Leitidee „Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit“

Fachliche und fachdidaktische Grundlagen

mit

Hinweisen für den Unterricht in der Primarstufe

Autoren: Grit Kurtzmann

Prof. Dr. Hans-Dieter Sill

Druck: Druckerei der Universität Rostock

Auflage: 2. Auflage, September 2014

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Mit den von der Kultusministerkonferenz am 15. Oktober 2004 beschlossenen Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich wurde erstmalig in einer bundesweiten Orientierung für den Mathematikunterricht die verpflichtende Aufnahme von Elementen der Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung in den Primarstufenunterricht festgelegt. Mit den gleichzeitig beschlossenen Vereinbarungen über die Bildungsstandards haben sich alle Bundesländer verpflichtet, die Bildungsstandards als Grundlage der fachspezifischen Anforderungen für den Unterricht im Primarbereich zu verwenden sowie die Standards in der Lehrplanarbeit, der Schulentwicklung sowie der Lehreraus- und -fortbildung zu berücksichtigen.

Wir wollen Sie mit unserem Fortbildungskurs „Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit“ anregen und unterstützen, einen Stochastikunterricht zu gestalten, der an die intuitiven Vorstellungen der Schüler anknüpft, eng mit ihrem täglichen Leben verbunden ist und einen ausgeprägten fachübergreifenden Charakter hat.

Bei der Stochastik handelt es sich um einen neuen Inhaltsbereich sowohl für den Mathematikunterricht als auch für die Lehrerausbildung für den Primarbereich. Analog zur Entwicklung des Geometrieunterrichts in der Grundschule, die erst in den fünfziger Jahren des 20. Jahrhunderts begann und sich über einen längeren Zeitraum erstreckte, befindet sich auch der Stochastikunterricht in der Primarschule erst in den Anfängen.

Unser Fortbildungskurs hat aus diesen Gründen zwei eng miteinander verbundene Ziele. Wir wollen zum einen fachwissenschaftliche Kenntnisse und Fähigkeiten bei den Kursteilnehmerinnen und Kursteilnehmern ausbilden bzw. vertiefen und zum anderen möglichst viele Hilfen und Anregungen für ihren aktuellen Unterricht zu diesem Thema geben. Dazu unterbreiten wir unter anderem Vorschläge für die stufenweise Entwicklung grundlegenden Wissens und Könnens in den Klassen 1-4 und stellen über die Broschüre hinaus zahlreiche ergänzende Unterrichtsmaterialien bereit, auf die in der Broschüre verwiesen wird.

In der Broschüre werden die fachlichen und fachdidaktischen Grundlagen des Stochastikunterrichts ausführlich an Beispielen dargestellt. Die Texte sind als Festigung und Vertiefung der in den Präsenzveranstaltungen behandelten Themen gedacht. Es werden in der Regel die Beispiele aufgegriffen, die auch in den Präsenzveranstaltungen betrachtet wurden.

Wir wollen mit den oft sehr ausführlichen Darlegungen den Kolleginnen und Kollegen gerecht werden, die in ihrer bisherigen Aus- und Fortbildung noch keinen Kontakt mit Elementen der Stochastik hatten, als auch mit speziellen Hinweisen und Ergänzungen denjenigen Anregungen geben, die bereits über Erfahrung auf diesem Gebiet verfügen.

Wir bedanken uns bei dem Deutschen Zentrum für Lehrerbildung Mathematik für die Unterstützung bei der Erstellung dieser Broschüre sowie bei den Studentinnen Sandra Cordt und Christina Rönsch, die in ihren wissenschaftlichen Hausarbeiten zahlreiche Vorschläge entwickelt haben, die wir in unserer Broschüre benutzen konnten.

Rostock, den 22.09.2014

Grit Kurtzmann und Hans-Dieter Sill

1 Stochastische Situationen im Primarstufenunterricht

1.1 Zum Begriff Stochastik

Der Begriff „Stochastik“ ist im deutschen Sprachraum eine Sammelbezeichnung für die eigenständigen Gebiete der Beschreibenden (Deskriptiven) Statistik sowie der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der damit verbundenen Beurteilenden (Mathematischen) Statistik. Beide großen Wissenschaftsgebiete haben sich historisch unabhängig voneinander entwickelt. Während die Erfassung und Aufbereitung von statistischen Daten eine sehr lange Geschichte hat und bis an den Beginn unserer Zeitrechnung zurückreicht, ist die Wahrscheinlichkeitsrechnung und die Beurteilenden Statistik eine sehr junge Disziplin, deren Anfänge zu Beginn des 19. Jahrhunderts liegen. (vgl. S. 75)

Wir empfehlen, in der Primarstufe die Bezeichnung „Stochastik“ nicht zu verwenden. Es ist ausreichend vom Umgang mit Daten und Wahrscheinlichkeiten sprechen.

Oft wird in der Schule auch die Kombinatorik zur Stochastik gezählt. Wenn es auch einige Berührungspunkte gibt und kombinatorische Überlegungen bei der Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten teilweise eine Rolle spielen, ist eine solche Zuordnung nicht gerechtfertigt. Die Kombinatorik ist ein eigenständiges Teilgebiet der Mathematik und gehört nicht zur Wahrscheinlichkeitsrechnung. Bei der Bestimmung von Anzahlen geht es um Situationen, die nicht Gegenstand der Statistik oder Wahrscheinlichkeitsrechnung sind.

In den Bildungsstandards für die Primarstufe werden Elemente der Kombinatorik in zutreffender Weise in die Leitidee "Zahlen und Operationen" eingeordnet. Wir werden deshalb in dieser Broschüre, die sich mit der Umsetzung der Leitidee „Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit“ beschäftigt, keine Unterrichtsvorschläge zum Lösen kombinatorische Aufgaben machen. Da in vielen Unterrichtsmaterialien aber das Lösen kombinatorischer Aufgaben eng mit stochastischen Inhalten verbunden ist und nach unserer Einschätzung vielen Lehrkräften nicht alle geeigneten Methoden bekannt sind, haben wir in den Anhang der Broschüre auch einen kurzen Abschnitt zu Methoden zum Lösen kombinatorischer Aufgaben aufgenommen.

1.2 Zur Verwendung der Wörter „Zufall“ und „zufällig“

In vielen Unterrichtsmaterialien und Publikationen zum Stochastikunterricht treten die Wörter „Zufall“ bzw. „zufällig“ einzelnen oder in Wortkombinationen auf. So wird zum Beispiel oft gesagt, dass sich die Stochastik mit Zufallserscheinungen beschäftigt. Ein zentraler Begriff der Bildungsstandards ist der Begriff „Zufallsexperiment“. Deshalb wollen wir uns zunächst mit dem Zufallsbegriff auseinandersetzen. Wir wollen in diesem Abschnitt nachweisen, dass aufgrund der großen Vielfalt der Bedeutungen des Zufallsbegriffs im Alltag und auch in der Mathematik seine Verwendung im Unterricht der Primarstufe problematisch ist und nur gelegentlich erfolgen sollte.

Welche Bedeutungen haben die Wörter in der Umgangssprache?

Die in der Umgangssprache auftretenden Bedeutungen gehören oft auch schon zum Sprachgebrauch von Schülerinnen und Schüler in der Primarstufe. Dabei geht es sowohl darum, was als Zufall bzw. zufällig bezeichnet wird aber auch darum, was *nicht* als Zufall bzw. *nicht* als zufällig angesehen wird.

(1) Man spricht vom Zufall, wenn etwas eingetreten ist, das sehr selten vorkommt.
Beispiel, Worte einer Grundschülerin:
„Meine Mutti, meine Schwester und ich lagen zur gleichen Zeit im Krankenhaus. So was ist ein großer Zufall.“

(2) Man spricht vom Zufall, wenn etwas überraschend eingetreten ist, was nicht zu erwarten war.
Beispiel, Worte einer Grundschülerin:
„Ein Zufall ist, wenn man einen Bekannten trifft oder einen Fünfer im Lotto hat. Aber auch beim Kartenspiel oder Würfeln kann man durch Zufall gewinnen."

(3) Man spricht vom Zufall, wenn es mehrere Möglichkeiten gibt, die gleichwahrscheinlich sind.
Beispiel:
Das Ergebnis des Werfens einer Münze oder eines Würfels wird als zufällig bezeichnet.

(4) Etwas, was man mit großer Wahrscheinlichkeit erwarten kann, wird *nicht* als zufällig bezeichnet.
Beispiel (aus einer Befragung von Schülern dritter Klassen):
Kerstin und ihre Mutti haben sich nach der Arbeit um 16.00 Uhr vor dem Kaufhaus verabredet. Sie kommen Punkt 16 Uhr beide dort an. Kerstin begrüßt ihre Mutti: "Na, das ist ja ein Zufall, dass wir gleichzeitig hier sind." Stimmt das?
Schülerantworten: 8 von 15: Nein, das ist kein Zufall, sie waren ja verabredet.

(5) Wenn etwas eingetreten ist, das man nicht vorhersehen konnte oder nicht beeinflussen kann, so wird es als zufällig bezeichnet.
Beispiele:
- In einen Autounfall verwickelt zu werden, ist aus der Sicht des Unschuldigen zufällig.
- Wenn in einer Arbeit die gleichen Aufgaben gestellt werden, die ein Schüler gerade am Tag zuvor geübt hat, sagt man: „Das war Zufall."

(6) Wenn etwas eingetreten ist, das man beeinflussen kann oder man Ursachen für das eingetretene Ergebnis kennt, wird es *nicht* als zufällig bezeichnet.
Beispiele:
- Einen Autounfall zu haben, ist aus der Sicht desjenigen, der ihn verursacht hat, kein Zufall.
- Wenn ein guter Schüler sich auf eine Mathematikarbeit gründlich vorbereitet und dann eine gute Note erzielt, sagt man: „Das war kein Zufall".

Welche Bedeutungen haben die Wörtern „Zufall" und „zufällig" in der Mathematik?

In der Mathematik, speziell in der Wahrscheinlichkeitsrechnung treten die Wörter „Zufall" und „zufällig" vor allem in Wortkombinationen und Wortverbindungen auf. Dazu gehören u. a. die Fachbegriffe Zufallsexperiment, zufälliges Ereignis, Zufallszahlen, zufällige Auswahl und Zufallsstichprobe, die auch in Mathematiklehrplänen und Schullehrbüchern auftreten.

Bei diesen Begriffen haben die Wörter „Zufall" bzw. „zufällig" Bedeutungen, die den umgangssprachlichen Verwendungen (3), (5) und (6) entsprechen.

Beispiele:
- Das Wort „Zufall" dient zur Bezeichnung der völligen Regellosigkeit, was oft durch die Wortverbindung „reiner Zufall" noch unterstützt wird.
- Beim „blinden" Ziehen einer Kugel aus einem undurchsichtigen Ziehungsbehälter haben alle Kugeln die gleiche Chance gezogen zu werden. Das Ziehungsergebnis ist nicht vorhersehbar und lässt sich durch den Menschen, der die Kugel zieht, nicht beeinflussen. Man spricht allgemein von einer „zufälligen" Auswahl, wenn für alle Objekte die gleiche Chance besteht, ausgewählt zu werden.
- Sobald der Mensch die Ergebnisse des Vorgangs beeinflussen kann, wird diese Situation nicht mehr als „zufällig" bezeichnet. Wenn der Ziehungsbehälter durchsichtig ist oder man in den Behälter hinein sehen kann, wird das Ziehen nicht mehr als eine zufällige Auswahl und das Ziehungsergebnis nicht mehr als zufällig bezeichnet.
- Das Erfassen und Auswerten von Daten wird in der Regel nicht mit dem Zufallsbegriff verbunden.

Welche Probleme und Hinweise für den Unterricht ergeben sich?

Zu den von uns betrachteten stochastischen Situationen gehören auch solche, in denen etwas eintritt, was mit großer Wahrscheinlichkeit zu erwarten ist, wie etwa bei dem unter (4) genannten Beispiel. Auch solche Vorgänge wie das Unfallgeschehen oder das Schreiben einer Mathematikarbeit sind stochastische Situationen (Beispiele bei (5) und (6)), in denen Daten erfasst und ausgewertet werden können.

Aus diesen Gründen und wegen der großen Vielfalt der Bedeutungen sollten die Wörter „Zufall“ und „zufällig“ im Primarstufenunterricht sparsam in ihren umgangssprachlichen Bedeutungen benutzt werden.

Als ein Beitrag zur allgemeinen Bildung und sprachlichen Befähigung könnten in der 4. Klasse die Vorstellungen und Kenntnisse zur Verwendung der Wörter zusammengetragen werden. Die Schüler könnten dazu die Aufgabe erhalten auf einen Zettel einen Satz zu schreiben, der die Wörter „Zufall“ oder „zufällig“ enthält. Ausgewählte Antworten der Schüler können dann an der Tafel nach den Bedeutungen gruppiert festgehalten werden.

1.3 Zur Modellierung stochastischer Situationen

Wir wollen Sie in diesem Abschnitt mit einer generellen Betrachtungsweise vertraut machen, die wir als *Prozessbetrachtung* bezeichnen. Diese gestattet es, den oft unverbundenen Umgang mit statistischen Daten und Aufgabenstellungen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung in einer einheitlichen begrifflichen Weise zu verbinden und einen engen Lebensbezug herzustellen. In den aktuellen Schulbüchern und Unterrichtsvorschlägen ist diese Betrachtungsweise nur in Ansätzen vorhanden.

Die in diesem Kapitel vorgenommenen Betrachtungen und angegebenen Beispiele sind *nicht* als ein möglicher Einstieg in die Stochastik in der Schule gedacht. Vielmehr sollten diese Betrachtungen und Begriffsbildungen im Laufe des Unterrichts bei der Behandlung der Themen zur Stochastik enthalten sein. Diese Betrachtungen beeinflussen in vielfältiger Art und Weise die Art der Behandlung von Elementen der Stochastik im Mathematikunterricht.

In diesem Abschnitt nur ein erster Eindruck von unserem Grundanliegen vermittelt werden, in den folgenden Abschnitten werden diese Gedankengänge an mehreren Stellen wieder aufgegriffen.

Was sind stochastische Situationen?

Unter stochastischen Situationen verstehen wir zum einen Situationen, in denen Daten auftreten, die erfasst und bearbeitet werden können, und zum anderen Situationen, in denen etwas auftritt, das eine bestimmte Wahrscheinlichkeit hat. Mit dem Begriff der stochastischen Situation wollen wir damit sowohl die Anwendungsbereiche der Statistik als auch der Wahrscheinlichkeitsrechnung erfassen.

Anstelle von stochastischen Situationen spricht man auch von „Erscheinungen mit Zufallscharakter“ oder von „zufälligen Erscheinungen“. Aufgrund der Verwendung des Zufallsbegriffs in der Mathematik (vgl. 1.2) wird der Begriff „Erscheinungen mit Zufallscharakter“ in eingeschränkter Weise oft nur mit Situationen verbunden, die im Rahmen der Wahrscheinlichkeitsrechnung auftreten, so dass wir diesen Begriff hier nicht verwenden werden.

Die Bezeichnung „stochastische Situation“ sollte im Primarstufenunterricht ebenfalls nicht eingeführt werden, mit den Wörtern „Daten“ und „Wahrscheinlichkeit“ können diese Situationen beschrieben werden.

Was bedeutet es, eine stochastische Situation zu modellieren?

Bei der Modellierung einer real existierenden Situation geht es um die Beschreibung dieser Situation mithilfe von Elementen einer bestimmten Theorie. Bei stochastischen Situationen sind es die Wissenschaftsdisziplinen Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Bei einer Modellierung können drei verschiedene Ebenen unterschieden werden:
- die Ebene der realen Erscheinungen und Zustände (Realität),
- die Ebene der Realmodelle und
- die Ebene der theoretischen Modelle (Theorie).

Leider werden diese drei Ebenen bei Begriffsbildungen in der Stochastik und auch in Unterrichtsmaterialien oft nicht in ausreichender Weise auseinandergehalten. Dies führt dann zu Begriffsverwirrungen oder auch dazu, dass in Unterrichtsvorschlägen für die Primarstufe bereits ein Arbeiten auf der Ebene der theoretischen Modelle erfolgt. Wir werden dies bei unseren Vorschlägen konsequent vermeiden und uns nur auf der Ebene der realen Erscheinungen oder der Realmodelle bewegen.

