Anregungen zum Mathematikunterricht

Sill, Hans-Dieter; Adler, Sven; Behnke, Danilo

Aufgaben mit offenen Anforderungen

Universität Rostock
Fachbereich Mathematik, 1999

Inhaltsverzeichnis

1. Vorwort

Die Broschüre entstand im Ergebnis eines Seminars zum offenen Mathematikunterricht im Wintersemester 1998/99, an dem die Autoren als Lehramtsstudenten bzw. Seminarleiter teilnahmen. Im Mittelpunkt des Seminars stand folgende Publikation:
The open-ended approach: a new proposal for teaching mathematics/edited by Jerry P. Becker, Shigeru Shimada. – National Council of Teachers of Mathematics, Reston, 1997

In dieser amerikanischen Übersetzung einer japanischen Publikation aus dem Jahre 1977 wird über den Einsatz von offenen Aufgaben im japanischen Mathematikunterricht berichtet. Die Aufgaben und die Methoden ihres Einsatzes waren ursprünglich nur dazu gedacht, den Entwicklungsstand allgemein geistiger Fähigkeiten zu überprüfen. Es zeigte sich im Laufe der fünfjährigen Untersuchungen aber bald, daß beim Einsatz dieser Aufgaben auch eine Reihe von Veränderungen in der Qualität des Mathematikunterrichts möglich sind.

Nach dem Studium der Publikation sind wir mit Blick auf die Ergebnisse von TIMSS zu der Ansicht gekommen, daß eine der Ursachen für die bedeutend besseren Leistungen der japanischen Schülerinnen und Schüler im Mathematikunterricht im planmäßigen und gezielten Einsatz solcher Aufgaben liegen könnte.

Die vorliegende Broschüre ist im Wesentlichen durch Übersetzung der oben genannten Publikation entstanden. Es wurden die vorgeschlagenen Einsatzmöglichkeiten der Aufgabe und die zu erwartenden Schülerantworten den Verhältnissen in Mecklenburg-Vorpommern angepaßt. Die angegebenen Unterrichtsabläufe stammen also aus dem japanischen Mathematikunterricht.

Die hier vorgestellten „Aufgaben mit offenem Ende“ sind eine spezielle Form offener Aufgaben. Sie wurden unter folgenden Aspekten entwickelt:

- Die Aufgaben erfordern einen hohen Grad an geistiger Beweglichkeit, die ein wichtiger Faktor der Intelligenz ist. Die Aufgaben sind z.T. in ihrer Art und Struktur an entsprechende Aufgaben in psychologischen Intelligenztests angelehnt.
- Die Aufgaben ermöglichen eine Vielzahl unterschiedlicher Lösungen.
- Es sind Lösungen auf verschiedenen Abstraktions- bzw. Anforderungsstufen möglich, die aber alle als vollwertige Lösungen anerkannt werden können.
- Die Art und Anzahl der durch den Schüler gefundenen Lösungen ermöglichen eine Bewertung ihrer mathematischen und Denkleistungen.

Vor dem Einsatz der Aufgaben im Unterricht ist eine gründliche Auseinandersetzung mit der Aufgabe durch den Lehrer erforderlich. Wir haben alle Aufgaben selbst im Seminar bearbeitet und waren erstaunt, welche Fülle von Gedanken und Ideen sich dabei ergab. Es zeigte sich auch, daß eine Diskussion in der Gruppe sehr fruchtbar war und Anregungen lieferte, auf die jeder einzelne alleine nicht gekommen wäre. Wir empfehlen daher, die Aufgaben in der Fachschaft gemeinsam zu lösen und zu diskutieren.

Beim Einsatz der Aufgaben im Unterricht erweist sich, daß ein hoher Grad der Selbständigkeit der Schüler notwendig und auch möglich ist. Durch die vielen Lösungswege und Ergebnisse können die Schüler leicht eigene Ideen entwickeln und sind so stärker motiviert, diese zu verfolgen. Dabei ist die Kooperation der Schüler in zwanglosen, sporadischen Gruppen eine günstige Möglichkeit, die geistigen Aktivitäten der Schüler anzuregen und ihre Freude am selbständigen Finden und Präsentieren von Ideen zu erhöhen.

