jeder Angabe sollten die Schüler exakte und vollständige Begründungen, auch in schriftlicher Form angeben.

Hinweise zu möglichen Schülerantworten

Es lassen sich leicht folgende Winkelbeziehungen finden:

Nr.	Feststellung	Begründung
1.	$\sphericalangle ABF = \sphericalangle EBC$	$\overline{BF}$ ist Winkelhalbierende
2.	$\sphericalangle ABF = \sphericalangle BEC$	Wechselwinkel an den Geraden AB und CD
3.	$\sphericalangle BAD = \sphericalangle EDF$	Stufenwinkel an den Geraden AB und CD
4.	$\sphericalangle BEC = \sphericalangle FED$	Scheitelwinkel

Etwas anspruchsvoller ist das Finden folgender Winkelbeziehungen:

Nr.	Feststellung	Begründung
5.	$\sphericalangle BAD = \sphericalangle ECB$	Gegenwinkel im Parallelogramm
6.	$\sphericalangle CBF = \sphericalangle DFE$	Wechselwinkel an den Geraden BC und AF

Aus den Winkelbeziehungen können dann folgende Beziehungen von Seiten abgeleitet werden.

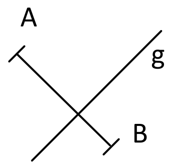
Nr.	Feststellung	Begründung
7.	BC = CE	nach 1. und 2. ist BCE ein gleichschenkliges Dreieck
8.	DE = DF	nach 4. und 6. ist DEF ein gleichschenkliges Dreieck
9.	DF = AB − BC	nach 7. und 8. Ist DF = DE = AB – CE = AB − BC

Aufgaben zur Geometrie in der Ebene

1. Finde Gemeinsamkeiten und Unterschiede in der Bedeutung des Wortes "Strecke" in der Mathematik und in den folgenden Formulierungen:

a) Auf der Strecke von Berlin nach Rostock kommt es zu Verspätungen im Zugverkehr.
b) Die letzte Strecke des Weges gingen sie zu Fuß.
c) Die Läufer legen eine Strecke von 100 m zurück.

2. Untersuche die Bedeutung des Wortes "senkrecht" in den folgenden Zusammenhängen.



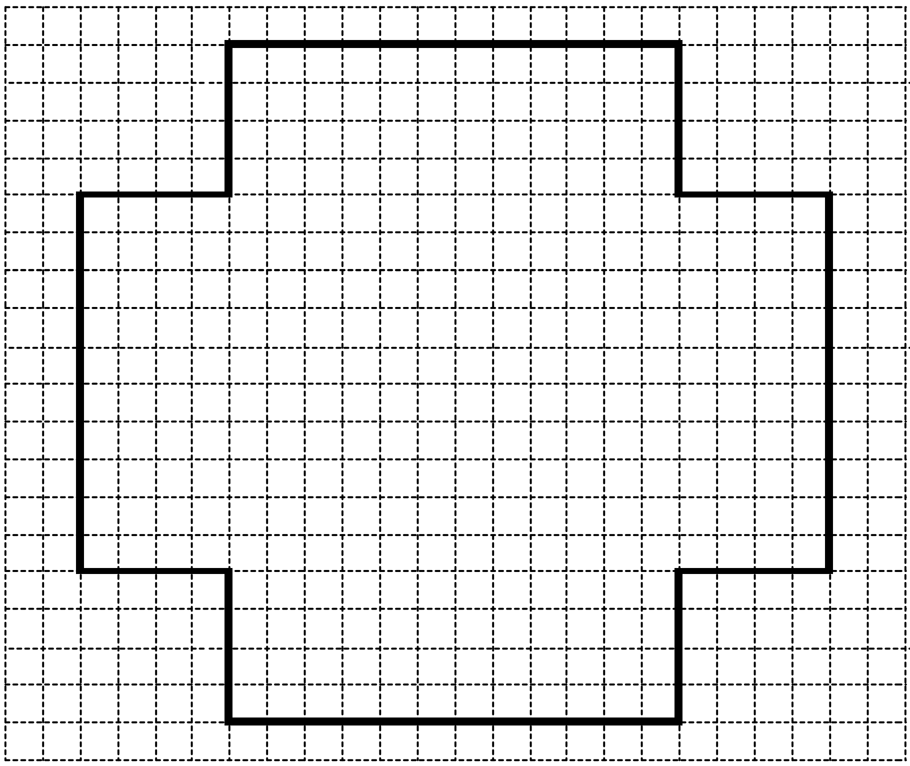
a) Die Strecke $\overline{AB}$ ist senkrecht zur Geraden g.
Betrachte verschiedene Lagen der Geraden g und der Strecke $\overline{AB}$.

d) Der Zaunpfahl steht senkrecht.
Betrachte Zaunpfähle in einem ebenen Gelände und Zaunpfähle an einem Berg.