Beispiel:
Wir wollen die drei Ebenen am Beispiel des Schreibens einer Mathematikarbeit in knapper Weise erläutern, auf das Beispiel wird im folgenden Abschnitt noch genauer eingegangen.
- *Realität:* Arne löst in 45 min die vorgegebenen Aufgaben in einer Klassenarbeit. Als Ergebnis liegt die konkrete Arbeit von Arne mit seinen Antworten vor. Er kann aber auch wegen einer Erkrankung die Arbeit vorzeitig beenden oder die Leistung generell verweigern. Die Arbeit hat eine Reihe real existierender Eigenschaften wie die Art der Antworten, die Lesbarkeit, vorgenommenen Korrekturen, weitere Bemerkungen oder Zeichnungen von Arne u. a.
- *Realmodell*: Bei der Korrektur der Arbeit durch die Lehrkraft wird als Merkmal nur die Richtigkeit der Antworten betrachtet. Dazu muss die Lehrkraft zunächst einen Bewertungsmaßstab festlegen. Sie ordnet den zu erwartenden Teilleistungen Punkte zu. Weiterhin muss sie eine Reihe von vereinfachenden Annahmen machen. So wird sie den aktuellen Gesundheitszustand und die Leistungsbereitschaft des Schülers nicht berücksichtigen, wenn Arne nicht alle Teilschritte notiert hat, kann sie annehmen, dass er diese trotzdem durchdacht hat u.a.m.
- *Theorie*: Bei der Entwicklung und Auswertung von zentralen Vergleichsarbeiten, wie zum Beispiel VERA 3, wird zur Beschreibung der Leistungen der Schüler das sogenannte Rasch-Modell verwendet, das nach dem dänischen Statistiker Georg William Rasch (1901-1980) benannt ist. Dabei wird vereinfachend angenommen, dass es eine eindimensionale mathematische Fähigkeit gibt, die man mit der gleichen Skala wie die Schwierigkeit der Aufgaben messen kann. Dieser Fähigkeit wird dann durch das Modell für jede Aufgabe eine Lösungswahrscheinlichkeit zugeordnet. Im Ergebnis der Auswertung erhält man für einen Schüler keine Erfüllungsquoten sondern nur eine Einordnung der Leistung in Kompetenzstufen.

Leider werden in den aktuellen Bildungsstandards für die Primarstufe die Begriffe Ereignis und Zufallsexperiment verwendet, die zur Ebene der theoretischen Modelle gehören und die wir deshalb nicht für den Unterricht empfehlen werden.

Was ist das Ziel einer Prozessbetrachtung stochastischer Situationen?

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, stochastische Situationen systematisch zu untersuchen. Eine davon ist die Prozessbetrachtung, die insbesondere an der Universität Rostock entwickelt, im Unterricht erprobt und in Materialien für Lehrer und Schüler umgesetzt wurde.

Das Besondere der Prozessbetrachtung ist, dass nicht nur das betrachtet wird, was eingetreten ist, sondern auch der Prozess untersucht wird, in dessen Resultat diese Ergebnisse eintreten können.

Anstelle des Wortes „Prozess“ verwenden wir im Unterricht die Bezeichnung „Vorgang“, da dieses Wort in der Umgangssprache häufiger vorkommt und insbesondere für jüngere Schüler leichter zugänglich ist.

Die Prozessbetrachtung kann sowohl beim Umgang mit Wahrscheinlichkeiten als auch beim Arbeiten mit statistischen Daten verwendet werden und stellt somit eine gemeinsame begriffliche Grundlage für die beiden großen Teilgebiete der Stochastik dar.

Mit der Prozessbetrachtung und einem präformalen Wahrscheinlichkeitsbegriff können zahlreiche Bedeutungen und Verwendungen des Begriffes „Zufall“ in der Umgangssprache und in den Wissenschaften in neuer Weise formuliert werden.

Welche die Bestandeile hat eine Prozessbetrachtung?

1. Bestimmung des ablaufenden Vorgangs und seiner Resultate

Das Wort „Vorgang“ ist in der Umgangssprache eine Bezeichnung für etwas, was vor sich geht, abläuft oder sich entwickelt. Diese Bedeutung ist der Kern des von uns verwendeten Begriffs „Vorgang“. Somit ist ein unmittelbarer Anschluss an die inhaltlichen Vorstellungen der Schüler aus der Umgangssprache möglich.

Zu den Aspekten des Begriffs „Vorgang“, gehören noch weitere Gedanken. Wir erläutern diese an 5 Beispielen, die auch bei den übrigen Aspekten der Prozessbetrachtung als Beispiele verwendet werden. Die Beispiele A, B und C sind im Unterricht der Primarstufe für das Arbeiten mit Daten und die Beispiele D und E für das Arbeiten mit Wahrscheinlichkeiten geeignet.

- Vorgänge treten in allen Bereichen des Lebens auf.
  Beispiele:
  - A: Arne schreibt eine Mathematikarbeit.
  - B: Ein Baum wächst im Wald.
  - C: Claras Einstellungen zu Tieren entwickeln sich.
  - D: David würfelt.
  - E: Eva überlegt, ob sie in der Arbeit die Aufgaben richtig gelöst hat.

- Jeder Vorgang hat einen Anfang und ein Ende.
- Man kann Vorgänge betrachten, die schon abgeschlossen sind (Arne hat die Arbeit geschrieben.), die noch andauern (das Wachstum des Baumes, die Entwicklung der Einstellung von Clara zu Tieren) oder noch bevorstehen (der nächste Wurf von David).
- Es gibt Vorgänge, die sehr kurz sind (Würfeln), die etwas länger dauern (Schreiben einer Arbeit) und die sehr lange dauern (Wachstum eines Baumes).
- Es gibt Vorgänge, deren Ergebnis man nicht beeinflussen kann (Würfeln), und Vorgänge, bei denen die beteiligten Personen das Ergebnis beeinflussen können (Schreiben einer Arbeit).
- Man muss unterscheiden zwischen dem, was abläuft und dem, was nach dem Ablauf eines Vorgangs eintreten kann.
  Beispiele:

Was läuft ab?	**Was kann eintreten?**
A: Arne schreibt eine Mathematikarbeit.	Arne bekommt eine 2.
B: Ein Baum wächst im Garten.	Der Baum ist größer als 2 m.
C: Claras Einstellungen zu Tieren entwickeln sich.	Clara mag am liebsten Katzen.
D: David würfelt.	David würfelt eine 2.
E: Eva überlegt, ob sie in der Arbeit die Aufgaben richtig gelöst hat.	Eva glaubt, dass sie alle Aufgaben richtig gelöst hat.

Nach dem Ablauf des Vorgangs sind bestimmte **Resultate** eingetreten (der Würfel liegt in einer bestimmten Lage auf dem Tisch), haben sich bestimmte Eigenschaften von Objekten oder von Personen herausgebildet (Claras Einstellungen zu Tieren), sind neue Objekte entstanden (die Arbeit von Arne) oder haben sich Gedanken im Kopf eines Menschen gebildet (die Vermutungen von Eva zur Richtigkeit ihrer Lösungen).

Diese Dinge existieren alle auf der Realebene (der Wirklichkeit) und sind unabhängig von Betrachtungen eines Menschen. Ein Baum wächst und die Einstellungen von Clara zu Tieren entwickeln sich auch ohne, dass dies näher betrachtet oder untersucht wird.

Erst im folgenden Schritt beginnt ein schrittweiser Prozess der Modellierung der Wirklichkeit.

2. Bestimmung eines zu betrachtenden Merkmals

Die nach Ablauf des Vorgangs entstandenen Zustände, Eigenschaften, Objekte oder Gedanken besitzen zahlreiche **Merkmale**. Man sagt auch, sie sind Träger von Merkmalen. Wenn der Vorgang mit Mitteln der Statistik oder der Wahrscheinlichkeitsrechnung näher untersucht werden soll, muss man sich zunächst entscheiden, welches Merkmal man betrachten will.

Beispiele:

Was ist eingetreten?	**Was interessiert mich?**
A: Arne hat eine Arbeit geschrieben.	Wie viele Punkte bekommt er?
B: Der Baum ist 2 Jahre gewachsen.	Wie hoch ist der Baum?
C: Clara hat bestimmte Einstellungen zu Tieren entwickelt.	Wie sehr mag Clara Katzen?
D: Der Würfel liegt auf dem Tisch.	Welche Augenzahl liegt oben?
E: Eva hat bestimmte Vermutungen zur Richtigkeit ihrer Lösungen in der Arbeit.	Wie sicher ist sich Eva, dass alle ihre Lösungen richtig sind?

3. Festlegung des Messverfahrens zur Bestimmung der Ausprägungen des Merkmals und Ermittlung der Ergebnisse

Nachdem man sich für ein interessierendes Merkmal entschieden hat, muss überlegt werden, wie man die konkrete Ausprägung (die Werte) des Merkmals bestimmen kann. Dazu werden Geräte, Skalen oder Methoden zum Messen benötigt. Manchmal ist es möglich, für ein Merkmal unterschiedliche Skalen zum Messen zu verwenden.

Beispiele:

Was ist eingetreten? Was interessiert mich?	**Wie können die Ausprägungen (Werte) des interessierenden Merkmals ermittelt werden?**
A: Arne hat eine Arbeit geschrieben. Mich interessiert seine Leistung in der Arbeit.	Die Leistung kann mit einer Punkteskala oder mit einer Notenskala gemessen werden.
B: Der Baum ist jetzt 2 Jahre gewachsen. Mich interessiert die Höhe des Baumes.	Die Höhe des Baumes kann geschätzt oder mit einem Höhenmessgerät bestimmt werden.
C: Clara hat Einstellungen zu Tieren entwickelt. Mich interessiert Ihr Lieblingstier.	Clara wird mit einem Fragebogen direkt nach Ihrem Lieblingstier oder zu mehreren Tieren befragt.
D: Der Würfel liegt auf dem Tisch. Mich interessiert die oben liegende Augenzahl.	Man zählt die Punkte auf der oben liegenden Fläche.
E: Eva hat bestimmte Vermutungen zur Richtigkeit ihrer Lösungen in der Arbeit. Mich interessiert der Grad der Sicherheit ihrer Vermutungen.	Der Grad der Sicherheit von Eva kann mit einer dreistufigen oder einer fünfstufigen Skala gemessen werden.

Nachdem die Messskala bzw. die Messmethode festgelegt wurde, können nun damit die konkreten Ausprägungen des Merkmals gemessen werden. Wir bezeichnen die dabei ermittelten Werte als **Ergebnisse des Vorgangs**. Bei statistischen Untersuchungen spricht man auch von **Daten** oder **Merkmalswerten**.

4. Betrachtung der Bedingungen des Vorgangs

Wenn man die gemessenen Werte des Merkmals (z. B. die ermittelten Daten) oder die Wahrscheinlichkeiten der möglichen Ergebnisse hinterfragen oder einschätzen will, müssen die **Bedingungen** betrachtet werden, die Einfluss auf den Vorgang haben. Man spricht anstelle von Bedingungen auch von **Einflussfaktoren**.

Beispiele:

Was ist eingetreten? Was interessiert mich?	**Wovon hängt es ab, welches Ergebnis eintritt?**
Der Baum ist jetzt 2 Jahre gewachsen. Mich interessiert die Höhe des Baumes.	– vom Nährstoffgehalt des Bodens – von den Wasser- und Windverhältnissen – von der Baumsorte
Arne hat eine Arbeit geschrieben. Mich interessiert seine Leistung in der Arbeit.	– von seinen mathematischen Fähigkeiten – von seiner Vorbereitung auf die Arbeit – vom Anforderungsniveau der Aufgaben

Die Bedingungen eines Vorganges können auf zwei verschiedenen Ebenen betrachtet werden, zum einen auf einer allgemeinen Ebene und zum anderen für einen konkreten Verlauf des Vorgangs.

Beispiel:

Das Wachstum eines Baumes wird durch allgemeine Bedingungen, wie den Nährstoffgehalt des Bodens, die Wasser- und Windverhältnisse oder die Baumsorte beeinflusst. Bei einem konkreten Baum an einem konkreten Standort müssen die Ausprägungen dieser Bedingungen betrachtet werden. Diese Ausprägungen sind die Ursachen für die Beschaffenheit des Baumes.

Mit der Einbeziehung von Bedingungen in die Prozessbetrachtung entstehen enge Bezüge zu den Betrachtungen von Gesetzen in den Naturwissenschaften, die auch stets nur unter bestimmten Bedingungen gelten.

5. Betrachtung von Wiederholungen des Vorgangs

In der Statistik und in der Wahrscheinlichkeitsrechnung haben wir es oft mit Massenerscheinungen und mehrfachen Wiederholungen eines Vorgangs zu tun. Bei unserer Prozessbetrachtung wird dagegen zunächst immer nur ein einzelner Vorgang in der bisher beschriebenen Weise untersucht.

Ob ein Vorgang wiederholt abläuft, ob mehrere Vorgänge parallel verlaufen oder ob Vorgänge überhaupt zusammengefasst werden können, wird von uns als ein extra zu untersuchendes Problem angesehen. Eine Zusammenfassung von Vorgängen zu einer Gesamtheit ist nur sinnvoll, wenn wesentliche Bedingungen gleich bleiben oder mindestens vergleichbar sind.

Beispiele:

Vorgang (V) **Merkmal (M)**	**Wiederholungen** **Art der Wiederholungen**	**Bedingungen bei den Wiederholungen**
V: Ein Baum wächst. M: Höhe das Baumes	Alle Bäume eines Waldes wachsen. *paralleler Verlauf von Vorgängen*	Wenn die Wachstumsbedingungen im gesamten Wald und die Baumsorten etwa gleich sind, können die Bedingungen als vergleichbar angesehen werden.

V: Arne schreibt eine Mathematikarbeit. M: Note in der Arbeit	a) Arne schreibt mehrere Arbeiten in einem Schuljahr. *wiederholter Ablauf eines Vorgangs* b) Alle Schüler der Klasse schreiben die gleiche Arbeit. *paralleler Verlauf von Vorgängen*	a) Die Bedingungen sind teilweise gleich (die mathematischen Fähigkeiten von Arne) und teilweise unterschiedlich (z. B. das jeweilige Thema der Arbeit). Mit dem Erteilen einer Jahresnote, werden die Bedingungen als vergleichbar angesehen. b) Die Bedingungen sind teilweise gleich (z. B. die gleiche Arbeit) und teilweise unterschiedlich (z. B. Fähigkeiten der Schüler). Mit der Angabe einer Durchschnittsnote für die Arbeit werden die Bedingungen als vergleichbar angesehen.
V: David würfelt einmal. M: Augenzahl	David würfelt 60-mal. *wiederholter Ablauf eines Vorgangs*	Bei gleicher Unterlage und Wurftechnik können die Bedingungen als gleich angesehen werden.

Die Wiederholbarkeit eines Vorgangs unter gleichen Bedingungen ist also keine definierende Eigenschaft eines Vorgangs. Damit werden auch Vorgänge wie der Ablauf eines Fußballspiels oder die Gedanken eines Schülers zu seiner geschriebenen Arbeit als stochastische Situationen angesehen.

Welche Fälle können bei einer Prozessbetrachtung auftreten?

Bei einer Prozessbetrachtung können zwei verschiedene Fälle auftreten:

- Ein Vorgang hat bezüglich eines Merkmals nur ein mögliches Ergebnis
- Ein Vorgang hat bezüglich eines Merkmals mehrere mögliche Ergebnisse.

Dabei kann es sich durchaus um den gleichen Vorgang handeln.

Beispiele:

Vorgang, Bedingungen	**Merkmal**	**Anzahl der Ergebnisse**
Es wird Würfels auf einer großen und glatten Unterlage gewürfelt.	Endlage das Würfels (Seitenfläche, Kante, Ecke)	nur ein mögliches Ergebnis (Seitenfläche)
	obenliegende Augenzahl	6 mögliche Ergebnisse
Einem Lehrer fällt ein Stück Kreide aus der Hand auf den Boden.	Bewegungsrichtung der Kreide	nur ein mögliches Ergebnis (nach unten)
	Anzahl der Teilstücke nach dem Auftreffen auf dem Bode	viele mögliche Ergebnisse
Wasser wird längere Zeit bei 100 °C unter Normalbedingungen erhitzt.	Wechsel des Aggregatzustandes	nur ein mögliches Ergebnis (von flüssig zu gasförmig)

Der Fall, dass Vorgänge bezüglich eines Merkmals nur ein mögliches Ergebnis haben, kommt bei realen Erscheinungen selten vor. Bei der Modellierung von Erscheinungen in den Naturwissenschaften wird aber oft von geringen Abweichungen abgesehen und nur ein möglicher Wert betrachtet. Dies erleben die Schüler im Unterricht etwa bei der Durchführung von Experimenten.