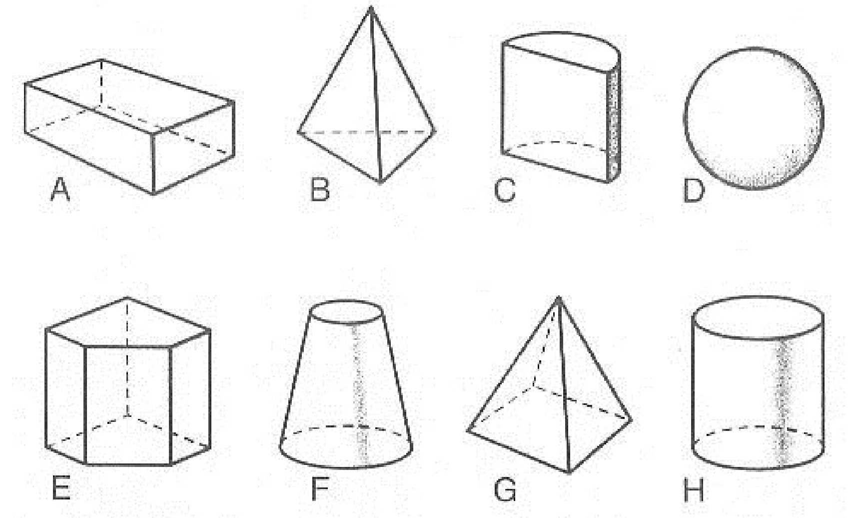
Die Zeit, die zum Lösen solcher Aufgaben erforderlich ist, zahlt sich u.E. bei einem kontinuierlichen Einsatz langfristig in einer größeren geistigen Beweglichkeit der Schüler und damit im besseren Lösen von Problemen aus.

2. Aufgaben mit Hinweisen

2.1. Klassifizierung von Körpern

Aufgabenstellung

In der Abbildung sind verschiedene Körper dargestellt. Wähle jene Körper aus, die mit dem Körper B gemeinsame Eigenschaften haben und schreibe diese Eigenschaften auf.



Ziele beim Einsatz der Aufgabe

Die Aufgabe kann zur Wiederholung der aus der Grundschule bekannten Körper und ihrer Eigenschaften vor Beginn der Behandlung von Körpern in Kl. 5 oder 6 bzw. zur abschließenden komplexen Festigung eingesetzt werden. Die Schüler kennen aus der Grundschule die Begriffe Quader, Pyramide, Kugel und Zylinder. Die Kenntnis der Begriffe Prisma oder Kegelstumpf ist zur Behandlung der Aufgabe nicht erforderlich.

Mit der Aufgabe könne folgende Ziele erreicht werden:
- Die Schüler erkennen, daß Körper auf verschiedene Weise klassifiziert werden können.
- Die geistige Beweglichkeit der Schüler wird entwickelt, indem sie ihre angeeigneten Kenntnisse über Körper in vielfältiger Weise verwenden.
- Die Aufgabe ermöglicht eine Zusammenfassung und Systematisierung der Kenntnisse der Schüler. Ihre Versuche zur Klassifizierung erlauben ebenfalls eine Überprüfung dieser Kenntnisse.

Die Aufgabenstellung kann in der Art verändert werden, daß ein andere Körper vorgegeben wird oder die Schüler selbst einen Körper auswählen und dann die dazu passenden Körper mit gemeinsamen Eigenschaften ermitteln. Es wird empfohlen mit dem Körper B zum „Warmmachen“ zu beginnen und danach den Körper H zu wählen.

Auswahl möglicher Lösungen

Die Tabelle enthält mögliche Eigenschaften des Körpers B und gibt die Körper an, die ebenfalls diese Eigenschaft besitzen.