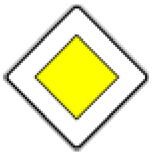
3. Ein Raum besitzt eine Grundfläche von 36 m^2.
Welche Form kann die Grundfläche dieses Raumes haben?

4. Bauer Piepenbrink möchte mit 16 Zaunfeldern einen neuen Hühnerhof einzäunen. Jedes Zaunfeld ist 1 m lang. Welche Form kann der Hühnerhof haben?

5. Ermittle den Flächeninhalt der abgebildeten Figur. Beschreibe dein Vorgehen.
2 Kästchenlängen entsprechen 1 cm.



6. Vergleiche eine achsensymmetrische und eine drehsymmetrische Figuren miteinander. Finde Gemeinsamkeiten und Unterschiede.

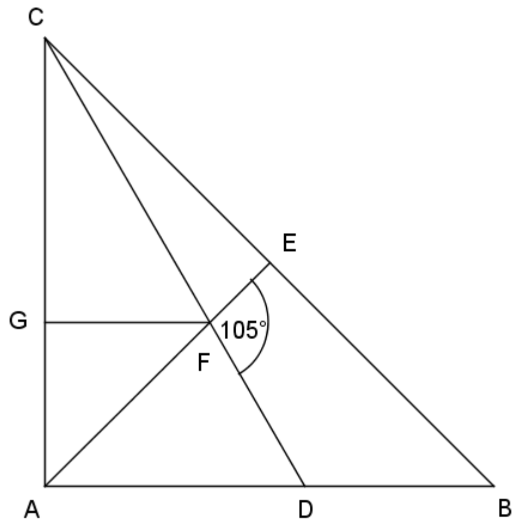
Achsensymmetrische Figuren	Drehsymmetrische Figuren
  	  

7. Erkenne Buchstaben, bei denen Nebenwinkel, Scheitelwinkel, Stufenwinkel oder Wechselwinkel vorkommen und kennzeichne die betreffenden Winkel.

ABCDEFGHIJKLMN
OPQRSTUVWXYZ

8. Das Dreieck ABC ist rechtwinklig und gleichschenklig.
Weiterhin ist AE $\perp$ BC und GF || AB.

Bestimme die Größe von Winkeln in dieser Figur und begründe deine Angaben.



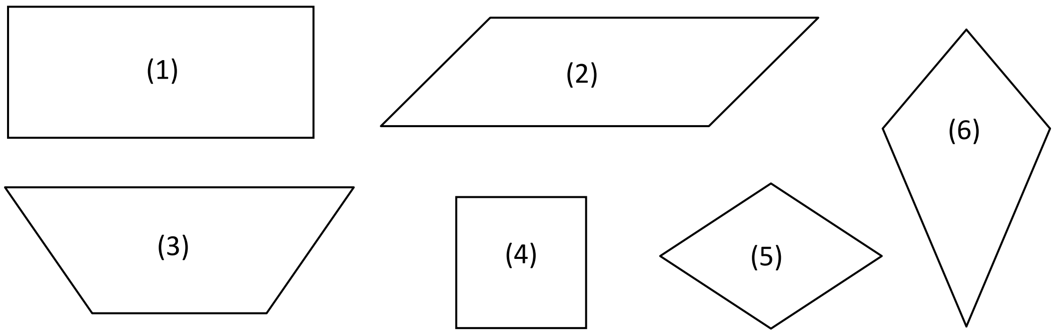
9. Gegeben sind sechs verschieden lange Strecken:
1 cm; 2 cm; 3 cm; 4 cm; 5 cm; 6 cm.
Mit welchen Strecken kannst du Dreiecke konstruieren?