Vorgänge, die bezüglich eines Merkmals mehrere Ergebnisse haben, werden auch als **stochastische Vorgänge** bezeichnet. Diese Sprechweise sollte sie im Mathematikunterricht in der Primarstufe noch nicht verwendet werden. Wir sprechen deshalb nur von **Vorgängen mit mehreren möglichen Ergebnissen**.

Zu welchen Aspekten sollte eine Prozessbetrachtung erfolgen?

In der Primarstufe schlagen wir eine Beschränkung der Aspekte einer Prozessbetrachtung auf folgende wesentlichen Bestandteile vor. Die Schritte können in Form von Fragen formuliert werden.

1.	Bestimmung des Vorgangs und der Objekte	Was läuft ab?
2.	Bestimmung eines Merkmals	Was interessiert mich?
3.	Bestimmung der möglichen Ergebnisse	Was kann eintreten?
4.	Bestimmung einiger Einflussfaktoren	Wovon hängt es ab, was eintreten kann?

1.4 Weitere Hinweise für den Unterricht

Welche Rolle spielt eine Prozessbetrachtung bei statistischen Untersuchungen?

Die in den Beispielen A bis C vorgestellten Prozessbetrachtungen können im Rahmen entsprechender statistischer Untersuchungen in der Primarstufe erfolgen.

Vorgang	mögliche statistische Untersuchung
A: Schreiben einer Mathematikarbeit	Jeder Schüler untersucht am Ende der Klasse 3 oder 4 alle seine im Schuljahr erhaltenen Noten im Fach Mathematik
B: Wachstum von Bäumen	Mit einem Förster werden Bäume in einem Wald untersucht. Der Förster bestimmt die Höhe von Bäumen, die alle etwa gleich alt und von der gleichen Art sind, sich aber an unterschiedlichen Stellen im Wald befinden.
C: Entwicklung von Einstellungen zu Tieren	In der Klasse wird eine Befragung zum Lieblingstier durchgeführt.

Bei diesen Untersuchungen können dann alle genannten Überlegungen zur Prozessbetrachtung angestellt werden. Eine besondere Herausforderung sind dabei Überlegungen und mögliche Untersuchungen zu den Bedingungen des Vorgangs, die etwa in folgender Weise erfolgen könnten.

Vorgang	mögliche statistische Untersuchung
A: Schreiben einer Mathematikarbeit	Jeder Schüler könnte untersuchen, ob er bei mündlichen oder schriftlichen Leistungen besser ist oder ob es von Thema abhängt.
B: Wachstum von Bäumen	Es könnte die untersuchten Bäume in zwei Gruppen eingeteilt werden, Bäume die am Waldrand oder am Rande einer Lichtung wachsen und Bäume im Innern des Waldes.
C: Entwicklung von Einstellungen zu Tieren	Es könnte untersucht werden, ob das gewählte Lieblingstier davon abhängt, ob der Schüler in der Stadt oder auf dem Land wohnt.

Bei statistischen Untersuchungen geht es generell um die Erfassung von Ergebnissen bei einer großen Zahl von Vorgängen die meist gleichzeitig ablaufen und auch nach der Erfassung der Daten weiterlaufen (B und C).

Um Daten bewerten zu können, müssen die Bedingungen, unter denen sie entstanden sind, bekannt sein. Dies wird beim Umgang mit Daten im Alltag, in der Presse und auch in der Wissenschaft oft nicht beachtet. So können die Ergebnisse von zentralen Vergleichsarbeiten nur zutreffend bewertet werden, wenn man die konkreten Bedingungen in der jeweiligen Klasse kennt und weiß, wie der betreffende Unterricht zu dem getesteten Wissen und Können verlaufen ist.

Auf die Rolle von Prozessbetrachtungen in stochastischen Situationen, in denen es um Wahrscheinlichkeitsaussagen geht wird in Kapitel drei näher eingegangen.

An welchen Beispielen sollte eine Prozessbetrachtung erfolgen?

Eine Prozessbetrachtung sollte an Beispielen mit folgenden Eigenschaften durchgeführt werden.

- Die Schüler kennen die Vorgänge aus ihrem unmittelbaren Erleben.
- Die Schüler können einige Ursachen für das Eintreten unterschiedlicher Ergebnisse erkennen.
- Zu den betrachteten Vorgängen lassen sich einfache statistische Erhebungen durchführen.
- Bei der Betrachtung der Vorgänge werden keine Schüler bloßgestellt.

Neben den bereits genannten fünf Beispielen A – E sind weiterhin z. B. noch folgende geeignet:

- Vorgang: Packen der Schultasche; Merkmal: Masse der Schultasche
- Vorgang: Wachstum von Samenkörnern bei verschiedenen Bedingungen; Merkmal: gekeimt oder nicht gekeimt
- Vorgang: Wetterentwicklung; Merkmal: Wetter von Morgen

Zu den Vorgängen mit den genannten Merkmalen, die für eine Prozessbetrachtung aus verschiedenen Gründen *nicht oder weniger geeignet* sind gehören z. B.

- Vorgang: körperliche Entwicklung; Merkmal: Körpergewicht
- Vorgang: Entwicklung der Familiengröße; Merkmal: Anzahl der Kinder
- Vorgang: Einkaufen; Merkmal: Art oder Wert der gekauften Produkte

Wie kann die Entwicklung gestuft werden?

In der *Klasse 1* sollte an einfachen Beispielen von Vorgängen im Alltag eines Schüler aber auch aus dem Glücksspielbereich der Begriff „Vorgang“ erarbeitet werden. Dabei sollte es nur darum gehen, dass die Schüler an konkreten realen Vorgängen, die sie selbst oder Mitschüler betreffen, die verschiedenen Ergebnismöglichkeiten erkennen.

In den *Klassen 2 und 3* sollten alle Aspekte der Prozessbetrachtung im Zusammenhang mit der Durchführung statistischer Untersuchungen und der Ausbildung inhaltlicher Vorstellungen zum Wahrscheinlichkeitsbegriff erarbeitet und gefestigt werden.

Spätestens ab *Klasse 4* sollte die Bezeichnung „Vorgang mit mehreren möglichen Ergebnissen“ verwendet werden. In diesem Zusammenhang können ergänzend auch Betrachtungen zu den Vorstellungen der Schüler zum Zufallsbegriff erfolgen (vgl. Kap. 1.2) und es könnte bereits darauf hingewiesen werden, dass man Vorgänge mit mehreren möglichen Ergebnissen auch als stochastische Vorgänge bezeichnet.

2 Statistische Untersuchungen

2.1 Vorbemerkungen

Was sind statistische Untersuchungen?

Im Alltag werden die meisten Menschen mit Ergebnissen aus Untersuchungen und zahlreichen grafischen Darstellungen von Daten konfrontiert. Dabei ist es einerseits wichtig, diese lesen zu können, aber andererseits auch sich mit diesen kritisch auseinanderzusetzten und zu interpretieren. Die Befähigung zum Umgang mit Daten ist ein langwieriger Lernprozess, der in der Schule schon ab der 1. Klasse gut entwickelt werden kann.

Der Ablauf einer statistischen Untersuchung kann in drei Phasen untergliedert werden:

1. Statistische Untersuchung planen
2. Durchführen der statistischen Untersuchung
3. Auswertung von Daten
   3.1. Darstellung
   3.2. Interpretation

In der Grundschule werden die Grundlagen für die Planung, Durchführung und Auswertung statistischer Untersuchungen gelegt. Ziel ist es, am Ende der vierten Klasse die Schüler zu befähigen, einfache statistische Untersuchungen mit den ihnen zur Verfügung stehenden Mitteln durchzuführen. In den folgenden Kapiteln werden die fachlichen Grundlagen für die zu entwickelnden Schülerkompetenzen beschrieben. Hinweise für den Einsatz im Unterricht vervollständigen jedes Kapitel. Dabei wird die Reihenfolge nach den Lerninhalten und nicht nach dem Ablauf einer statistischen Untersuchung gewählt.

An welchem durchgängigen Beispiel werden die fachlichen Inhalte dargestellt?

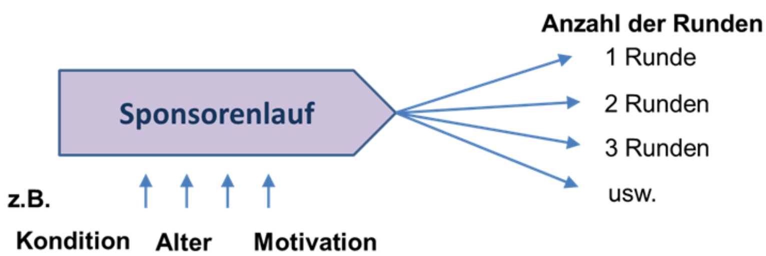
Beispiel für den Einsatz in der Statistik

Für die Vermittlung der fachlichen Inhalte wurde ein Beispiel gewählt, an welchem alle fachlichen Inhalte der Statistik dargestellt werden. Das Beispiel ist ein Sponsorenlauf in der Schule, der in vielen Schulen praktiziert wird. Ein Sponsorenlauf wird in der Regel wie folgt durchgeführt: Jeder Schüler läuft eine bestimme Anzahl von Runden auf dem Sportplatz. Für die gelaufenen Runden bekommt er von vorher gesuchten Sponsoren (Eltern, Verwandte, Freunde) einen bestimmten Betrag, der dann an die Schule für einen bestimmten Zweck gesponsert wird.

Prozessbetrachtung anhand des Beispiels

Mithilfe des vorgegebenen Schemas können alle gestellten Fragen beantwortet werden. Wir betrachten den Vorgang „Sponsorenlauf". Es interessiert hier das Merkmal „Anzahl der Runden". Die Ergebnisse können 0 Runden, 1 Runde, 2 Runden usw. sein. Aufgrund des Alters der Schüler, der körperlichen Verfassung oder der Motivation können die Rundenzahlen variieren. Dies sind nur einige mögliche Bedingungen, die das Ergebnis beeinflussen können.

Vorgang: Ein Schüler nimmt am Sponsorenlauf teil.



2.2 Durchführung einer statistischen Untersuchung

2.2.1 Erfassung von Daten

2.2.1.1 Fachliche Grundlagen

Welche Grundbegriffe werden in allen statistischen Untersuchungen verwendet?

Bei einer Datenerhebung werden interessierende Eigenschaften von Personen oder Objekten untersucht. Die Erhebung von Daten kann durch Befragungen, Beobachtungen oder Experimente erfolgen. Die Ergebnisse einer Datenerhebung müssen dabei immer objektiv, sicher und glaubwürdig sein. Mit dem Beispiel Sponsorenlauf kann folgende Befragung in der Klasse 2a durchgeführt werden: „Wie viele Runden bist du gelaufen?" Zunächst wird bei der Erhebung der Daten das zu untersuchende **Merkmal** betrachtet (hier Anzahl der Runden). Es können verschiedene **Ergebnisse** auftreten (hier 0 1 2 usw.). Diese werden dann erfasst. Die einfachste Form der Datenerfassung ist die **Urliste**. Mit ihr werden die Daten während der Erhebung in der Reihenfolge des Auftretens notiert. Sie enthält eine Auflistung aller ermittelten Daten.

Die Schüler werden einzeln befragt, die Antworten werden jeweils nacheinander notiert:

Beispiel: 2 3 1 3 3 2 3 1 5 2 5 6 2 2 0 10 2 2 1 5

Weitere Möglichkeiten der Datenerfassung

Die Erfassung von Daten in einer Urliste ist eine unübersichtliche Darstellung. Sie wird aber immer dann erforderlich, wenn Daten erhoben werden, bei denen vorher mögliche Ergebnisse unbekannt sind. Sind diese bekannt, kann vor der Erhebung der Daten eine Tabelle (auch Häufigkeitstabelle genannt) angelegt werden.

Eine Urliste kann auch in eine **Häufigkeitstabelle** übertragen werden. Für das Erfassen bzw. Übertragen der Daten bietet sich eine **Strichliste** an. Dabei wird jedes Ergebnis mit einem senkrechten Strich erfasst. Der fünfte Strich wird quer gesetzt, sodass hier die Fünfer-Bündelung eine bessere Übersicht darstellt. Die Gesamtanzahl der einzelnen Ergebnisse wird dann als Zahl notiert. Diese wird als **absolute Häufigkeit** oder kurz **Häufigkeit** bezeichnet.

In unserem Beispiel könnte auch eine Häufigkeitstabelle angelegt und die Daten gleich damit erfasst werden. Zu den jeweiligen Ergebnissen werden die entsprechenden Häufigkeiten als Strichliste erfasst.

<table>
<tr><th>Anzahl der Runden</th><th>Strichliste</th><th>Häufigkeit</th></tr>
<tr><td>0</td><td>|</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>|||</td><td>3</td></tr>
<tr><td>2</td><td>~~||||~~ ||</td><td>7</td></tr>
<tr><td>3</td><td>||||</td><td>4</td></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td>0</td></tr>
<tr><td>5</td><td>||</td><td>3</td></tr>
<tr><td>6</td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td>7</td><td></td><td>0</td></tr>
<tr><td>8</td><td></td><td>0</td></tr>
<tr><td>9</td><td></td><td>0</td></tr>
<tr><td>10</td><td>|</td><td>1</td></tr>
</table>

Die Strichliste wird nicht notwendig, wenn alle Befragten in einem Raum sind. Dann kann durch Auszählung der Stimmen gleich die Häufigkeit der Ergebnisse notiert werden. Diese kann nun schon zur

Auswertung der Daten genutzt werden. Zur besseren Veranschaulichung der Daten können graphische Darstellungen genutzt werden. (vgl. 2.2.3.1)

Wie können unterschiedlich große Stichproben miteinander verglichen werden?

Für den Vergleich unterschiedlich großer Stichproben wird die Berechnung der **relativen Häufigkeiten** erforderlich. Dadurch entstehen Anteile bzw. prozentuale Werte, die miteinander verglichen werden können. Die relative Häufigkeit ist der Quotient aus der absoluten Häufigkeit eines Ergebnisses und dem Umfang der Stichprobe. Sie kann als Bruch, Dezimalbruch oder auch in Prozent (dann auch als **prozentuale Häufigkeit** bezeichnet) angegeben werden.

$$\text{relative Häufigkeit} = \frac{\text{absolute Häufigkeit}}{\text{Gesamtanzahl}}$$

Beispiel: Vergleich der Ergebnisse des Sponsorenlaufs beider zweiten Klassen:

Klasse 2a	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
absolute Häufigkeit	1	3	7	4	0	3	1	0	0	0	1
relative Häufigkeit	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{4}{20}$	0	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$	0	0	0	$\frac{1}{20}$
proz. Häufigkeit	5 %	15 %	35 %	20 %	0 %	15 %	5 %	0 %	0 %	0 %	5 %

Klasse 2b	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
absolute Häufigkeit	1	1	7	9	5	2	1	0	0	0	0
relative Häufigkeit	0	$\frac{1}{26}$	$\frac{7}{26}$	$\frac{9}{26}$	$\frac{5}{26}$	$\frac{2}{26}$	$\frac{1}{26}$	0	0	0	0
proz. Häufigkeit	3,8 %	3,8 %	27 %	34,7 %	19,2 %	7,7 %	3,8 %	0 %	0 %	0 %	0 %

Da beide Klassen eine unterschiedliche Schüleranzahl haben, können für einen Vergleich nur die Anteile miteinander verglichen werden. Daraus ergibt sich hier, dass in der Klasse 2a 35 % der Schüler 2 Runden gelaufen sind und in der Klasse 2b nur 27 % der Schüler, obwohl die absoluten Häufigkeiten in beiden Klassen gleich sind.

2.2.1.2 Hinweise für den Unterricht

Wie kann eine Datenerfassung in der Grundschule durchgeführt werden?