Eigenschaft des Körpers	A	B	C	D	E	F	G	H
Er heißt Pyramide.		x					x	
Er besitzt dreieckige Begrenzungsflächen.		x					x	
Er hat insgesamt 4 Begrenzungsflächen.		x	x					
Die Ansicht von der Seite ist ein Dreieck.		x					x	

Die Begrenzungsflächen sind alle Vielecke.	x	x			x		x	
Bei einem Schnitt parallel zur Grundfläche ist die Schnittfläche stets kleiner als die Grundfläche.		x				x	x	

Wird der Körper H zum Vergleich verwendet, sind folgende Antworten möglich:

Eigenschaft des Körpers	A	B	C	D	E	F	G	H
Er besitzt eine Drehachse.				x		x		x
Die Grund- und Deckfläche sind gleich groß.	x		x		x			x
Die Ansicht von oben ist ein Kreis oder zwei Kreise				x		x		x
Er hat 3 Begrenzungsflächen						x		x
Alle Schnittflächen parallel zur Grundfläche sind gleich groß.	x		x		x			x
Die Seitenflächen sind gekrümmt						x		x
Die Vorderansicht hat die Form eines Rechtecks.	x		x		x			x

Die Antworten können in folgende Gruppen eingeteilt werden:

Nr.	Inhalt
1	Form der Begrenzungsflächen
2	Anzahl der Ecken, Kanten, Flächen und Beziehungen zwischen ihnen
3	parallele oder senkrechte Beziehungen zwischen Kanten und Flächen
4	Form eine Projektion (Draufsicht, Vorderansicht, Seitenansicht)
5	Form einer Schnittfläche (Schnitt parallel, senkrecht oder schräg zur Grundfläche
6	Form der Abwicklung des Körpers
7	Entstehung durch Bewegen einer ebenen Figur (Drehung oder Verschiebung)
8	Volumen, Oberflächeninhalt
9	Andere (Winkel zwischen Seiten und Grundfläche, ebene oder gekrümmte Flächen bzw. Kanten, Querschnitt stets gleich oder kleiner werdend)

Ergebnisse einer Erprobung der Aufgabe

Die Aufgabe wurde in einer 6. Klasse mit 38 Schülern in der 14. und letzten Stunde einer Unterrichtseinheit zu Körpern als Zusammenfassung behandelt. Die Stunde dauerte 54 Minuten und lief in folgender Weise ab.

Zeit	Schüler- und Lehreraktivitäten
3′	Austeilen von Arbeitsblättern, Folien mit Körpern gezeigt, Aufgabe 1: mit B vergleichen
7′	Schüler tragen Lösungen in ihr Arbeitsblatt ein
18′	Schüler tragen Ergebnisse vor und diskutieren sie, Lehrer trägt Anworten in Tabelle ein
9′	Schüler bearbeiten Aufgabe 2: mit H Vergleichen
15′	Schüler tragen Ergebnisse vor und diskutieren sie, Lehrer trägt Anworten in Tabelle ein
2′	Zusammenfassung durch Lehrer

Neben den erwarteten Anworten kamen u.a. noch folgende richtige Lösungen von den Schülern:

- beim Vergleich mit Körper B: (in Klammern die Körper, für die dies außer B zutrifft)

– hat nur eine Grundfläche (G)
– ist kein Rotationskörper (A, C, E, G)
– hat nur gerade Kanten (A, E, G)
– hat ein Volumen (alle)
– hat Ecken (A, C, E, G)
– hat 4 Flächen (C)
– die Anzahl der Kanten ist doppelt so groß wie die Anzahl der Kanten der Grundfläche

- beim Vergleich mit Körper H: (in Klammern die Körper, für die dies außer H zutrifft)
- hat nur eine Seitenfläche (F)
- hat eine Grundfläche und eine Deckfläche (A, C, E, F)
- hat keine Ecken (D, F)
- die Seitenansicht ist ein Viereck (A, C, E)
- hat zwei Kanten (F)
- Schnitte parallel zur Grundfläche sind Kreise (F)
- Schnitte parallel zur Grundfläche sind kongruent (A, C, E)

Anzahl der Antworten bezüglich der 9 Gruppen von Eigenschaften:

Nr. der Gruppe	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Anzahl der Schüler mit entspr. Antworten	7	36	7	20	18	0	16	1	27
Anzahl richtiger Antworten	7	77	9	28	26	0	17	1	37

2.2. Die Rangfolge von Mannschaften in einem Marathonlauf

Aufgabenstellung

Die drei Mannschaften A, B, C nehmen an einem Marathonlauf teil. Jede Mannschaft hat 10 Läufer. Die Ergebnisse des Laufes sind in der Tabelle angegeben.
Welche Mannschaft hat nach deiner Meinung gewonnen? Finde so viele Wege wie möglich, um einen Gewinner zu bestimmen!