10. Zeichne verschiedene Parallelogramme.

11. Zeichne jeweils mehrere verschiedene Vierecke, die die angegebene Eigenschaft haben. Begründe deine Lösungen.

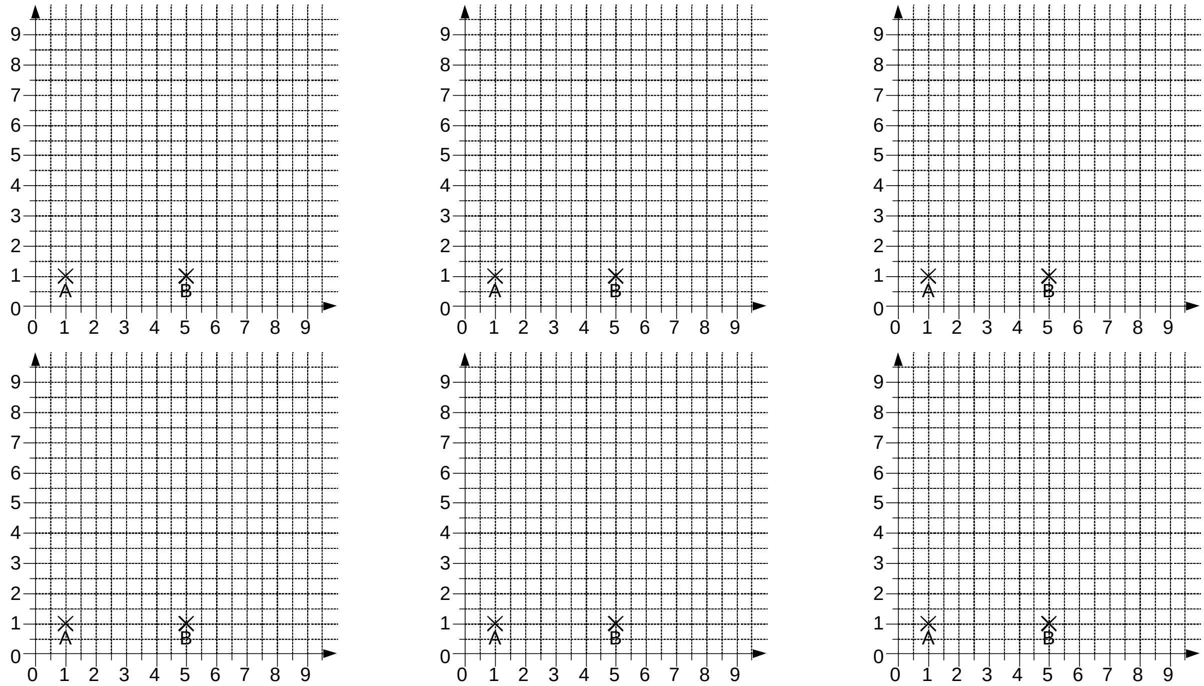
a) 2 Seiten des Vierecks sind gleich lang.
b) Nicht alle Seiten des Vierecks sind gleich lang.
c) Das Viereck hat genau einen rechten Innenwinkel.
d) Das Viereck hat zwei stumpfe Innenwinkel.
e) Das Viereck hat einen rechten Winkel und mindestens ein Paar gleich langer benachbarter Seiten.

12. Welche der Vierecke (1) bis (6) haben eine gemeinsame Eigenschaft? Gib die Eigenschaft und die Nummern der betreffenden Vierecke an.



13. Es sind zwei parallele Geraden gegeben. Zeichne zwei weitere Geraden so ein, dass eine Figur entsteht.

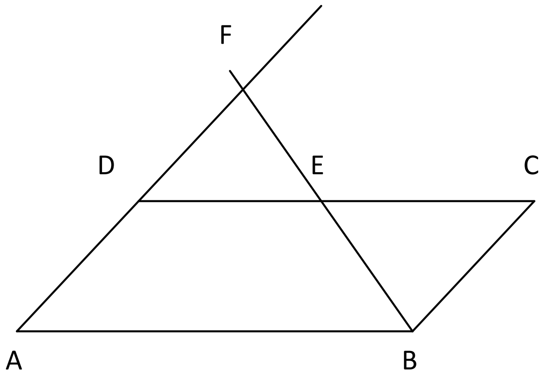
14. In ein Koordinatensystem wurden die Punkte A (1|1) und B (5|1) eingezeichnet.
Zeichne zwei weitere Punkte C und D in das Koordinatensystem ein, so dass ein Trapez entsteht.
Gib die Koordinaten der Punkte C und D an.