Datenerfassung im Anfangsunterricht

Im Unterricht der Grundschule beginnt die Datenerfassung bei einfachen Befragungen mit zwei möglichen Ergebnissen, wie z. B. „Nimmst du am Sponsorenlauf teil?“ Jeder Schüler kann einen Steckwürfel oder einen Spielchip auf eines der Ergebnisse legen. Dabei erkennen die Schüler schnell, dass diese Form der Datenerfassung sehr unübersichtlich ist. Aus diesem Grund wird eine Möglichkeit der übersichtlichen Darstellung benötigt. Die Schüler könnten nun die Häufigkeiten in Fünfer-Bündel legen, damit besser gezählt werden kann. Aus dieser Bündelung sollte sich dann die Strichliste entwickeln. Hier kann von der Lehrkraft gefragt werden, wie gezählt werden kann, wenn keine Materialien vorhanden sind. Die Schüler werden dann auf die Finger kommen oder auch auf Striche an der Tafel. Dann kann zunächst die gleiche Befragung mithilfe der Striche an der Tafel durchgeführt werden. Es wird schnell sichtbar, dass auch hier zum besseren Zählen die Striche gebündelt werden müssen. Dies kann zunächst durch Einkreisen von Fünfer-Bündeln erfolgen. Im nächsten Schritt wäre dann zu überlegen, wie gleich beim Zählen die Bündel festgelegt werden können und die Lehrkraft gibt dann die Variante der Strichdarstellung als einfachere Darstellung vor. Da zum einen die motorischen Fähigkeiten der Schüler im Anfangsunterricht noch nicht so ausgeprägt sind und zum anderen eine Strichliste erst durch die Bündelung mehrerer Häufigkeiten eine Verbesserung der Darstellung ist, empfiehlt sich hier die Einführung nach dem vollständigen Erschließen des 20er-Zahlenraumes. Eine andere Möglichkeit ist, dass die Darstellung einer Zahl mithilfe von Strichen den Schülern auch als eine Form der Zahldarstellung gezeigt werden kann. Beim Zählen von Objekten sollte sie deswegen eine Rolle spielen und auch schon hier eingeführt werden. Dabei muss deutlich werden, dass es einen Unterschied zwischen dem Zählen im Kopf und dem Erfassen der Anzahlen mittels der Strichliste gibt. Es geht hier nicht darum, die Gesamtanzahl zu ermitteln und danach diese als Strichbild darzustellen. Für das Erfassen der Anzahlen bieten sich verschiedene Zählbilder an.

Schwierigkeiten mit Strichlisten

Bei der Erarbeitung der Strichliste müssen auch die motorischen Fähigkeiten der Schüler beachtet werden. Es kann durchaus zu Problemen bei der Erstellung einer Fünfer-Bündelung kommen. Hier sollte zunächst mit großen Strichen gearbeitet werden. Dabei ist die Lage des fünften Striches nicht entscheidend. Wichtig ist hier nur, dass er die anderen 4 Striche durchstreicht.

Umgang mit Urlisten

Die Urliste kann später zur Erfassung von Daten mit vielen Ergebnissen eingeführt werden. Häufig wird sie in der zweiten Klasse zur Sammlung von Daten rund um das Wetter eingesetzt (z. B. Temperaturmessungen).

Für die Einführung ist sie sehr unübersichtlich und für die Schüler nicht gut erfassbar. Manchmal müssen aber vorhandene Urlisten in eine Häufigkeitstabelle übertragen werden. Dabei sollte der Schüler mit der Nichtschreibhand immer auf das erfasste Ergebnis tippen und dabei mit der Schreibhand den entsprechenden Strich in der Strichliste an der richtigen Stelle erstellen. Die Übertragung der Daten aus der Urliste in die Strichliste kann auch in Partnerarbeit erfolgen. Dabei liest ein Schüler die Daten vor und der andere füllt die Strichliste aus.

Einsatz von Häufigkeitstabellen

Die Einführung einer Häufigkeitstabelle stellt eine neue Schwierigkeit für die Schüler da. Jetzt werden nicht mehr einzelne Objekte gezählt, sondern das zu zählende Objekt muss noch in einer Tabelle gefunden werden. Hier ist es sinnvoll, die Tabelle an der Tafel oder dann im Heft der Schüler vorzubereiten. Die Häufigkeitstabelle entsteht im Prozess der Datenerfassung. Hierzu sollte zunächst die erste Spalte mit den Ergebnissen erstellt werden. Nun werden in der zweiten Spalte die Daten mithilfe der Strichliste erfasst. Die Schüler müssen nun jeweils für das Auftreten eines Ergebnisses einen Strich in der entsprechenden Zeile erstellen. Nach Erfassung der Daten mithilfe der Strichliste ist diese Spalte abgeschlossen. Es kann wieder eine senkrechte Spaltentrennlinie gezogen werden. Dann wird die dritte Spalte mit den absoluten Häufigkeiten ausgefüllt werden. Dazu müssen die Fünfer-Bündel und die einzelnen Striche von jedem Ergebnis addiert werden. Die Gesamthäufigkeit wird als Ergebnis in die letzte Spalte als Zahl notiert. Dabei wird in der Grundschule noch nicht von der absoluten Häufigkeit gesprochen, denn es muss nicht zwischen der absoluten und relativen Häufigkeit unterschieden werden. Hier wird der Begriff Häufigkeit verwendet.

Da die Häufigkeitstabelle ein gewisses Abstraktionsvermögen der Schüler benötigt, sollte sie erst nach mehreren Übungen zur Strichdarstellung von Zahlen eingeführt werden.

Strichlisten und Urlisten im Beispiel Sponsorenlauf

Mit dem Beispiel Sponsorenlauf kann die Anzahl der Runden von den Schülern in einer Häufigkeitstabelle erfasst werden. Dazu sollte eine Häufigkeitstabelle vorgegeben werden (1. Spalte: Namen der Schüler). Die Schüler können nun beim Lauf die Anzahl der Runden mithilfe der Häufigkeitstabelle erfassen. Die zweite Möglichkeit der Datenerfassung (Urliste) kann von anderen Schülern parallel durchgeführt werden. Dabei können direkt beim Lauf die Namen der Schüler Runde für Runde nacheinander aufgeschrieben werden. Diese Daten müssen dann in eine Häufigkeitstabelle übertragen werden (siehe Umgang mit Urlisten).

Umgang mit relativen Häufigkeiten

Eine Berechnung der relativen Häufigkeiten wird in der Grundschule nicht vorgenommen. Es könnte hier eine Vorbereitung erfolgen, dass man die entsprechenden Anzahlen der Schüler (Teilmenge, Gesamtmenge) nennt, um über das Verhältnis der einzelnen Merkmalsausprägung zur Gesamterhebung eine Aussage treffen zu können (4 von 20 Schülern sind 3 Runden gelaufen). Diese Angabe ist häufig in Lehrbüchern zu finden. Da die Schüler aber den Bruchbegriff noch nicht kennen, wird der Umgang mit der relativen Häufigkeit erst ab der 5.Klasse eine Rolle spielen.

2.2.2 Arten von Skalen und Daten

Bei der Darstellung von Daten in Diagrammen und auch bei der Berechnung von statistischen Kenngrößen wie etwa den Durchschnitt muss beachtet werden, um welche Art von Skalen bzw. Daten es sich handelt. Daraus ergibt sich eine Reihe von Konsequenzen, die bei vielen Darstellungen in Schullehrbüchern und auch in der Presse nicht beachtet werden.

Welche Arten von Daten und Skalen können auftreten?

Man kann drei Arten und Skalen unterscheiden. Die einfachste Skala ist die **Nominalskala** oder auch **kategorialen Skala.** Sie enthält lediglich Bezeichnungen oder Namen. Die mit einer Nominalskala erfassten Daten heißen **Kategorien** oder **kategorialen Daten**.

Beispiele:

- Bei einer Befragung kann nur mit „Ja“ oder „Nein“ beantwortet werden. Die Skala enthält in diesem Fall nur die beiden Skalenwerte (Kategorien) „Ja“ und „Nein“.
- Wird nach dem Geschlecht gefragt, so sind „männlich“ und „weiblich“ die Skalenwerte.
- Bei einer Befragung nach den Lieblingstieren werden z. B. die Tierarten Katze, Hund, Pferd und Vogel vorgegeben, die in diesem Fall die Werte der Skala bilden.
- Kategorien können auch die Lieblingsfächer oder die Berufswünsche von Schülern sein.

Alle Kategorien sind gleichberechtigt, man kann keine Rang- oder Reihenfolge angeben, Kategorien können beliebig vertauscht werden.

Bei der grafischen Darstellung von kategorialen Daten in einem Häufigkeitsdiagramm muss man folgendes beachten:

- Die Reihenfolge der Kategorien auf der Achse ist beliebig.
- Die Abstände zwischen den einzelnen Werten auf der Achse sind im Prinzip beliebig, in der Regel werden sie aber aus ästhetischen Gründen in gleichen Abständen angeordnet.
- Die Merkmalsachse sollte keinen Pfeil enthalten.

Mit kategorialen Daten können nur sehr wenige statistische Kenngrößen berechnet werden, so ist eine Berechnung des Durchschnitts nicht möglich.

Die zweite Art von Skalen sind die **Rangskalen** oder **ordinale Skalen.** Bei ihnen sind die Skalenwerte nicht mehr gleichberechtigt, sondern können in eine Reihenfolge gebracht werden. Allerdings ist der Abstand zwischen zwei Skalenwerte nicht gleich oder hat keine Bedeutung. Die Daten, die mit ordinalen Skala erfasst werden, heißen **Rangdaten** oder **ordinale Daten**.

Beispiele:

- Zu den Rangdaten gehören die Platzierungen bei sportlichen Wettkämpfen. Zwischen dem ersten und zweiten Platz können die Unterschiede bei einem Wettkampf der Aber auch sehr klein sein
- Auch Schulnoten zählen zu den Rangdaten. Der Abstand zwischen zwei Schulnoten ist unterschiedlich, er richtet sich nach den prozentualen Erfüllungsquoten für die betreffende Note.

Bei der grafischen Darstellung von Rangdaten in einem Häufigkeitsdiagramm folgendes beachtet werden:

- Es gibt eine festgelegte Reihenfolge der Werte auf der Merkmalsachse.
- Die Abstände zwischen den einzelnen Werten auf der Achse sind im Prinzip beliebig, in der Regel werden sie aber aus ästhetischen Gründen in gleichen Abständen angeordnet.
- Die Merkmalsachse sollte keinen Pfeil enthalten.

Mit Rangdaten können eine Reihe statistischer Kenngrößen berechnet werden, aber eine Berechnung des Durchschnitts ist ebenfalls nicht möglich.

Die dritte Art von Skalen sind die **metrischen** oder **Intervallskalen**. Es gibt eine festgelegte Reihenfolge und der Abstand zwischen den Hauptwerten der Skala ist stets gleich. Die damit erfassten Daten heißen **metrische Daten**.

Beispiele:

- Anzahl der gelaufenen Runden im Sponsorenlauf
- gemessenen Temperaturen zu bestimmten Tageszeiten
- Massen von Schultaschen

Bei der Darstellung von metrischen Daten in einem Diagramm muss eine maßstäbliche Einteilung der Achse mit gleichen Abständen erfolgen. Die Merkmalsachse sollte einen Pfeil enthalten.

Mit metrischen Daten können alle statistischen Kenngrößen berechnet werden.

Neben der Einteilung der Skalen in die genannten drei Arten gibt es noch eine weitere Klassifizierung, die ebenfalls Bedeutung für die grafische Darstellung von Daten hat. Man unterscheidet **diskrete** und **stetige Skalen**. Eine Skala heißt **diskret**, wenn sie nur einzelne (isolierte) Werte enthält, zwischen denen es keine weiteren gibt. Eine Skala heißt **stetig**, wenn es zwischen zwei Werten immer noch viele weitere (theoretisch unendlich viele) gibt.

Beispiele:

- Alle Nominal- und Rangskalen sind diskrete Skalen. Zwischen je zwei benachbarten Werten gibt es keine weiteren.
- Skalen, mit denen die Anzahl von Geschwistern oder von Schüler in den Klassen einer Schule erfasst wird, sind diskrete Skalen.
- Werden auf einer Skala Größen wie die Länge, die Zeit oder die Masse abgetragen, so handelt es sich um eine stetige Skala. So liegen zum Beispiel zwischen den Skalenwerten 1 cm und 2 cm noch viele weitere Werte, je genauer man misst. Allerdings ist die Anzahl dieser Werte in der Praxis stets endlich, da man die Messgenauigkeit nicht beliebig erhöhen kann.

Für die grafische Darstellung ergeben sich folgende Konsequenzen. Handelt es sich um eine diskrete Skala, so macht es keinen Sinn, Datenpunkte miteinander zu verbinden, da es ja zwischen den einzelnen Skalenwerten keine weiteren Werte gibt. Bei stetigen Skalen können Datenpunkte durch Linien verbunden werden.

Müssen Grundschüler die verschiedenen Daten- und Skalenarten kennen?

Diese Frage ist klar mit NEIN zu beantworten. Allerdings muss schon in der Grundschule die Grundlage für ein Verständnis der unterschiedlichen Merkmale gelegt werden. Dieses Grundverständnis wird beim Lesen und Zeichnen von Liniendiagrammen vermittelt (vgl. 2.2.4.1). Bei einigen Erhebungen werden in der Grundschule auch stetige Skalen verwendet (Dauer des Frühstücks, Masse der Schultasche usw.) betrachtet. Hier sollte die Lehrkraft mögliche Ergebnisse vorgeben, damit die Schüler zum einen nicht bei der Auswertung der Daten zu viele Ergebnisse haben (die dann eventuell noch gruppiert werden müssten) oder die Schüler mit gebrochenen Zahlen umgehen müssen. Zum Beispiel bei der Dauer des Frühstücks werden nur ganze Minuten angegeben, die Schüler müssen ihre Werte auf- oder abrunden.

2.2.3 Möglichkeiten der grafischen Darstellung

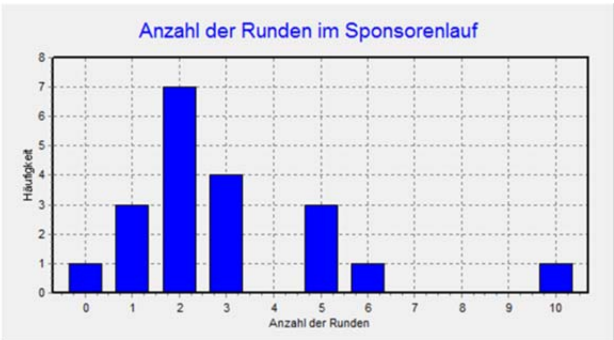
2.2.3.1 Fachliche Grundlagen

Vor einer statistischen Erhebung und der damit verbundenen Sammlung von Daten und deren anschließende Auswertung muss überlegt werden, welche Form der Erfassung benutzt werden soll. Nicht jedes Diagramm eignet sich dabei für jede statistische Erhebung. Es werden zunächst folgende Arten von Diagrammen betrachtet: Streifendiagramm, Streckendiagramm, Kreisdiagramm, Flächendiagramm, Liniendiagramm und Bilddiagramm.

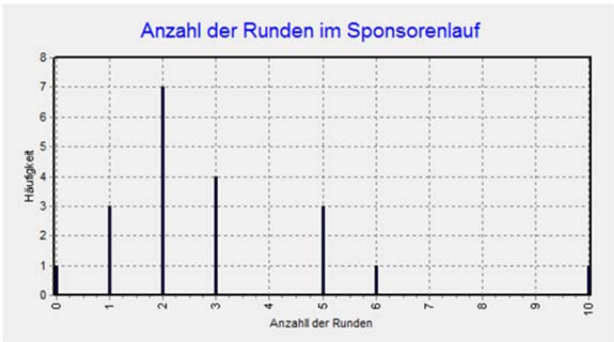
Das Streifendiagramm und das Streckendiagramm

In einem **Streckendiagramm** wird die Häufigkeit der Ergebnisse in einem rechtwinkligen Koordinatensystem als Strecke mit der entsprechenden Länge dargestellt. Das **Streifendiagramm** unterscheidet sich nur insofern von dem Streckendiagramm, dass statt der Strecke ein beliebig breiter Streifen benutzt wird. Die Strecken bzw. Streifen können sowohl senkrecht als auch waagerecht dargestellt werden. Am häufigsten sind die Ergebnisse auf der x-Achse und die Häufigkeiten auf der y-Achse dargestellt. Teilweise werden Streifendiagramme mit senkrechten Streifen auch **Säulendiagramm** und mit waagerechten Streifen **Balkendiagramm** genannt.