Platz des Läufers	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Mannschaft des Läufers	A	B	A	C	B	B	C	A	C	C	C	B	A	A	B
Platz des Läufers	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Mannschaft des Läufers	B	C	A	C	B	C	B	B	A	C	A	A	A	C	B

Ziele beim Einsatz der Aufgabe

Die Aufgabe kann in Klasse 7 im Stoffgebiet Stochastik eingesetzt werden, nachdem verschiedene Maße zur Charakterisierung einer Verteilung behandelt wurde.
Mit der Aufgabe können eindrucksvoll folgende Einsichten vermittelt werden:
- Bei der Auswertung von Daten können oft verschiedene Methoden eingesetzt werden, die zu unterschiedlichen Ergebnissen führen und ihre Vorteile und auch Nachteile haben.
- Man kann eine Auswertung von Daten unter folgenden Gesichtspunkten vornehmen:
  - Berücksichtigung einzelner Werte (z.B. größter, kleinster häufigster Wert)
  - Berechnung eines mittleren Wertes (Mittelwert, Zentralwert)
  - Berechnung eines Wertes für die Streuung um einen mittleren Wert
- Die Auswahl einer geeigneten Methode richtet sich in erster Linie nach den Zielen der statistischen Untersuchung.
- Es reicht nicht aus, bei einer statistischen Untersuchung nur die Daten und die daraus berechneten Ergebnisse anzugeben. Es müssen auch die verwendeten Methoden genau beschrieben und angegeben werden.

Auswahl möglicher Lösungen

Es können zwei Gruppen von Auswertungsverfahren unterschieden werden:

A: Verwendung der Plazierungen eines Teils der Mitgliedern jeder Mannschaft:

1. Anzahl der Plätze unter den ersten 10
   A: 3 Plätze → 2. Platz
   B: 3 Plätze → 2. Platz
   C: 4 Plätze → 1. Platz
2. Summe der Platzziffern der Läufer unter den ersten 10
   A: 1 + 3 + 8 = 12 → 1. Platz
   B: 2 + 5 + 6 = 13 → 2. Platz
   C: 4 + 7 + 9 + 10 = 30 → 3. Platz
3. Beste Plazierung in jeder Mannschaft
   A: 1. → 1. Platz
   B: 2. → 2. Platz
   C: 4. → 3. Platz
4. Schlechteste Plazierung in jeder Mannschaft
   A: 28. → 1. Platz
   B: 30. → 2. Platz
   C: 29. → 3. Platz
5. Summe der Platzziffern der besten 5 Läufer jeder Mannschaft
   A: 1 + 3 + 8 + 13 + 14 = 39 → 1. Platz
   B: 2 + 5 + 6 + 12 + 15 = 40 → 2. Platz
   C: 4 + 7 + 9 + 10 + 11 = 41 → 3. Platz
6. Verwendung des Zentralwertes der Plätze (Platz des 5. Läufers) in jeder Mannschaft
   A: 14. → 2. Platz
   B: 15. → 3. Platz
   C: 11. → 1. Platz
7. Ermittlung der Anzahl der Plätze unter den ersten 10, den mittleren 10 und den letzten 10 Läufern

	1. – 10. Platz	11. + 20. Platz	21. –30. Platz	Reihenfolge
A	3	3	4	3. Platz
B	3	4	3	2. Platz
C	4	3	3	1. Platz

8. Verwendung der Differenz der Platzziffern des besten und schlechtesten Läufers
   A: 28 – 1 = 27 → 2. Platz
   B: 30 – 2 = 28 → 3. Platz
   C: 29 – 4 = 25 → 1. Platz