15. ABCD ist ein Parallelogramm.

$\overline{DF}$ ist die Verlängerung der Seite $\overline{AD}$.
$\overline{BF}$ ist die Winkelhalbierende des Winkels ABC.

Finde Beziehungen zwischen den Winkeln und Strecken in der Figur.



7.2 Hinweise zu den Aufgaben zur räumlichen Geometrie

Aufgabe 1

Vergleiche die 6 Körper miteinander. Finde eine gemeinsame Eigenschaft mehrerer Körper. Schreibe die Eigenschaft auf und gib die Nummern der Körper an, die diese Eigenschaft haben.

Rolle der Aufgabe in Lernprozessen

Alle sechs dargestellten Körper sind den Schülern bereits aus der Grundschule namentlich bekannt, wobei die Schüler bei dieser Aufgabe nicht die Namen den Körpern zuordnen müssen. Die Aufgabe dient der Festigung der Merkmale von Körpern und der damit verbundenen Begriffe Ecke, Spitze, Kante, Begrenzungsfläche, eben und gekrümmt.

Hinweise zum Einsatz der Aufgabe

Die Aufgabe kann entweder zur Wiederholung oder in den gemischten Übungen verwendet werden.

Die Schüler sollten die Eigenschaften schriftlich in einer Tabelle notieren. Für die selbstständige Schülertätigkeit sollten 15 min eingeplant werden.

Hinweise zu möglichen Schülerantworten

Die Schüler könnten folgende Eigenschaften von Körpern mit den dazugehörigen Nummern der abgebildeten Körper nennen.

(A) Körper, die nur ebene Begrenzungsflächen[13] haben: (1), (4), (5)
(B) Körper mit ebenen und gekrümmten Begrenzungsflächen: (2), (6)
(C) Körper, die gekrümmte Begrenzungsflächen haben: (2), (3), (6)
(D) Körper mit einer Spitze (2), (5)
(E) Körper, die Kanten[14] haben: (1), (4), (5)
(F) Körper mit sechs Flächen, acht Ecken und 12 Kanten: (1), (4)
(G) Körper, die rollen können: (2), (3), (6)
(H) Körper, die sich stapeln lassen: (1), (4), (6)
(I) Körper, die eine Grundfläche haben: (1), (2), (4), (5), (6)
(J) Körper, die eine Grundfläche und eine Deckfläche haben: (1), (4), (6)
(K) Körper, die ein Netz haben: (1), (2), (4), (5), (6)

Die Eigenschaft (F) kann auch noch weiter untergliedert werden.

Eine Differenzierung ergibt sich durch die Anzahl der gefundenen Eigenschaften, aber auch durch den Bekanntheitsgrad der Eigenschaften. Die Eigenschaften (A) bis (F) sollten von allen Schülern gefunden werden können. Die Eigenschaften (G) und (H) betreffen die Funktionalität der Körper und die Eigenschaften (I) bis (K) sind wahrscheinlich nur wenigen Schülern bekannt.

Aufgabe 2

Nenne verschiedene Beispiele für Gegenstände, die die Form eines Quaders haben.

Rolle der Aufgabe in Lernprozessen

Bei dieser Aufgabe geht es um die Ausprägung des Wechselverhältnisses von formalen und inhaltlichen Aspekten der Körperbegriffe. Das Wort Quader bezeichnet sowohl einen mathematischen Körper als auch die Form von realen Gegenständen, die mit diesem Begriff mathematisch modelliert werden. Die Ausprägung dieses Wechselverhältnisses ist eine wesentliche Grundlage für die Anwendbarkeit der Körperbegriffe.

---

[13] Es sollte mit Blick auf die weitere Behandlung der Körper generell von Begrenzungsflächen und nicht von Seitenflächen gesprochen werden, obwohl dies bei Würfeln und Quadern durchaus üblich ist.