Streifendiagramm:



Streckendiagramm:

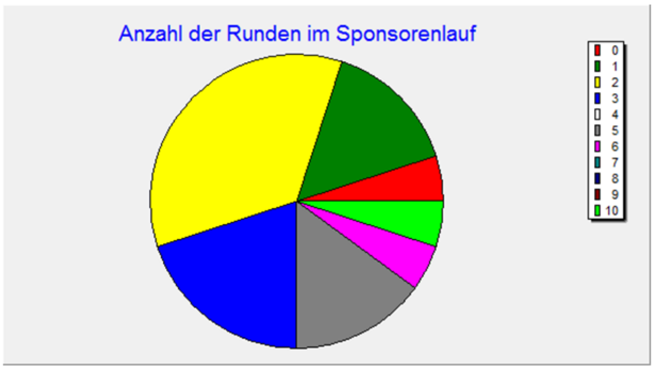


Das Kreisdiagramm

In einem Kreisdiagramm werden die Anteile der Ergebnisse dargestellt. Somit können die einzelnen Anteile in der Grundgesamtheit in Beziehung gesetzt werden. Die Winkelgröße des jeweiligen Kreisausschnitts des Ergebnisses ist das Produkt aus der relativen Häufigkeit und 360°.

Für unser *Beispiel* ergeben sich dann folgende Winkelgrößen:

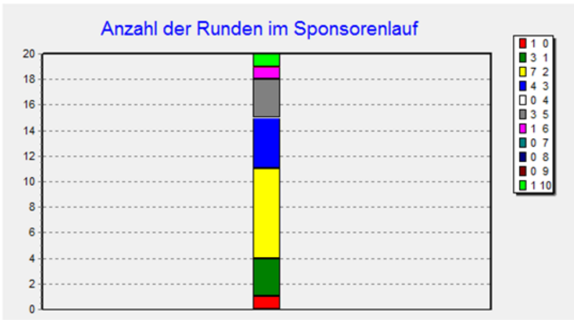
Rundenzahl der Klasse 2a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
absolute Häufigkeit	1	3	7	4	0	3	1	0	0	0	1
rel. Häufigkeit in %	5 %	15 %	35 %	20 %	0 %	15 %	5 %	0 %	0 %	0 %	5 %
Winkelgrößen	18°	54°	126°	72°	0°	54°	18°	0°	0°	0°	18°



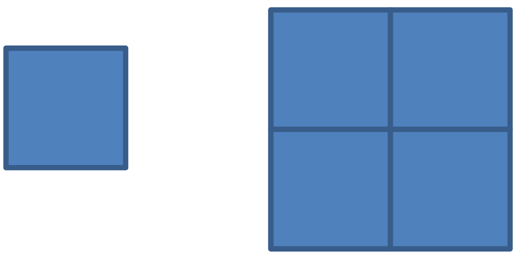
Das Flächendiagramm

Er werden zwei Arten von Flächendiagrammen unterschieden. Zum einen können die Häufigkeiten als Anteile in einer Fläche (meist einem Rechteck) dargestellt werden.
Zum anderen können Häufigkeiten durch zu ihnen proportionale Flächen dargestellt werden.

Anzahl der Runden in einem Rechteck dargestellt



Anzahl von Teilnehmern als Flächen proportional zur Anzahl
(Fläche links entspricht 1 Teilnehmer, Fläche rechts entspricht 4 Teilnehmern)



Das Liniendiagramm

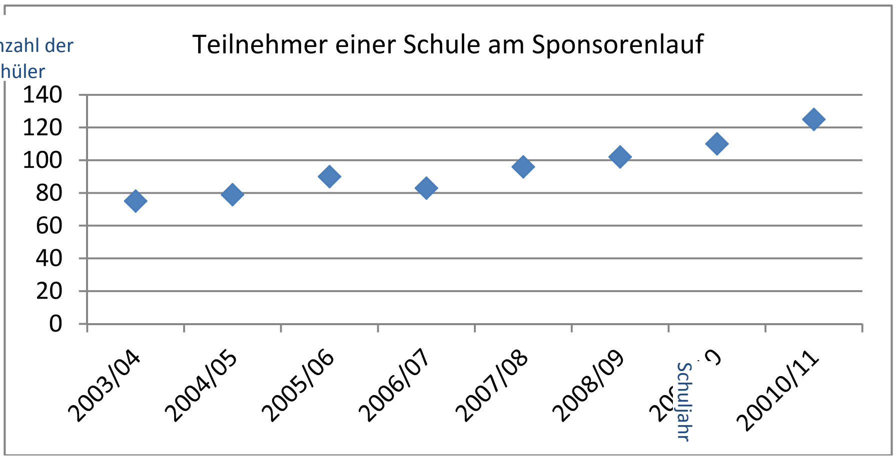
Das Liniendiagramm wird auch als **Kurvendiagramm, Streckenzug** oder **Entwicklungskurve** bezeichnet. Es gibt eine Entwicklung von Daten, meist über einem bestimmten Zeitraum, an. Hiermit soll besonders der Entwicklungstrend veranschaulicht werden.

In einem Liniendiagramm dürfen die Punkte nur verbunden werden, wenn es sich um ein stetiges Merkmal handelt.

Beispiel:

Teilnehmer einer Schule am Sponsorenlauf

Schuljahr	2003/04	2004/05	2005/06	2006/07	2007/08	2008/09	2009/10	20010/11
Anzahl	75	79	90	83	96	102	110	125



In diesem Beispiel können die einzelnen Werte nicht miteinander verbunden werden. Die Anzahl der Teilnehmer eines Jahres am Sponsorenlauf ist ein diskretes Merkmal.

Das Bilddiagramm (auch Piktogramm)

Hier werden die Häufigkeiten durch Bilder, Symbole oder Zeichen veranschaulicht. Dabei werden passend zu den Merkmalen typische Bilder gewählt. Dabei steht ein Bild jeweils für eine bestimmte Anzahl eines Ergebnisses. Im Beispiel steht ein Bild für einen Schüler.

Beispiel:

Anzahl der Runden im Sponsorenlauf

0 Runden	1 Runde	2 Runden	3 Runden	4 Runden	5 Runden	6 Runden	7 Runden	8 Runden	9 Runden	10 Runden
										

2.2.3.2 Hinweise für den Unterricht

Wie sollten die Schüler an das Erstellen von Diagrammen herangeführt werden?

Einsatz von Kreisdiagrammen

In vielen Lehrbüchern werden zur Ausbildung der Kompetenz des Lesens und Interpretierens von Diagrammen Kreisdiagramme benutzt. Hier sollen die Schüler an diese Diagrammform herangeführt werden, indem sie die einzelnen Abschnitte (auch Tortenstücke genannt) an der Größe erkennen. Sie müssen dabei die dazugehörigen Daten finden und können dann einschätzen, welche Ergebnisse am häufigsten vorkommen (größtes Tortenstück). Das selbstständige Erstellen von Kreisdiagrammen wird erst in der Sekundarstufe I mit der Kenntnis der Prozentrechnung erarbeitet und spielt in der Grundschule keine Rolle.

Entwicklungskonzept zur Kompetenz „Darstellen von Diagrammen“

Die Kompetenzen zum Darstellen von Daten in Diagrammen können dabei schrittweise in den einzelnen Klassenstufen entwickelt werden. Hierbei sollte immer zunächst anschaulich gearbeitet werden, um die Denkentwicklung des Schülers zu unterstützen. Die Entwicklung der Diagrammerstellung kann wie folgt ablaufen:

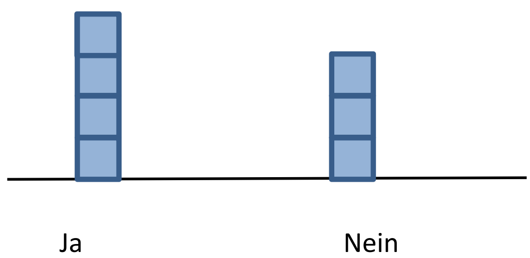
Diagramme in Klasse 1

In dieser Klassenstufe sollte zunächst nur eine Diagrammart behandelt werden, um den Schülern zunächst den ersten Einblick in die Datenerfassung und Aufbereitung zu geben. Dabei ist die Behandlung der Strichliste und Häufigkeitstabelle im Vorfeld nicht zwingend notwendig. Als erste Diagrammart sollten die Schüler das Streifendiagramm kennenlernen. Dabei wird zunächst auf den Begriff „Streifendiagramm“ verzichtet.

Es sollte mit einfachen ***Befragungen*** mit nur ***2 Ergebnissen*** begonnen werden (z. B. Nimmst du am Sponsorenlauf teil? Hast du Haustiere? Kannst du schwimmen?). Die Schüler können die möglichen Ergebnisse schnell erfassen und ihre Entscheidung treffen. Die Daten können nun zunächst handelnd erfasst werden. Dazu bekommt jeder Schüler einen Steckwürfel und kann dann diesen auf das zutreffende Ergebnis legen. Eine andere Möglichkeit ist, dass sich die Schüler entsprechend ihrer Antworten gruppieren.

Die Steckwürfel bzw. Personen liegen bzw. stehen auf den entsprechenden Ergebnissen. Jetzt kann noch keine Aussage über die Häufigkeiten in den einzelnen Gruppen getroffen werden. Die Steckwürfel könnten nun zusammengesteckt werden. Es ergibt sich nun daraus die Höhe (später Länge des Streifens im Diagramm). Auch die Schüler können sich hintereinander aufstellen, sodass aus der Länge der Schülerschlange Schlussfolgerungen gezogen werden können.

Mit derselben Befragung kann nun die Visualisierung in einem ersten „Streifendiagramm“ erfolgen. Dabei wird die waagerechte Achse mit den Ergebnissen als Gerade veranschaulicht und darunter werden die möglichen Ergebnisse notiert. Die Anzahl der Steckwürfel werden dann als Kästchen dargestellt (1 Kästchen = 1 Steckwürfel). Das Ausmalen der Kästchen kann auch durch Aufkleben von passenden Bildern ersetzt werden. Bei beiden Tätigkeiten kann es im Heft der Schüler durch ungenaues Arbeiten zu Fehlern kommen. Vorbereitete Merkmalsachsen auf größeren Kästchen können hier unterstützend wirken.



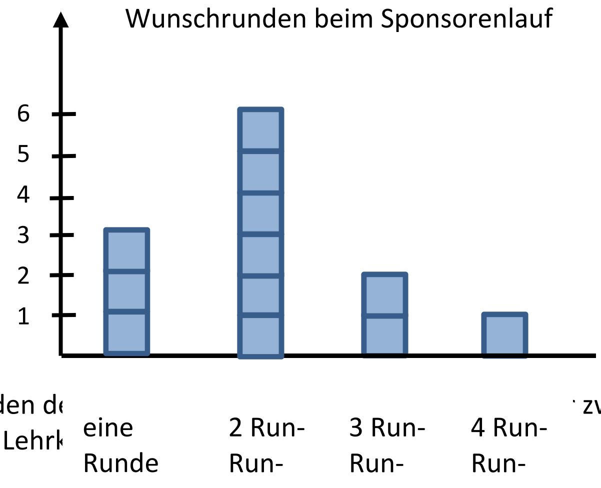
Statt der auszumalenden Kästchen für die entsprechende Häufigkeit der Ergebnisse können auch Kärtchen geklebt werden (mit dem jeweiligen Bild). Auf diese Art und Weise entsteht ein einfaches Bilddiagramm.

Diagramme in Klasse 2

In der 2. Klasse werden die Kenntnisse zum Erstellen des Diagrammes weiterentwickelt. Die Befragung bzw. Sammlung von Daten erfolgt nun durch eine Auswahl von Merkmalen, die mehrere Ergebnisse besitzen. Hier könnten alle Fragen zu Lieblingssachen, wie z. B. Lieblingsfarbe, Lieblingstier usw. benutzt werden. Es kann aber auch nach den zu erwartenden Runden im Sponsorenlauf gefragt werden.

Das Diagramm wird nun erweitert. Es enthält zum einen eine Überschrift als wesentliches Kriterium zur Lesbarkeit und zum anderen die senkrechte Achse, die die Häufigkeit angibt. Auf dieser wird schon die Achseneinteilung vorgenommen. Diese sollte aber noch kästchenweise aufgeteilt sein: 1 aufgetretenes Ergebnis = 1 Kästchen. Dabei wird hier für die Schüler nur der Begriff Achse oder für Häufigkeitsverteilungen auch Häufigkeitsachse verwendet. Die Bezeichnung als x- und y-Achse erfolgt erst in der Orientierungsstufe. Die senkrechte Achse wird notwendig, damit an ihr die Häufigkeiten der Ergebnisse abgelesen werden können.

Beispiel zur Frage: Wie viele Runden möchtest du beim Sponsorenlauf laufen?



Das Finden d… zweiten Klasse schwierig und sollte zunächst von der Lehrk…

Diagramme in Klasse 3

In der dritten Klasse sollten dann die Schüler die Fähigkeit erlangen, selbst passende Überschriften zu Diagrammen zu erstellen. Dabei sollte von folgender Fragestellung ausgegangen werden, die auch beim Lösen von Sachaufgaben benötigt und kann hier trainiert werden. Es sollte die Frage gestellt werden: Worum geht es in der Befragung? Eine mögliche Schülerantwort wäre in unserem Beispiel: Es geht um die zu laufenden Runden im Sponsorenlauf. Daraus kann dann die Überschrift gebildet werden. Diese Teilhandlung kann mit verschiedenen Schaubildern und Diagrammen ohne Überschrift geübt werden.

Als nächstes kommt in dieser Klassenstufe die Benennung der Achsen als weiteres wesentliches Kriterium für die Lesbarkeit von Diagrammen hinzu. Das Diagramm ist nun mit allen wesentlichen Kriterien für dessen Lesbarkeit vollständig. Nun können weitere Diagrammarten eingeführt werden. Dabei können zunächst am Streifendiagramm die Achsen verändert werden, sodass nun die Streifen waagerecht liegen. Die beiden Abbildungen werden miteinander verglichen. Es wird von den Schülern festgestellt, dass sich beide Diagramme nur in der Lage der Streifen unterscheiden. Da sich das Streckendiagramm nicht wesentlich (nur in der Breite der Streifen) von Streifendiagramm unterscheidet, kann es nun als weitere Diagrammart eingeführt werden. Dabei können auch wieder beide Diagrammarten (Streifen- und Streckendiagramm) miteinander verglichen werden.

In Verbindung mit dem Sachunterricht und der Wetterbeobachtung wird das Liniendiagramm eingeführt. Hier sollten zunächst Diagramme gelesen werden, damit die Schüler mit dieser Diagrammart vertraut gemacht werden. Danach können auch Liniendiagramme erstellt werden (gemeinsame Temperaturmessung).

Diagramme in Klasse 4

In der 4. Klasse wird mit größeren Datenmengen gearbeitet. Dabei macht es sich erforderlich, die Häufigkeitsachse anders einzuteilen, denn eine Achseneinteilung 1 Ergebnis = 1 Kästchen oder 1 cm reicht nun nicht mehr aus. Da eine richtige Achseneinteilung einigen Schülern auch in höheren Klassen Schwierigkeiten bereitet, sollte zunächst die Lehrkraft die Achseneinteilung vorgeben. Dies erfolgt mit der Angabe „1 cm steht für …“. Dann erfolgen zunächst einfache Übungen zur Entwicklung dieser Teilhandlung wie z. B. Du hast eine 10 cm lange Achse. Teile diese in 1000er Schritte ein. Ziel dieser Klassenstufe ist das sichere und vollständige Zeichnen eines Diagrammes aus den vorhandenen oder vorher erhobenen Daten. Dabei sind folgende Angaben in einem Diagramm wichtig. Die Fähigkeit der Achseneinteilung sollte hier erstes Grundverständnis beinhalten (gleiche Abstände). Das Bilddiagramm wird hier als eine weitere Möglichkeit der Darstellung größerer Datenmengen eingeführt. Hierbei wählen die Schüler die Bilder mit größeren Verhältnissen aus, z.B. 1 Bild steht für 100 Ergebnisse.