B: Verwendung der Plazierungen aller Mitglieder der Mannschaft

1. Summe der Platzziffern aller Mitglieder
   A: 162 → 3. Platz
   B: 151 → 1. Platz
   C: 152 → 2. Platz
2. Summe der Differenzen der Platzziffer des Mitgliedes zum Mittelwert der Platzziffern

A: (Mittelwert 16): 15 + 13+ ... + 11 + 12 = 84 → 3. Platz
B: (Mittelwert 15): 13 + 10 + ... + 8 + 15 = 71 → 2. Platz
C: Mittelwert 15): 11 + 8 + ...+ 10 + 14 =70 → 1. Platz

Ergebnisse einer Erprobung der Aufgabe

Die Stunde wurde in einer 5. Klasse mit 40 Schülern am Ende des Schuljahres erprobt. Nach einer frontalen und Einzelarbeit wurde die Klasse in drei Gruppen geteilt, denen je eine der Mannschaften A, B bzw. C zugeordnet wurde. Jede Gruppe sollte versuchen, möglichst viele Auswertungsmethoden zu finden, bei denen ihre Mannschaft den 1. Platz belegt.
Nach der Gruppenarbeit wurden von jeder Gruppe die Ergebnisse vorgetragen und die Vorteile und Nachteile der Methoden diskutiert.
Es wurde erfaßt, welche Verfahren von jedem Schüler während der Einzel- bzw. Gruppenarbeit gefunden wurde
In der Stunde fanden die Schüler insgesamt 16 verschiedene Verfahren zur Ermittlung des Siegers.
Neben den schon genannten Verfahren schlugen die Schüler noch folgende vor:
- Summe der Punkte für die Läufer unter den ersten 10, wenn der erste 10 Punkte, der zweite 9 Punkte usw. erhält
- Berechnung des Mittelwertes der besten 5 Läufer jeder Gruppe
- Vergleich der Plazierungen des besten, zweitbesten, drittbesten usw. Läufers in jeder Gruppe

Am häufigsten wurden folgende Verfahren entdeckt (s.o.): B1 (32 mal), A1 (22 mal), A8 (14 mal). Die übrigen Verfahren wurden nur von 1 bis 3 Schüler gefunden.

2.3. Funktionen und ihre Graphen

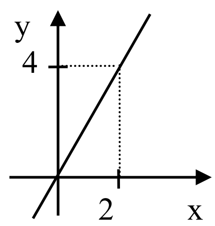
Aufgabenstellung

Die Tabelle und der Graph in (1) zeigen, wie sich die Werte von zwei Funktionen ändern.
In (2) sind verschiedene Funktionsgleichungen angegeben.
Welche Funktionen in (2) haben insgesamt oder teilweise eine gemeinsame Eigenschaft mit einer der in (1) dargestellten Funktionen?
Finde möglichst viele Eigenschaften!

(1) Tabelle:

x	...	−3	−2	−1	0	1	2	3	...
y	...	1	0	−1	−2	−3	−4	−5	...

Graph:



(2) a) $y = \frac{2}{3}x$ b) $y = -x$ c) $y = 2x + 1$ d) $y = x^2$

e) $y = \frac{1}{x}$ f) $y = x + 2$ g) $y = -\frac{1}{2}x - 2$

Ziele beim Einsatz der Aufgabe

Diese Aufgabe ermöglicht eine komplexe Wiederholung linearer Funktionen in Klasse 8. Dadurch, daß hier nicht gezielt nach einzelnen Eigenschaften der Funktionen gefragt wird, muß der Schüler sich selbständig Eigenschaften wählen, auf die hin er die Funktionen untersuchen will. Er erkennt, daß die Eigenschaften z.T. unabhängig voneinander kombinierbar sind, und daher jede Funktion aufs neue betrachtet werden muß. Die Frage nach dem Verlauf des Graphen im Koordinatensystem, der Linearität, der Steigung, usw. kann auch mit der Wiederholung der direkten und umgekehrten Proportionalität verbunden werden.
Durch die Hinzunahme von nichtlinearen Funktionen erkennen die Schüler u.a., daß bestimmte Eigenschaften der linearen Funktionen auch für andere Funktionen gelten.