[14] Der Begriff Kante wird in der Mathematik in zwei Bedeutungen verwendet, im engeren Sinne als eine geradlinige und im weiteren Sinne auch als eine krummlinige eindimensionale Figur. In der Schule sollten unter Kanten nur Strecken, d. h. geradlinige Figuren verstanden werden.

Hinweise zum Einsatz der Aufgabe
Die Schüler sollten 10 min Zeit bekommen, Beispiele für Gegenstände, die die Form eines Quaders haben, aufzuschreiben. Der Lehrer kann auch eine Auswahl von Gegenständen bereithalten, aus denen dann die quaderförmigen von den Schülern ausgewählt werden.

Hinweise zu möglichen Schülerantworten
Mit dem Wort Quader wird auch ein behauener Steinblock von der Form eines Quaders bezeichnet. Von den Schülern könnten z. B. folgende Gegenstände genannt werden: Buch, Schreibblock, Tischplatte, CD-Hülle, Mauerstein, bestimmte Schränke, Verpackungen oder Häuser. Dabei ist eine Diskussion sinnvoll, inwieweit man bestimmte Gegenstände noch als quaderförmig bezeichnen kann.

Aufgabe 3

Jessica will aus 64 Würfeln einen Quader legen.

Aufgabe 4

Ein großer Raum in einem Bürogebäude hat ein Volumen von 60 m^3.
Gib mehrere Möglichkeiten für seine Abmessungen an.

Rolle der Aufgaben in Lernprozessen
Mit den Aufgaben 3 und 4 können die Kenntnisse der Schüler zur Volumenberechnung von Quadern gefestigt werden. Es handelt sich jeweils um eine Umkehraufgabe zur Volumenberechnung bei gegebenen Kantenlängen. Bei beiden Aufgaben müssen ebenfalls die konkreten Sachverhalte berücksichtigt werden.

Hinweise zum Einsatz der Aufgabe
Es sollten jeweils 20 min für selbständige Schülerarbeit eingeplant werden.

Hinweise zu möglichen Schülerantworten
Antworten bei Aufgabe 3: Die Zahl 64 ist in ein Produkt aus drei Faktoren zu zerlegen. Es sind folgende Tripel möglich: (1, 1, 64), (1, 2, 32), (1, 4, 16), (1, 8, 8), (2, 2,16), (2, 4, 8), (4, 4, 4). Alle Lösungen können von den Schülern durch systematisches Probieren gefunden werden. Inhaltlich ist zu beachten, dass die Würfelbauten jeweils verschiedene Formen haben können. So können im ersten Fall alle 64 Würfel nebeneinander gelegt oder übereinander gestapelt werden.

Antworten bei Aufgabe 4: Die Anzahl der möglichen Antworten ist beliebig groß, da auch nicht ganzzahlige Längenmaße möglich sind. Aus inhaltlicher Sicht wären bei ganzzahligen Maßen folgende Abmessungen sinnvoll: 3 m, 4 m und 5 m, wobei ein Längenmaß jeweils die Höhe des Raumes darstellen könnte. Bei Verwendung gebrochener Zahlen könnten Schüler auch auf folgende Tripel kommen: (2,5 m; 4 m, 6 m), (2,5 m; 3 m; 8 m), (2 m; 4 m; 7,5 m), (2,5 m; 3,2 m; 7,5 m), (4 m, 4 m, 3,75 m). Diese Möglichkeiten können die Schüler u. a. durch weiteres Zerlegen und Zusammensetzen der Zahlen finden: $60 = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 2 \cdot 1{,}5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2{,}5$

Aufgabe 5

Beschreibe verschiedene Möglichkeiten, wie du das Volumen der "Treppe" berechnen könntest.

Rolle der Aufgabe in Lernprozessen
Mit der Aufgabe kann das Können der Schüler in der Berechnung des Volumens zusammengesetzter Körper entwickelt werden. Weiterhin kann die Einsicht vertieft werden, dass bei einem Quader alle Begrenzungsflächen als Grundfläche gewählt werden können, er also auch auf einer Seitenfläche liegen kann. Damit wird die Unterscheidung von stehenden und liegenden Prismen vorbereitet.

Hinweise zum Einsatz der Aufgabe
Wenn kein Arbeitsblatt verteilt wird, sollten die Schüler eine Skizze der Treppe anfertigen und die möglichen Zerlegungen skizzieren. Dabei sollte jeweils die Grundfläche markiert werden.