Bis zum Ende der Klassenstufe 4 sollten folgende Kompetenzen entwickelt sein:

(1) Zeichnen eines Häufigkeitsdiagramms mit
   - Erstellen einer Überschrift (Titel des Diagrammes)
   - Beschriftung der beiden Achsen

(2) Erstellen von Liniendiagrammen in vorgegebenen leeren Diagrammen

(3) Erstellen von Bilddiagrammen bei größeren Häufigkeiten

2.2.4 Lesen und Interpretieren von Diagrammen, Fehler in Diagrammen

2.2.4.1 Fachliche Grundlagen

Das Erstellen und Lesen von Diagrammen hängen sehr eng miteinander zusammen. Das Lesen von Diagrammen und die richtige Interpretation der dargestellten Daten ist eine wesentliche Kompetenz für die Bewältigung des täglichen Lebens. In vielen Medien werden Daten in einer Auswertung manipuliert um die Informationen entsprechend einem bestimmten Anliegen darzustellen. Um diese Manipulationen erkennen zu kennen, muss verstanden worden sein, wie Diagramme gelesen werden müssen und worauf ein Leser achten muss. Die erste Manipulation kann in der Planung und Durchführung der Datenerhebung vorgenommen werden (vgl. 2.7). Auch am Diagramm können Manipulationen vorgenommen werden. Aus diesem Grund sollte bei einer Diagramminterpretation wie folgt vorgegangen werden:

1. Verschaffen eines groben Überblicks (Überschrift, Achsenbeschriftungen).
2. Beantwortung der Fragen: Was wurde untersucht? Welche Aussagen kann man dem Diagramm entnehmen?
3. Gibt es Einzelinformationen, die wesentlich sind? Welche Aussagen können gebündelt werden?

Folgende Merkmale sollte ein richtig erstelltes Diagramm aufweisen:

- Das Diagramm enthält eine neutrale, der Fragestellung entsprechende Überschrift.
- Die Achse mit der Darstellung der Häufigkeit muss ***bei null beginnen*** und ist ***gleichmäßig eingeteilt***.
- Die Achse mit der Darstellung der Ergebnisse sollte ***gleichmäßig eingeteilt*** sein und ***alle*** Ergebnisse enthalten.
- Die vorhandenen Achsen müssen beschriftet sein.
- Werden Häufigkeiten durch Flächen oder Körper dargestellt, müssen Flächeninhalt bzw. Volumen proportional zu den Häufigkeiten sein.

2.2.4.2 Hinweise für den Unterricht

Mit dem in Kapitel 0 beschriebenen Entwicklungskonzept zum Zeichnen von Diagrammen sollten die Schüler ab der dritten Klasse in der Lage sein, ein Diagramm mit allen wesentlichen Bestandteilen zu erstellen. Die Umkehraufgabe zu dieser Aufgabe heißt demzufolge: „Überprüfe, ob folgendes Diagramm richtig erstellt wurde." bzw. „Schau dir das folgende Diagramm an. Welche wichtigen Angaben fehlen?"

Weitere Übungen zum Lesen und Interpretieren sollten die Entwicklung einzelne Teilhandlungen beim Erstellen von Diagrammen fördern. Diese Teilhandlungen sind: Finden von Überschriften zu Diagrammen, Benennung der einzelnen Achsen, Einteilung der Achse. Zum Lesen und Interpretieren von Diagrammen kann ein Merkblatt verwendet werden. Dadurch wird den Schülern eine gewisse Vorgabe zur Verfügung gestellt, die einen roten Faden in einer Gesamtinterpretation darstellt. Dieses Merkblatt kann auch zur Bewertung von erstellten Diagrammen als Grundlage einer Benotung benutzt werden.

Das Lesen von Diagrammen findet aber auch immer parallel zum Erstellen von Diagrammen statt. Die erstellten Diagramme können dann also auch von den Schülern gelesen und ausgewertet werden. Dabei können einfache Werte abgelesen werden (z. B. häufigstes Ergebnis, Ergebnis mit der geringsten Häufigkeit)

2.3 Auswertung statistischer Untersuchungen

2.3.1 Analyse von Häufigkeitsverteilungen

2.3.1.1 Fachliche Grundlagen

Was sind Häufigkeitsverteilungen?

Zur statistischen Beschreibung von Daten mit einer damit verbundenen Auswertung werden Häufigkeitsverteilungen genutzt. Eine Häufigkeitsverteilung ist die Zuordnung der Häufigkeiten zu den einzelnen Ergebnissen. Diese können in Tabellen oder auch Diagrammen dargestellt werden.

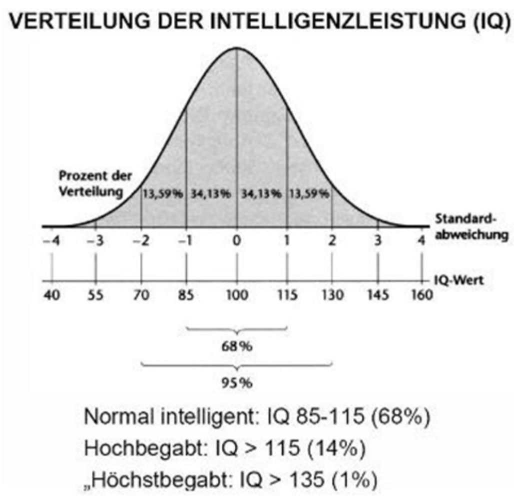
Welche typischen Formen von Häufigkeitsverteilungen gibt es?

Werden die Häufigkeitsverteilungen in einem Diagramm veranschaulicht, so kann man bestimmte Typen von Verteilungsformen unterscheiden. Die Verteilungsformen lassen sich nach folgenden Merkmalen charakterisieren.

- Ist die Verteilung eingipflig oder mehrgipflig?
- Ist die Verteilung linksschief, symmetrisch oder rechtsschief?
- Ist die Verteilung breitgipflig oder schmalgipflig?

Weiterhin können noch spezielle Formen von Verteilungen, wie eine glockenförmige Verteilung, eine Gleichverteilung, eine abnehmende oder zunehmende Verteilung unterschieden werden. Die grafische Darstellung einer bestimmten Verteilung gibt Hinweise auf den Lage der häufigsten Werte und die Streuung, welche in den folgenden Kapiteln genauer beschrieben werden.

Eine sehr bekannte Verteilung ist die Darstellung der allgemeinen Intelligenz des Menschen. Die dargestellt Verteilung heißt **Normalverteilung**. Sie ist glockenförmig und eingipflig.



Quelle: http://www.hochbegabt.ch/images/products/165/Verteilung_p.jpg

Im Vergleich zur Normalverteilung kann die Verteilung schmaler oder breiter (breitgipflig oder schmalgipflig) sein. Hieraus ist dann die Streuung (vgl. 2.3.3.1) ablesbar. Weiterhin kann die Verteilung einen oder mehrere Gipfel besitzen und linksschief bzw. rechtsschief sein, welches Aufschluss über die Anzahl bzw. die Lage des Maximums (der Maxima) gibt.

Welche Kenngrößen der Haufigkeitsverteilungen gibt es?

In der Datenauswertung wird zwischen den **statistischen Kenngrößen der Lage** und **der Streuung** unterschieden. Die Kenngrößen der Lage sind die Mittelwerte. Diese beschreiben die mittlere Lage der Häufigkeitsverteilung. Es gibt verschiedene Mittelwerte. Dazu gehören der **Modalwert**, das **arithmetische Mittel** und der **Median**, deren Verwendung von der Verteilungsform und der Datenart abhängig sind. Die Kenngrößen der Streuung beschreiben, wie die Werte um den Mittelwert verteilt sind, sie werden auch Streuungsmaße genannt.

2.3.2 Beschreibung und Exploration von Daten

2.3.2.1 Fachliche Grundlagen

Was ist der Unterschied zwischen der beschreibenden Statistik und der explorativen Datenanalyse (EDA)?

Die **beschreibende Statistik** dient der komprimierten, übersichtlichen und prägnanten Beschreibung von vorliegenden Daten. Neben der grafischen Darstellung von Daten werden die statistischen Kenngrößen benötigt, die die gesamten Daten möglichst gut repräsentieren. Zu ihnen zählt man insbesondere die Mittelwerte und Streuungsmaße. Die Berechnung dieser Werte ist insbesondere bei größeren Datenmengen mit einem erheblichen Rechenaufwand verbunden.

Die **Explorative Datenanalyse (EDA)** ist ein erst in neuerer Zeit entwickeltes Teilgebiet der Statistik. Sie geht über die reine Beschreibung der Daten hinaus und ermöglicht es zusätzlich, nach unbekannten Strukturen in Datenmengen zu suchen und auf diesem Wege Vermutungen über Zusammenhänge zu finden.

Die Besonderheit der EDA besteht aber auch darin, dass für die Ermittlung der verwendeten Kenngrößen und Diagramme ein vergleichsweise geringer Aufwand erforderlich ist. Wenn die Daten der Größe nach geordnet sind, können die Kenngrößen durch Abzählen ermittelt werden. Zu den Diagrammarten in der explorativen Datenanalyse zählen das **Stamm-Blätter-Diagramm** und der **Boxplot** Für den Boxplot werden die statistischen Kenngrößen **Minimum, Maximum**, der **Median** und die **Viertelwerte** benötigt.

2.3.2.2 Hinweise für den Unterricht

Von den statistischen Kenngrößen, die in der beschreibenden Statistik verwendet werden, können in der Primarstufe nur das arithmetische Mittel in einfachen Fällen, der Modalwert und die Spannweite ermittelt werden.

Es können in der Primarstufe auch Grundvorstellungen und Methoden zur Ermittlung des Medians vermittelt werden.

2.3.3 Methoden der Beschreibenden Statistik

2.3.3.1 Fachliche Grundlagen

Welchen Arten von statistischen Kenngrößen gibt es?

Es wird zwischen den **Lagemaßen** und den **Streuungsmaßen** unterschieden. Die Lagemaße, die auch allgemein als Mittelwerte bezeichnet werden, charakterisieren die Lage prägnanter Werte. Dazu gehören das **arithmetische Mittel** und die **Modalwerte**.

Die Streuungsmaße charakterisieren die Breite und Konzentration der Daten um einen Mittelwert. Zu den Streuungsmaßen gehören die **Spannweite**, die **mittlere Abweichung**, die **Varianz** und die **Standardabweichung**.

Wie kann das arithmetische Mittel berechnet und interpretiert werden?

Das arithmetische Mittel ist der am häufigsten benutzte Mittelwert. In der Fachsprache werden die Begriffe Durchschnitt und arithmetisches Mittel meist als Synonyme verwendet.

Anstelle vom arithmetischen Mittel spricht man oft nur vom Mittelwert. Dies ist aus fachlicher Sicht nicht korrekt, da es mehrere Mittelwerte gibt. In der Umgangssprache ist es aber üblich, nur von Mittelwert zu sprechen, da andere Mittelwerte nicht als solche angesehen werden.

Das arithmetische Mittel kann nur bei Messdaten verwendet werden. Zur Berechnung wird die Summe aller Daten gebildet und dann diese Summe durch die Anzahl der Daten dividiert. Daraus ergibt sich das arithmetische Mittel $\bar{x}$.

Allgemeine Berechnungsvorschrift:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Das bedeutet für unser Beispiel der Anzahl der Runden im Sponsorenlauf der Klasse 2a:

$$\bar{x} = \frac{0+1+1+1+2+2+2+2+2+2+2+3+3+3+3+5+5+5+6+10}{20} = 3$$

Es ist auch möglich aus der Häufigkeitstabelle die Häufigkeiten der Merkmalswerte abzulesen, diese mit dem jeweiligen Merkmalswert zu multiplizieren, die Summen zu addieren und durch die Anzahl zu dividieren.

Berechnungsvorschrift mit absoluten Häufigkeiten:

$$\bar{x} = \frac{H_1 \cdot x_1 + H_2 \cdot x_2 + \cdots + H_n \cdot x_n}{n}$$

(H_i sind die absoluten Häufigkeiten)

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 10}{20} = 3$$

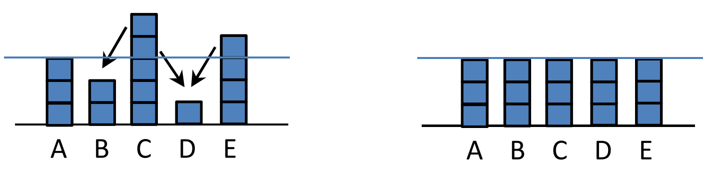
Interpretation des arithmetischen Mittels als Ausgleichswert

Das arithmetische Mittel kann auch als Ausgleichswert betrachtet werden. Dies ist dann möglich, wenn man die verschiedenen Anzahlen zumindest gedanklich gleichmäßig verteilen kann.

Beispiel:

5 Schüler wollen ihre gelaufenen Runden beim Sponsorenlauf gleichmäßig verteilen. Schüler A lief 3 Runden, Schüler B 2 Runden, Schüler C 5 Runden, Schüler D 1 Runde und Schüler E 4 Runden.

vorher: nachher:

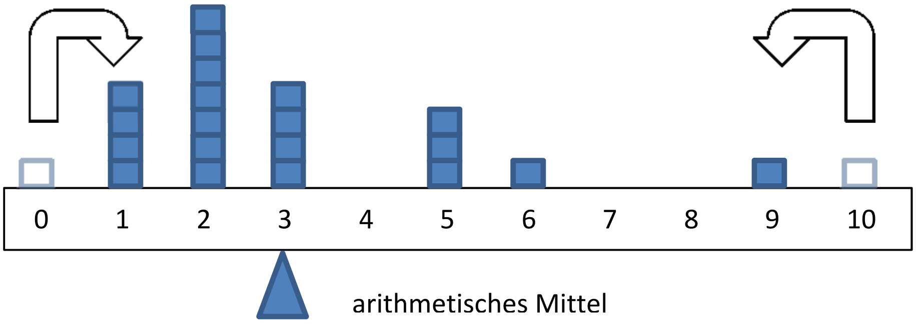


Durch das Verteilen ergibt sich dann an jeder Stelle eine gleiche Anzahl. Diese stellt das arithmetische Mittel der Werte dar.

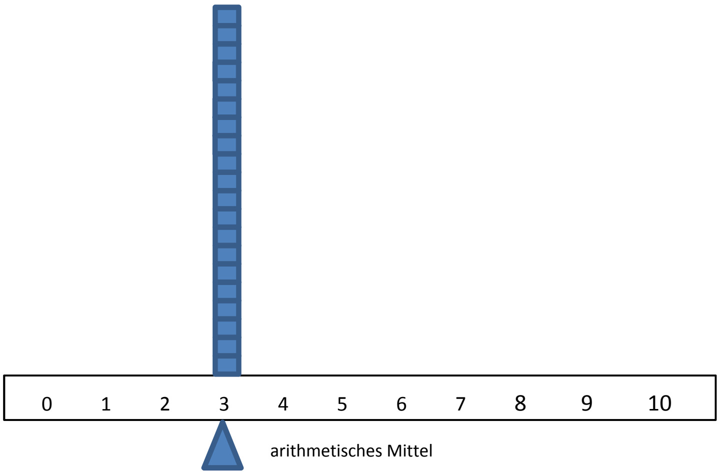
Interpretation des arithmetischen Mittels als Ergebnis des Umstapelns der Werte

Durch gleichzeitige Annährung der äußeren Werte jeweils um 1 ergibt sich nach wiederholter Abfolge dieser Handlung eine Häufung an der Stelle des arithmetischen Mittels. Bei dieser Tätigkeit muss darauf geachtet werden, dass jeweils zeitgleich zwei äußere Objekte um eine Stelle nach innen verschoben werden.

Schritt 1:

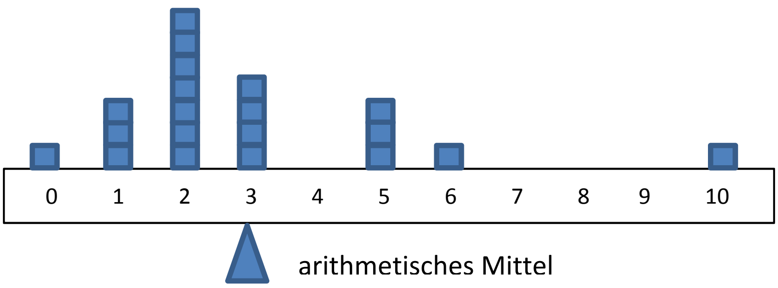


Letzter Schritt (Ablesen des arithmetischen Mittels):



Interpretation des arithmetischen Mittels als Schwerpunkt einer Masseverteilung

Das arithmetische Mittel kann als Schwerpunkt einer Masseverteilung interpretiert werden. Alle Daten werden dafür mit gleichschweren Objekten auf einer Leiste in gleichen Abständen dargestellt. Die Leiste kann dann genau an der Stelle des arithmetischen Mittels ausbalanciert werden.