Auswahl möglicher Lösungen

Vergleiche mit dem Graphen in (1)

Gesichtspunkt	Eigenschaft	Funktionen mit gleichen Eigenschaften
Wachstumsverhalten	wenn x wächst, so wächst auch y Der Anstieg ist konstant. Der Anstieg ist positiv. Der Anstieg ist 2.	a), c), d) für x > 0, f) a), b), c), f), g) a), c), f) c)
Verlauf des Graphen	Der Graph ist eine Gerade. Der Graph verläuft durch den Ursprung. Der Graph verläuft durch den ersten und dritten Quadranten. Für x > 0 ist auch y > 0. Der Graph geht durch den Punkt (2; 4).	a), b), c), f), g) a), b), d), a), e) a), c), d), e), f) d), f)
Funktionsgleichung	Die Funktion hat die Gleichung $y = a \cdot x$.	a), b)
Bezeichnung	Es ist eine lineare Funktion. y ist proportional zu x.	a), b), c), f), g) a)

Vergleiche mit der Tabelle in (1)

Gesichtspunkt	Eigenschaft	Funktionen mit gleichen Eigenschaften
Wachstumsverhalten	Wenn x wächst, dann fällt y. Der Anstieg ist negativ. Wenn x um 1 wächst, fällt y um 1. Der Anstieg ist –1	b), e), g) b), g) b) b)
Verlauf des Graphen	Der Graph ist eine Gerade. Der Graph geht durch den Punkt (0; -2). Der Graph geht durch den Punkt (-2; 0) Der Graph geht durch den Punkt (-1, -1). Der Graph verläuft durch den 2.,3. und 4. Quadranten	a), b), c), f), g) g) f) e) g)
Funktionsgleichung	Die Funktion hat die Gleichung $y = a \cdot x + b$	a), b), c), f), g)
Bezeichnung	Es ist eine lineare Funktion.	a), b), c), f), g)

Ergebnisse einer Erprobung der Aufgabe

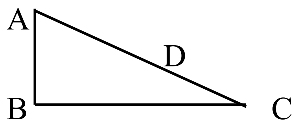
Für die Bearbeitung und anschließende Auswertung dieser Aufgabe wurden zwei Stunden verwendet. Die Bearbeitung der Aufgaben erfolgte in Gruppen. Innerhalb der Gruppe arbeitete zuerst jeder für sich. In einer zweiten Phase verglichen die Schüler nun ihre Ergebnisse untereinander, werteten sie bzw. korrigierten sie. An diese Phase schloß sich die Präsentation der Gruppenergebnisse an. Die Schüler lernten hier ihre Ergebnisse vorzustellen, diese zu vertreten und zu diskutieren.
Im Anschluß an die Präsentationen wurden die Ergebnisse im Klassengespräch diskutiert und vom Lehrer zusammengefaßt sowie gelungene Lösungen hervorgehoben.
In der Klasse waren 44 Schüler. Es wurde in 11 Gruppen gearbeitet.

Schüler- und Lehrertätigkeit	Zeit
L. stellt die Aufgabe und das Vorgehen in dieser Stunde vor.	5′
S. bearbeiten einzeln ein Arbeitsblatt und vergleichen zuerst mit dem Graphen und dann mit der Tabelle.	20′
S. vergleichen ihre Ergebnisse innerhalb einer Gruppe, korrigieren und ergänzen.	20′
Ein Schüler in jeder Gruppe schreibt die Gruppenergebnisse auf eine Folie.	5′
Ein Schüler jeder Gruppe trägt die Gruppenergebnisse vor.	20′
Der L. faßt die Ergebnisse der Gruppen zusammen und schreibt sie an eine Tafel.	30′

2.4. Mittelparallelen im Dreieck

Aufgabenstellung

Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei B. Der Punkt D ist der Mittelpunkt der Strecke AC.



a) Die Punkte E, F, G seien jeweils die Mittelpunkte der Stecken AD, DC und BC. Wähle den Punkt H auf AB so, das DB parallel zu EH ist. Verbinde nun die Punkte B und D, E und H, F und G sowie H und G.
b) Finde in der nun entstandenen Figur so viele Beziehungen wie möglich und schreibe diese auf. (Hilfe: Betrachte zuerst die Beziehungen zwischen Seiten und Dreiecken.)
c) Zusatz : Bleiben die Beziehungen, die Du in der Aufgabe b) gefunden hast, erhalten, wenn es sich bei dem Dreieck nicht um ein rechtwinkliges handelt?