Hinweise zu möglichen Schülerantworten
Die Berechnung kann entweder durch Zerlegen oder durch Ergänzen gelöst werden.
Mögliche Zerlegungen durch vertikale oder horizontale Schnitte:

- 6 gleiche (liegende) Quader mit einer Grundfläche von 9 cm² und einer Höhe von 9 cm
- 3 (liegende) Quader mit den Grundflächen 9 cm², 18 cm² und 27 cm² und der Höhe 9 cm
- ein Quader mit einer Grundfläche von 36 cm² und zwei mit je 9 cm² und einer Höhe von 9 cm, die jeweils auf einer Seitenfläche liegen
- 3 verschiedene (stehende) Quader mit einer Grundfläche von 81 cm², 54 cm² und 27 cm² und einer Höhe von je 3 cm

Mögliche Ergänzungen zu einem Quader mit einer Grundfläche von 81 cm²:

- 3 Quader mit je 9 cm² Grundfläche und einer Höhe von 9 cm
- ein Quader mit 9 cm² Grundfläche und einer mit 27 cm² Grundfläche, Höhe je 9 cm

Aufgabe 6

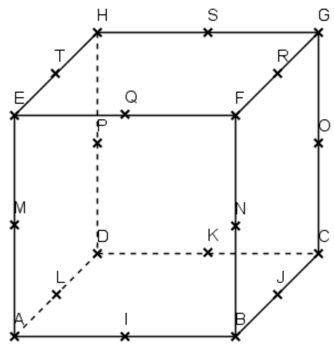
In der Zeichnung ist ein Würfel dargestellt, bei dem seine Eckpunkte und die Mittelpunkte jeder Seitenkante bezeichnet sind. Durch einen geraden Schnitt, der durch die eingezeichneten Punkte geht, soll der Würfel geteilt werden.
Zeichne verschiedene Schnitte ein. Welche Form hat jeweils die Schnittfläche?

Rolle der Aufgabe in Lernprozessen
Die Aufgabe dient der Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens und der Anwendung der Kenntnisse über ebene Figuren.

Hinweise zum Einsatz der Aufgabe
Es ist nicht anzustreben, dass die Schüler eine vollständige Lösung anhand der Skizze durch pure Vorstellungskraft entwickeln. Modellkörper, an denen die Punkte mit Bleistift oder Kreide markiert werden, erhöhen die Anschaulichkeit und das Finden mehrerer Lösungen.

Hinweise zu möglichen Schülerantworten
Die Form der entstehenden Schnittflächen ist von der Lage der Schnittebene abhängig. Den meisten Schülern sollte es gelingen, die Schnittfläche des angegebenen Beispiels als Quadrat zu identifizieren.

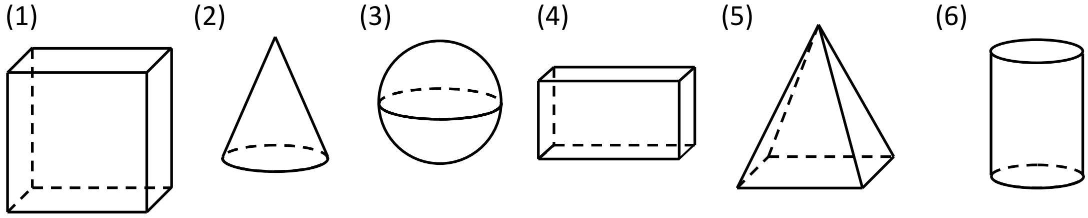
- Generell haben alle Schnitte, die senkrecht zu zwei der Seitenflächen verlaufen, eine quadratische Schnittfläche. Dies sind die Quadrate MNOP, IKSQ und LJRT.
- Alle Schnitte, die senkrecht zu einer Seitenfläche sind, ergeben ein Rechteck.
  (z. B. LIQT, KJRS, BDFH, INOK, AFGD, MQSP, PORT, CFED, NJLM, RJQI, LJOP, MNRT
  oder EFOP, EFLJ, HGMN, HGLJ, GFPM, GFIK, EHON, EHIK, AESK, AERJ, BFTL, BFSK, CGTL, CGQI)
- Schnitte, die zu keiner der Seitenflächen senkrecht sind, können verschiedene Formen annehmen:
  - gleichseitige Dreiecke
    (z. B. AFH, BEG, DGE, CFH, oder ROS, STP, MQT, NRQ)
  - gleichschenklige Dreiecke
    (z. B. MHF, HOF, EGN, EGP, ACN, ACP, BDM, BDO, HAK, HAQ, EDI, EDS, BGK, BGQ, CFI, CFS)
  - Trapeze
    (z. B. IFHL, JFHK, EGKL, EGIJ, ACQR, ACST, BDQT, BDRS)
  - regelmäßige Sechsecke
    (z. B. INRSPL, JNQTPK, LMQROK, TMIJOS)