Eigenschaften des arithmetischen Mittels

Das arithmetische Mittel liegt immer zwischen dem größten und kleinsten Wert der Verteilung. Dabei gibt es die Besonderheit, dass das Mittel nicht unbedingt als Wert unter den ermittelten Daten auftauchen muss, so ist z. B. die Durchschnittsnote in einer Arbeit ist meist eine gebrochene Zahl. Diese Besonderheit kann zu Verständnisschwierigkeiten führen, wenn es sich bei den Daten um Anzahlen handelt. So ist z. B. nicht einfach zu verstehen, dass die durchschnittliche Augenzahl beim Würfeln 3,5 beträgt oder in einer Familie in Deutschland durchschnittlich 1,6 Kinder leben.

Eine weitere wesentliche Eigenschaft ergibt sich aus der Berechnungsvorschrift des arithmetischen Mittels und ist sehr gut bei der Veranschaulichung über die Masseverteilung sichtbar. Das arithmetische Mittel ist empfindlich gegenüber großen Abweichungen in den ermittelten Daten. Wenn von erhobenen Daten nur das arithmetische Mittel und nicht die dahinter stehenden Daten zur Auswertung zur Verfügung stehen, kann es bei sehr unsymmetrischen Verteilungen zu falschen Einschätzungen bzw. Interpretationen kommen.

Was ist ein Modalwert und wie kann er ermittelt werden?

Der Modalwert wird auch als **Modus** oder als **häufigster Wert** bezeichnet. Der Modalwert ist der Wert, der am häufigsten in der Verteilung vorkommt, wenn die Verteilung eingipflig ist. Bei mehrgipfligen Verteilungen sich gibt es auch mehrere Modalwerte.

Bei kategorialen Daten sind Modalwert die einzigen verwendbaren Mittelwerte.

Der oder die Modalwerte können aus einer Häufigkeitstabelle ermittelt werden, indem man die Werte mit den größten Häufigkeiten abliest.

Welche Streuungsmaße gibt es und wie können sie ermittelt und interpretiert werden?

Mittelwerte allein ermöglichen oft keine hinreichende Beschreibung einer Verteilung. Ein wesentlicher Aspekt zur Charakteristik einer Verteilung sind Aussagen darüber, wie sich die Werte um einen Mittelwert verteilen. Diese Eigenschaft wird allgemein als Streuung bezeichnet. Die Werte können wenig oder stark um einen Mittelwert streuen, man sagt die Streuung ist gering bzw. groß.

Mit folgendem häufig verwendeten Beispiel kann der Unterschied zwischen Mittelwert und Streuung gut verdeutlicht werden.

Die Tiefe eines Sees wurde an mehreren Stellen gemessen. Die Messwerte ergeben eine durchschnittliche Wassertiefe von 1,20 m. Es ergibt sich die Frage, ob ein Nichtschwimmer mit einer Körpergröße von 1,80 m unbedenklich im See baden kann. An dieser Frage wird sehr deutlich, dass der Durchschnitt allein hier nichts nützt. Für den Nichtschwimmer ist es wichtig, ob es eine Stelle im See gibt, an der er nicht mehr stehen kann, wie groß also die maximale Abweichung vom Mittelwert ist.

Spannweite

Das einfachste Streuungsmaß ist die Spannweite w einer Verteilung. Sie ist die Differenz aus dem größten und kleinsten Wert.

$w = x_{max} – x_{min}$

Zur Interpretation der Spannweite kann die Formulierung verwendet werden, dass sich die Werte maximal um die Spannweite w unterscheiden.

Beispiel:

Für den Sponsorenlauf gilt: w = 10 – 0 = 10. Man kann damit zum Beispiel formulieren, dass die Unterschiede in den gelaufenen Runden bis zu 10 Runden betragen. Es ist auch möglich zu sagen, dass sich die Anzahlen der gelaufenen Runden um maximal 10 Runden unterscheiden.

Mittlere lineare Abweichung

Die mittlere lineare Abweichung d ist ein Maß für die durchschnittlichen Abweichungen aller Messwerte vom Mittelwert. In der Regel wird hierfür das arithmetische Mittel benutzt. Da die Summe aller Abweichungen zum Mittelwert immer Null ergibt, wird die Summe der Beträge gebildet.

Die Berechnung erfolgt mit folgender Formel:

$$d = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} |x_i - \overline{x}|$$

Beispiel:
Die Schüler zweier 3. Klassen sägen im Werkunterricht Holzleisten. Jede Leiste soll 20,0 cm lang sein, d.h. es soll auf Millimeter genau gearbeitet werden. Es werden in jeder der beiden Klassen jeweils 7 Leisten zur Kontrolle nachgemessen, die zufällig aus dem Stapel der gesägten Leisten entnommen werden. Dabei ergeben sich folgende Werte:

Klasse 3a: 19,6 cm; 20,0 cm; 19,7 cm; 20,4 cm; 19,9 cm; 20,3 cm; 20,1 cm

Klasse 3b: 19,2 cm; 21,1 cm; 20,7 cm; 20,8 cm; 19,3 cm; 20,0 cm; 18,9 cm

Das arithmetische Mittel der 7 Werte beträgt in beiden Klassen genau 20 cm. Um festzustellen, welche Klasse genauer gearbeitet hat, werden die mittleren linearen Abweichungen berechnet:

Klasse 3a:

$$d = \frac{1}{7} \cdot (|19{,}6 - 20| + |20.0 - 20| + |19{,}7 - 20| + |20{,}4 - 20| + |19{,}9 - 20| + |20{,}3 - 20| + |20{,}1 - 20|) cm$$

$$d = \frac{1}{7} \cdot (0{,}4 + 0 + 0{,}3 + 0{,}4 + 0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}1)\ cm$$

$$d = \frac{1}{7} \cdot 1{,}6\ cm$$

$d \approx$ 0,23 cm

Es wird deutlich, dass die durchschnittlichen Abweichungen vom arithmetischen Mittel mit 23 mm und damit die Streuung gering sind.

Klasse 3b:

$$d = \frac{1}{7} \cdot (|19{,}2 - 20| + |21{,}1 - 20| + |20{,}7 - 20| + |20{,}8 - 20| + |19{,}3 - 20| + |20{,}0 - 20| + |18{,}9 - 20|)\ cm$$

$$d = \frac{1}{7} \cdot (0{,}8 + 1{,}1 + 0{,}7 + 0{,}8 + 0{,}7 + 0 + 1{,}1)\ cm$$

$$d = \frac{1}{7} \cdot 5{,}2\ cm$$

$d \approx$ 0,74 cm

Hier ist die mittlere lineare Abweichung mit 0,74 cm größer als in Klasse 3a. Somit ist festzustellen, dass die Klasse 3a genauer gearbeitet hat.

Dieses Beispiel wurde genutzt, um die Berechnung der mittleren linearen Abweichung zu verdeutlichen. Bei dieser geringen und übersichtlichen Anzahl der Messergebnisse sind Schlussfolgerungen auch ohne Berechnung der mittleren linearen Abweichung möglich. Bereits durch die Ermittlung der

Spannweite werden schon die Unterschiede zwischen den Klassen deutlich. Die Messwerte in der Klasse 3a unterscheiden sich nur um bis zu 8 mm, während die Unterschiede in den Längen der Leisten in der Klasse 3b bis zu 2,2 cm betragen.

Varianz

Ein weiteres wichtiges Streuungsmaß ist die Varianz s^2. Hier wird nicht die Summe der Beträge der Abweichungen vom arithmetischen Mittel gebildet, sondern die Summe der Quadrate der Abweichungen. Die Varianz und die daraus leicht zu berechnende Standardabweichung sind in der Praxis die am häufigsten verwendeten Streuungsmaße. Die Verwendung der Quadrate anstelle der Beträge ergibt sich aus innermathematischen Überlegungen.

Die Formel für die Berechnung der Varianz lautet:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i-1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

Die Verwendung des Nenners n – 1 ergibt sich ebenfalls aus innermathematischen Gründen. Darauf soll im Sinne einer unkomplizierten Behandlung hier nicht weiter eingegangen werden.

Für das Beispiel der Klasse 3a erhält man:

$$s^2 = \frac{1}{6}\lfloor(19{,}6-20)^2 + (20{,}0-20)^2 + (19{,}7-20)^2 + (20{,}4-20)^2 + (19{,}9-20)^2 + (20{,}3-20)^2 + (20{,}1-20)^2\rfloor cm^2$$

$$s^2 = \frac{1}{6}\lfloor 0{,}16 + 0 + 0{,}09 + 0{,}16 + 0{,}01 + 0{,}09 + 0{,}01\rfloor\ cm^2$$

$s^2 = \frac{1}{6}\lfloor 0{,}52\rfloor$ = 0,087 cm²

Standardabweichung

Die Varianz hat durch das Quadrieren der Werte nicht die gleiche Dimension wie die Werte der Verteilung. Aus diesem Grund wurde zusätzlich noch ein weiteres Streuungsmaß eingeführt, die Standardabweichung s. Diese ergibt sich als Wurzel aus der Varianz.

Für die Klasse 3a beträgt damit die Standardabweichung s = $\sqrt{0{,}087\ \text{cm}^2}$ ≈ 0,29 cm

Im Unterschied zur mittleren Abweichungen, bei der alle Abstände vom Mittelwert gleich gewichtet werden, werden bei der Standardabweichung die Abstände vom Mittelwert quadriert, was zur Folge hat, dass große Abweichungen stärker und kleinere Abweichungen kaum ins Gewicht fallen.

Eine Interpretation der Varianz bzw. der Standardabweichung ist direkt nur mit Mitteln der mathematischen Statistik möglich. Man kann in der Sekundarstufe I lediglich verschiedene Standardabweichungen zum gleichen Mittelwert vergleichen.

2.3.3.2 Hinweise für den Unterricht

Die Berechnung des arithmetischen Mittels kann erst nach der Einführung und sicheren Operationsvorstellung der Division als Möglichkeit der Auswertung von Daten genutzt werden. Das bedeutet, dass Vorstellungen zum arithmetischen Mittel ab der 3. Klasse entwickelt werden könnten. Eine Schwierigkeit ist der Umgang mit den gebrochenen Zahlen im Ergebnis. Aus diesem Grund müssen zur Berechnung des arithmetischen Mittels immer Daten gesucht werden, die ein ganzzahliges arithmetisches Mittel haben.

Zu den drei inhaltlichen Interpretationen des arithmetischen Mittels (Ausgleichswert, Ergebnis beim Umstapeln der Werte und Schwerpunkt) können bereits in der Primarstufe erste Vorstellungen ausgebildet werden. Dabei sollte zunächst mit der Interpretation des arithmetischen Mittels als Ausgleichwert begonnen werden. Dies sollte auf spielerische Art erfolgen. Man kann dazu in der 3. Klasse mit der Bedeutung als Ausgleichswert beginnen im Sinne einer gerechten Verteilung. Dies entspricht auch der Operationsvorstellung der Division als gleichmäßiges Verteilen. Dieser Zusammenhang sollte den Schülern verdeutlicht werden, indem einfach mit Steckwürfeln oder realen Objekten gearbeitet wird.

Die Entwicklung der Vorstellungen zum arithmetischen Mittel als Schwerpunkt einer Masseverteilung sollte auch handelnd erfolgen. Hier kann zunächst ein Lineal oder eine Leiste benutzt werden, auf der Steckwürfel in gleichen Abständen platziert werden. Dazu sollte durch Nägel oder andere Vorrichtungen (aufgeklebte Steckwürfel) eine Fixierung der Würfel in gleichen Abständen möglich sein. Das Lineal/die Leiste wird dann mit den darauf befindlichen Steckwürfeln ausbalanciert. Hier ist eventuell Partnerarbeit angebracht. Die Schüler können spielerisch erfahren, was passiert, wenn sich Werte der Verteilung verändern. Auch das Problem mit Ausreißern kann hier experimentell erprobt werden. Mit den Steckwürfeln kann dann auch das Umstapeln ausprobiert werden. Dabei muss das arithmetische Mittel nicht immer ganzzahlig sein. Bei dieser Interpretation ist die Annäherung an die nächstliegende ganze Zahl gut erkennbar.

Der Modalwert kann schon in der Auswertung von Daten ab der 1. Klasse benutzt werden. Dabei sollte man nicht der Begriff Modalwert verwenden, sondern nach dem oder den Ergebnissen fragen, die am häufigsten vorkommen.

Die Spannweite kann ebenfalls beginnend mit den ersten Beispielen bei Messdaten in die Auswertung der Daten einbezogen werden. Die Bezeichnung Spannweite sollte dabei nicht verwendet werden. Man kann einfach von dem Unterschied zwischen dem größten und kleinsten Wert sprechen und dazu diese Werte zuerst bestimmen.

Die mittlere Abweichung, Varianz und Standardabweichung sind kein Gegenstand für den Mathematikunterricht in der Primarstufe. Die Grundidee der Streuung kann durch die Betrachtung der Spannweite angelegt werden. Außerdem kann hier ein erstens Verständnis für den Begriff der Streuung entwickelt werden, wenn das arithmetische Mittel einer Verteilung berechnet wird. In der Auswertung der Daten kann der Durchschnitt mit den anderen Werten verglichen werden, um hier Aussagen zu treffen, ob die erhoben Daten dicht am Durchschnitt liegen oder ob einige Daten weit vom errechneten Durchschnitt entfernt sind.

2.4 Methoden der Explorativen Datenanalyse

2.4.1 Fachliche Grundlagen

Welche statistischen Kenngrößen werden in der der EDA vor allem verwendet?

In der EDA werden Mittelwerte und Streumaße verwendet, die aus der Reihe der geordneten Daten direkt abgelesen werden können. Häufig werden 5 Werte zur Beschreibung einer Häufigkeitsverteilung herangezogen, die man auch als 5-Zahlen-Zusammenfassung bezeichnet. Diese fünf Zahlen bzw. Werte sind der **Median** als Lagemaß, der **kleinste** und der **größte Wert** (Minimum und Maximum) und die **Viertelwerte** (Quartile), die jeweils die Mediane der unteren Hälfte und der oberen Hälfte der Verteilung darstellen. Mit dem kleinsten und größten Wert der Verteilung kann die Spannweite ermittelt werden und mit den Viertelwerten wird die **Vierteldifferenz** (Quartilsabstand) als ein weiteres Streuungsmaß angegeben.

Wie kann der Median ermittelt und interpretiert werden?

Der Median $\tilde{x}$ wird auch als **Zentralwert**, **mittlerer Wert** oder **50%-Wert** bezeichnet. Er gibt an, wo die Mitte einer der Größe nach geordneten Datenmenge liegt. Das bedeutet, dass die Hälfte der Daten kleiner oder gleich und die Hälfte der Daten größer oder gleich dem Median sind. Zur Bestimmung des Medians werden die Daten zunächst geordnet. Dann kann dieser durch Auszählen bestimmt werden.

Es sind hier allerdings 2 Fälle zu unterscheiden.

1. Anzahl der Daten ist ungerade.

Der Median ist der mittlere Wert der geordneten Daten

2. Anzahl der Daten ist gerade.

Der Median ist das arithmetische Mittel aus den beiden mittleren Werten der geordneten Daten. Im Gegensatz zum arithmetischen Mittel ist der Median robust gegen Ausreißwerte.

Am *Beispiel der Sponsorenlauf* soll die Ermittlung des Medians verdeutlicht werden. Dabei werden jetzt die Einnahmen einer Klasse bei sehr spendablen Sponsoren betrachtet:

Einnahmen in Euro (geordnete Folge der Werte):

12 12 14 17 19 19 22 23 23 23 24 **<u>24</u>** 25 25 25 25 28 29 35 35 42 45 55

$\tilde{x} = 24$

Da es 23 Werte sind und die Anzahl somit ungerade ist, ist der Median der 12. Wert. Es liegen 11 Werte links und 11 Werte rechts vom Median, der durch Abzählen ermittelt werden kann.

Die Robustheit des Medians gegen Ausreißerwerte kann durch folgende Überlegungen verdeutlicht werden: Wenn der maximale Wert nicht 55 € sondern 155 € betragen würde, bliebe der Median trotzdem unverändert bei 24 €. Dies gilt auch, wenn der geringste Betrag nicht 12 € sondern nur 1 € betragen würde.