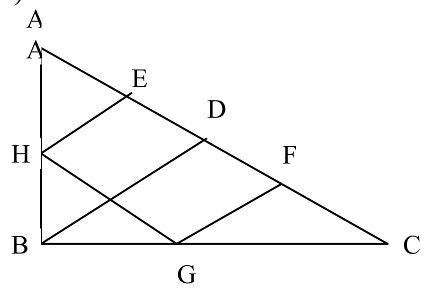
Ziele beim Einsatz der Aufgabe

Diese Aufgabe eignet sich für die gemischten Übungen im Stoffgebiet Ähnlichkeit in Klasse 9. In dieser Aufgabe werden Untersuchungen zur Kongruenz und Ähnlichkeit miteinander verbunden. Die entstehende Figur, die hier zu untersuchen ist, hat eine komplexe Struktur. Die Schüler erkennen, das sie hier mit Intuition nicht mehr viel erreichen können. Sie müssen die ihnen aus dem vorangegangenen Unterricht bekannten Sätze anwenden, um zu Lösungen zu kommen.

Vor Behandlung der Aufgabe sollten die Schüler den Satz über die Mittelparallelen im Dreieck kennen, der zur Begründung benötigt wird. In der Aufgabe wird weiterhin die Umkehrung dieses Satzes benötigt, die damit gefunden und begründet werden kann.

Auswahl möglicher Lösungen

Beziehungen zwischen Seiten: (# heißt parallel und gleiche Länge)



FG # $\frac{1}{2}$ BD   AH = BH   EH # $\frac{1}{2}$ BD   GH # $\frac{1}{2}$ AC

AD = CD = BD (= HG) *   HE = AE = ED = DF = FG = CF *

Beziehungen zwischen Dreiecken und Vierecken:

ΔCGF ~ ΔCBD ΔAHE ~ ΔABD ΔBHG ~ ΔBAC

gleichschenklige Dreiecke: (FGC, DBC, AHE, ABD)*

ΔDBC = ΔABD = □HGFE

$\Delta AHE = \Delta FGC = \frac{1}{4}\,\Delta ABD = \frac{1}{4}\,\Delta BDC$ $\Delta BHG = \frac{1}{4}\,\Delta ABC$

Weitere Beziehungen:

HGFE ist ein Parallelogramm.

Der Punkt D ist der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC.*

Das Dreieck HBG ist rechtwinklig.*

(* : Gilt nur, wenn es sich um ein rechtwinkliges Dreieck handelt)

Ergebnisse einer Erprobung der Aufgabe

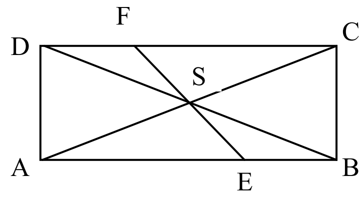
Die Aufgabe wurde im Rahmen einer Unterrichtsstunde in einer 8. Klasse mit 41 Schülern bearbeitet. Nach dem Stellen der Aufgabe und Verteilen der Arbeitsblätter (5′) hat jeder Schüler Aufgabe a) gelöst (5′). Da für die Bearbeitung der Aufgabe b) eine genaue Zeichnung notwendig ist, sollten die Schüler sich dabei gegenseitig kontrollieren.
Anschließend suchten die Schüler nach Beziehungen (15′) zwischen Seiten und Figuren sowohl in Einzelarbeit als auch in Partnerarbeit. Die gefundenen Eigenschaften wurden genannt und im Unterrichtsgespräch begründet und systematisiert (20′).
Die Teilaufgabe c) diente zur inneren Differenzierung und wurde als Hausaufgabe gestellt.