Aufgaben zur Geometrie im Raum

1. Vergleiche die 6 Körper miteinander. Finde eine gemeinsame Eigenschaft mehrerer Körper. Schreibe die Eigenschaft auf und gib die Nummern der Körper an, die diese Eigenschaft haben.

(1) (2) (3) (4) (5) (6)

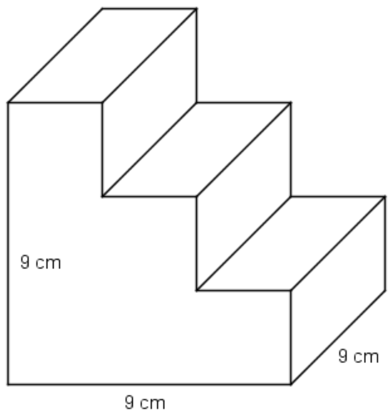


2. Nenne verschiedene Beispiele für Gegenstände, die die Form eines Quaders haben.

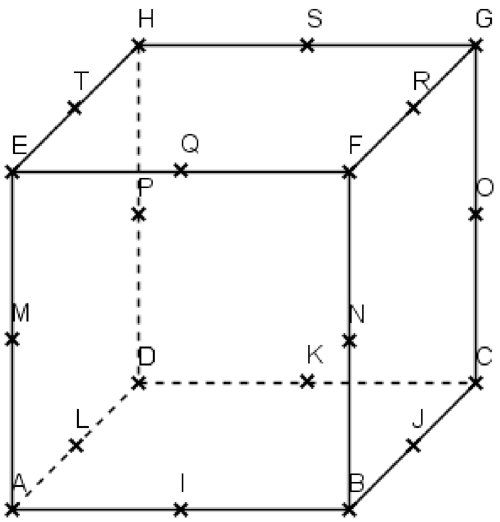
3. Jessica will aus 64 Würfeln einen Quader legen.

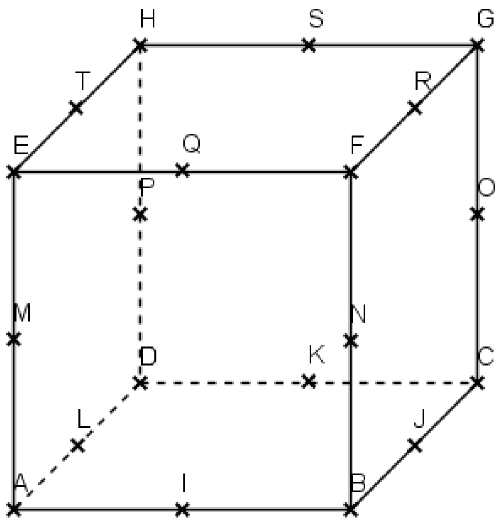
4. Ein großer Raum in einem Bürogebäude hat ein Volumen von 60 m^3. Gib mehrere Möglichkeiten für seine Abmessungen an.

5. Beschreibe verschiedene Möglichkeiten, wie du das Volumen der abgebildeten "Treppe" berechnen könntest.



6. In der Zeichnung ist ein Würfel dargestellt, bei dem seine Eckpunkte und die Mittelpunkte jeder Seitenkante bezeichnet sind. Durch einen geraden Schnitt, der durch die eingezeichneten Punkte geht, soll der Würfel geteilt werden.
Beispielsweise kann ein Schnitt durch die 4 Punkte Q, S, I und K ausgeführt werden.
Zeichne verschiedene Schnitte ein. Welche Form hat jeweils die Schnittfläche?





Schnittfläche: ___________________________ Schnittfläche: ___________________________