Anzahl der gefundenen Beziehungen:

Anzahl der Beziehungen	0-1	2-3	4-5	6-7	8-9	10-11	12-13	über 13
Anzahl der Schüler	0	4	8	10	8	6	4	1

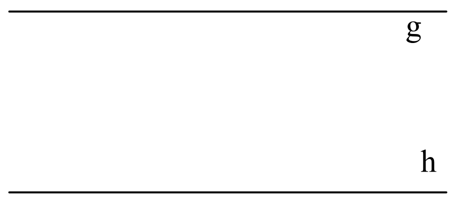
3. Zusammenstellung weiterer Aufgaben

1. Die Figur ABCD ist ein Rechteck. Wir zeichnen eine Linie EF durch den Schnittpunkt der Diagonalen S.

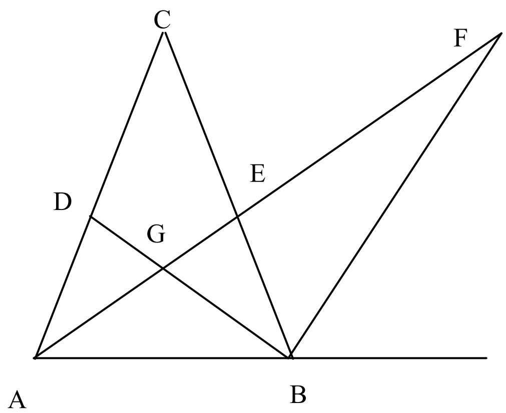


   a) Finde so viele verschiedene geometrische Figuren wie möglich in dieser Abbildung. Wie heißen diese Figuren?
   b) Wähle zwei Figuren aus, die bei a) gefunden hast. Kannst du irgendwelche Beziehungen zwischen diesen Figuren hinsichtlich ihrer Größe und ihrer gegenseitigen Lage feststellen? Suche nach weiteren Paaren von Figuren und ihren Beziehungen!

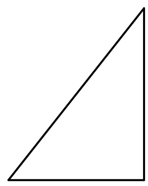
2. Gegeben sind zwei parallele Geraden g und h. Zeichne eine oder zwei weitere Linien ein, die diese beiden Geraden schneiden, so daß Figuren entstehen.
   Finde so viele Eigenschaften dieser Figuren wie möglich. Verändere dazu die Lage die Linien, die die Geraden g und h schneiden.



3. Gegeben sei ein gleichschenkliges Dreieck ABC. Die Winkelhalbierende des Winkels α bzw. β schneidet die Strecke BC bzw. AC in den Punkten E und D. Der Schnittpunkt dieser beiden Winkelhalbierenden sei G. Die Winkelhalbierende des Winkels α schneidet die Winkelhalbierende des Nebenwinkels von β im Punkt F.
   Zeichne diese Figur und finde in dieser Figur möglichst viele Relationen.



4. Zeichne möglichst viele verschiedenen Figuren, die alle mit dem abgebildeten Dreieck eine gemeinsame Eigenschaft haben. Erkläre jeweils genau, welche gemeinsame Eigenschaft das Dreieck und deine gezeichnete Figur besitzen.



5. Die 5 Gegenständen P, Q, R, S und T sind in dieser Reihenfolge der Masse nach geordnet, wobei P der schwerste Gegenstand ist. Vier Schüler A, B, C und D schätzen die Masse der Gegenstände und geben folgende Reihenfolgen ihre Schätzwerte an: Finde möglichst viele Methoden, um zu entscheiden, wer am besten geschätzt hat. Wer ist entsprechend deiner Methode der beste Schätzer, wer der zweitbeste und wer der drittbeste?

A:	R	P	S	T	Q
B:	Q	R	P	S	T
C:	T	R	Q	S	P
D:	S	O	R	P	T

6. Das Rechteck soll auf das Doppelte vergrößert werden. Finde möglichst viele Methoden zum Herstellen der Vergrößerung, wende sie auf das Rechteck an und erkläre sie mit deinen Worten.