Der Median von 24 € kann in dem Beispiel in folgender Weise interpretiert werden: Mindestens die Hälfte der Sponsoren hat bis 24 € und mindestens die Hälfte der Sponsoren hat 24 € mehr gespendet.

Wie können die Viertelwerte ermittelt und interpretiert werden?

Die Viertelwerte sind die Mediane der oberen und unteren Hälfte einer Verteilung. Auch hierfür ist keine Berechnung erforderlich. Die Werte können wieder aus der geordneten Datenreihe abgelesen werden. Bei einer ungeraden Anzahl von Werten kann der Median zu beiden Hälften gerechnet werden. Es ist aber auch üblich, die beiden Hälften ohne den Median zu betrachten, was die Ermittlung der Viertelwerte in diesem Fall noch einfacher macht und im Folgenden verwendet wird.

Der untere Viertelwert wird auch als 25%-Wert und der obere als 75%-Wert bezeichnet.

Beispiel: Einnahmen beim Sponsorenlauf

In beiden Hälften sind ohne den Median jeweils 11 Werte. Diese werden durch den jeweils 6. Wert wieder in zwei Hälften geteilt, so dass fünf Werte über und fünf Werte unter diesem mittleren Wert in jeder Hälfte liegen. Diese mittleren Werte sind dann die Viertelwerte der Verteilung.

12 12 14 17 19 **<u>19</u>** 22 23 23 23 24 **<u>24</u>** 25 25 25 25 28 **<u>29</u>** 35 35 42 45 55

Unterer Viertelwert: 19 Median Oberer Viertelwert: 29

Somit wird die geordnete Verteilung durch den Median und Viertelwerte in vier Teile zerlegt. Damit können die Viertelwerte in diesem Beispiel durch folgende Formulierungen näherungsweise interpretiert werden: Mindestens ein Viertel der Sponsoren hat bis zu 19 € und mindestens ein Viertel hat 29 € oder mehr gespendet.

Wie kann die Vierteldifferenz ermittelt und interpretiert werden?

Die Vierteldifferenz ist ein Maß für die Streuung der Verteilung. Sie ergibt sich aus der Differenz zwischen dem oberen und dem unteren Viertelwert und ist somit ebenfalls leicht zu ermitteln.

Beispiel: Einnahmen beim Sponsorenlauf

Die Differenz aus dem oberen und unteren Viertelwert beträgt 29 € − 19 € = 10 €. Da zwischen dem unteren und oberen Viertelwert die Hälfte der Werte liegen, kann für unser Beispiel folgende Formulierung verwendet werden: Mindestens die Hälfte der Sponsoren hat 19 € bis 29 € gespendet.

Wie kann die 5-Zahlen-Zusammenfassung grafisch veranschaulicht werden?

Zur grafischen Veranschaulichung der charakteristischen 5 Zahlen für die Verteilung wird ein **Boxplot** (**Kastenschaubild**) verwendet. Mit dieser grafischen Darstellung kann die Verteilung der Daten gut dargestellt werden, da die Lage des Median und die Streuung um den Median deutlich sichtbar ist. Der Boxplot kann waagerecht oder senkrecht gezeichnet werden.

Zum Zeichen eines Boxplot muss zunächst eine (waagerechte oder senkrechte) Skala gezeichnet werden. Dann wird ein Rechteck (Kasten) für die mittleren 50 % der Werte, also vom unteren bis zum oberen Viertelwert gezeichnet. In dem Rechteck wird der Median als Strecke eingetragen Anschließend werden Strecken (die so genannten Antennen) zu beiden Seiten bis zum minimalen bzw. maximalen Wert gezeichnet.

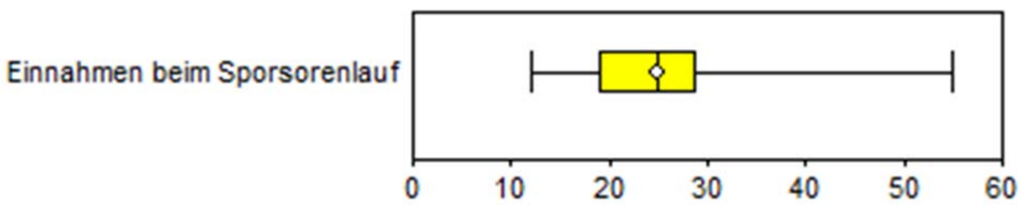
Beispiel: Einnahmen beim Sponsorenlauf

Für die Erstellung eines Boxplots wird die 5-Zahlen-Zusammenfassung benötigt.

Minimum: 12 €, unterer Viertelwert: 19 €, Median: 24 €, oberes Quartil: 29 €, Maximum: 55 €.

12 12 14 17 19 **19** 22 23 23 23 24 **24** 25 25 25 25 28 **29** 35 35 42 45 **55**

Damit ergibt sich dann folgende grafische Darstellung, die mit dem Programm VU-Statistik erstellt wurde. Der Rahmen um das Diagramm, die Farbe des Kastens und die Markierung auf dem Median wurden vom Programm automatisch erzeugt und sind normalerweise nicht erforderlich.



Wie können die Werte im Boxplot interpretiert werden?

In dem Beispiel wird deutlich, dass die Verteilung um den Median nicht symmetrisch ist. Der Median liegt nicht in der Mitte des Kastens und die Werte im unteren Viertel liegen dichter beieinander als die Werte im oberen Viertel.

Für den Boxplot können nur die folgenden Aussagen getroffen werden, die wieder exemplarisch an dem Beispiel dargestellt sind:

- Die geringste Einnahme beträgt 12 Euro. (Minimum)
- Die höchste Einnahme beträgt 55 Euro. (Maximum)
- Die Einnahmen liegen zwischen 12 Euro und 55 Euro
- Mindestens $\frac{1}{4}$ der Werte sind kleiner oder gleich 19 Euro. (unterer Viertelwert)
- Die Hälfte der Werte sind kleiner oder gleich 24 Euro. (Median)

- 75% der Werte sind kleiner oder gleich 29 Euro. (oberer Viertelwert)

Was ist ein Stamm-Blätter-Diagramm und wie kann es angefertigt werden?

Ein **Stamm-Blätter-Diagramm** (Stängel-Blätter-Diagramm, Stamm-Blatt-Diagramm) kann sowohl als Tabelle als auch als Diagramm angesehen werden. Es ist eine der in der explorativen Datenanalyse neu entwickelten Methoden. Im Stamm-Blätter-Diagramm kann die Verteilung der Daten sehr anschaulich dargestellt werden. Im Gegensatz zum Boxplot bleiben hier die Ursprungsdaten erhalten und können so in der Auswertung mit berücksichtigt werden. Auch die Werte der 5-Zahlen-Zusammenfassung können gut abgelesen werden, die Streuung der Daten wird ebenfalls gut sichtbar.

Für die Erstellung eines Stamm-Blätter-Diagramms werden die Daten in zwei Gruppen von Stellenwerten aufgeteilt. Bei zweistelligen Zahlen verwendet man die Zehner und die Einer. Die Zehner bilden in diesem Fall den „Stamm“ und die Einer die „Blätter“. Die Zahlen für den Stamm werden von unten nach oben geschrieben und die Einer nach einem senkrechten Strich jeweils in einer Zeile mit der entsprechende Zehnerstelle.

Bei dreistelligen Zahlen können als „Stamm“ die Hunderter und Zehner und als „Blätter“ die Einer verwendet werden. Es können aber auch als Stamm die Hunderter und als Blätter die Zehner und Einer, also zweistellige Zahlen verwendet werden.

Beispiel: Einnahmen beim Sponsorenlauf

5	**5**
4	2 5
3	5 5
2	2 3 3 3 4 **4** 5 5 5 5 8 **9**
1	**2** 2 4 7 9 **9**

Die unterstrichenen Werte sind die Werte aus der 5-Zahlen-Zusammenfassung. In der Darstellung wird auch ersichtlich, dass die Werte oberhalb des Medians stärker streuen als nach unten.

2.4.2 Hinweise für den Unterricht

Mit der sogenannten „lebendigen Statistik“ können inhaltliche Vorstellungen zu den Werten der EDA entwickelt werden. Nachdem die Daten der Größe nach geordnet wurden, können der größte, kleinste und mittlere Wert bestimmt werden. Die Werte können mit den Schülern spielerisch veranschaulicht werden, indem jeder Schüler einen Wert repräsentiert.

Als Einstiegsbeispiel können die Körpergrößen der Schüler dienen. Die Schüler sind in diesem Fall die natürlichen Träger der Werte. Wie im Sportunterricht stellen sich die Schüler der Größe nach auf. Von der Lehrkraft werden in Vorbereitung 3 Schilder vorbereitet, welche die Begriffe „größter Wert“, „kleinster Wert“ und „mittlerer Wert“ enthalten. Ist die Anzahl der Schüler gerade müssten dann die 2 Schüler, die den Werten entsprechen das Schild gemeinsam festhalten. Die Berechnung des arithmetischen Mittels von diesen Werten ist hier noch nicht erforderlich.

In folgenden Unterrichtsstunden sollten dann auch andere Daten „lebendig“ dargestellt werden. Nachdem die Daten geordnet worden, erhalten die Schüler Schilder mit den einzelnen Werten und müssen sich dann entsprechend der Ordnung der Werte aufstellen. Jeder Schüler verkörpert praktisch einen Wert. Dann können wieder die drei Schilder mit den Begriffen „größter Wert“, „kleinster Wert“ und „mittlerer Wert“ verteilt werden, nachdem diese Werte bestimmt wurden. Das arithmetische Mittel muss dabei nicht berechnet oder ermittelt werden.

Sind die Schüler an diese Darstellung der Daten gewöhnt, könnte auch noch eine Skala auf dem Fußboden eingezeichnet werden, an der sich die Schüler dann an der entsprechenden Stelle hinstellen. Damit wird dann auch die Streuung der Daten deutlich.

2.5 Gruppierung von Daten

2.5.1 Fachliche Grundlagen

Was bedeutet die Gruppierung von Daten und wann müssen Daten gruppiert werden?

Treten bei einer statistischen Untersuchung viele unterschiedliche Daten auf (z.B. Masse der Schultaschen oder Werte im Weitsprung aller Schüler) ist es zur Veranschaulichung der Daten oft sinnvoll, die Werte in Klassen bzw. Gruppen einzuteilen. Eine Klassenbildung ist vor oder nach einer Datenerhebung möglich. Ein typisches Beispiel ist die EU-Verordnung der Einteilung der Hühnereier.

Gewichtsklasse	**Bezeichnung**	**Gewicht**
S	klein	unter 53 g
M	mittel	53 g bis unter 63 g
L	groß	63 g bis unter 73 g
XL	sehr groß	über 73 g

Wie erfolgt die Klassenbildung?

Eine Klassenbildung erfolgt durch die Festlegung der Klassenbreiten und Klassengrenzen. Die Klassen müssen nicht gleich breit sein und es sind auch offene Klassen möglich (siehe Beispiel Gewichtsklassen der Hühnereier). Bei der Gruppierung von Messdaten muss beachtet werden, dass es sich nach der Gruppierung immer noch um Messdaten handelt und für die Darstellung der Daten nur ein Histogramm sinnvoll ist. Bei ordinalen oder kategorialen Daten ist nach der Gruppierung auch eine Darstellung mit Streifendiagrammen möglich.

Nach Wahl der Klassenbreite und der Klassengrenzen müssen die Klassenmitten berechnet werden, da diese für das Erstellen eines Histogramms bzw. zur Berechnung des arithmetischen Mittels notwendig sind.

Das Bilden von Klassen mit anschließendem Erstellen eines Histogrammes und Berechnen des arithmetischen Mittels soll mit folgendem Beispiel dargestellt werden.

Beispiel:

Einnahmen im Sponsorenlauf (in Euro)

Euro	12	14	17	19	22	23	24	25	28	29	35	42	45	55
Anzahl	2	1	1	2	1	3	2	4	1	1	2	1	1	1

In dem Beispiel muss nun überlegt werden, wie viele Werte zu einer Klasse zusammengefasst werden. Es soll im Folgenden die Klassenbildung mit den Klassenbreiten b = 5, 10 und 15 gezeigt werde.

Klassenbreite: 5 Euro

Klasse	Klassenmitte	Häufigkeit
0 - < 5[1]	2,5	0
5 - < 10	7,5	0
10 - < 15	12,5	3
15 - < 20	17,5	3
20 - < 25	22,5	6
25 - < 30	27,5	6
30 - < 35	32,5	0
35 - < 40	37,5	2
40 - < 45	42,5	1
45 - < 50	47,5	1
50 - < 55	52,5	0
55 – <60	57,5	1

Klassenbreite: 10 Euro

Klasse	Klassenmitte	Häufigkeit
0 - < 10	5	0
10 - < 20	15	6
20 - < 30	25	12
30 - < 40	35	2
40 - < 50	45	2
50 - < 60	55	1

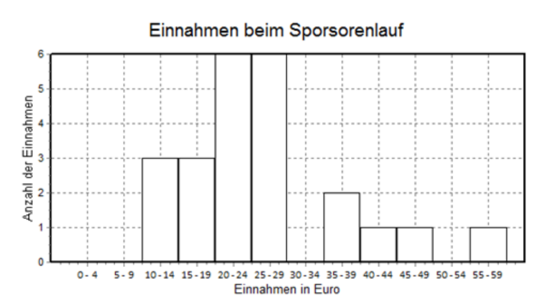
Klassenbreite: 15 Euro

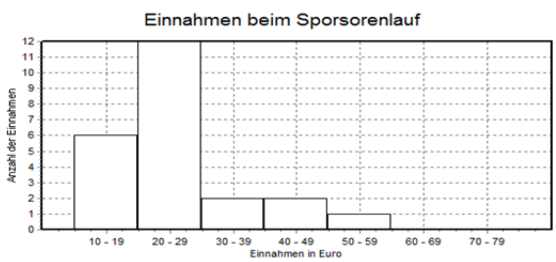
Klasse	Klassenmitte	Häufigkeit
0 - < 15	7,5	3
15 - < 30	22,5	15
30 - < 45	37,5	3
45 - < 60	52,5	2

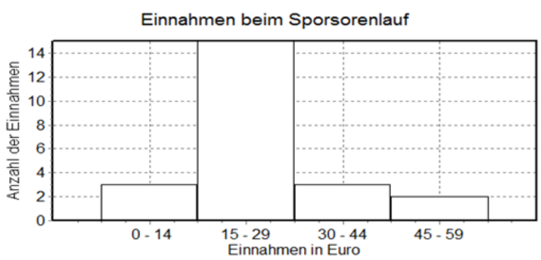
Darstellung gruppierter Daten

Die Darstellung gruppierter Messdaten erfolgt in einem **Histogramm**. Im Gegensatz zu einem Streifendiagramm, in dem die Breite der Streifen beliebig ist, sind die einzelnen Flächen im Histogramm ein Maß für die Häufigkeit in der jeweiligen Klasse. Der Flächeninhalt der Rechtecke im Histogramm, die sich berühren müssen, ist das Produkt aus Höhe und Klassenbreite. Der Flächeninhalt aller Rechtecke entspricht der Gesamtzahl der Daten. Zur Vereinfachung werden in der Praxis oft gleichbreite Klassen gewählt.

Mit größer werdender Klassenbreite wird der Informationsverlust immer größer. Dafür kann die charakteristische Form der Verteilung aber deutlicher werden. Um beide Aspekte gleichzeitig zu berücksichtigen, gibt es Kriterien für eine optimale Klassenbreite.







0

[1] Die Schreibweise - < soll bedeuten: bis weniger als

Berechnung des arithmetischen Mittels

Auch das arithmetische Mittel kann aus den gruppierten Daten berechnet werden. Hierzu werden die Klassenmitten benötigt, die in den Tabellen schon mit erfasst wurden. Nun werden die Klassenmitten mit der Häufigkeit der Klasse multipliziert und die Produkte aller Klassen addiert. Die Summe wird durch die Gesamthäufigkeit dividiert.

Für unser Beispiel mit der Klassenbreite b = 5 Punkte ergibt sich folgende Rechnung

$$\bar{x} = \frac{0 \cdot 2{,}5 + 0 \cdot 7{,}5 + 3 \cdot 12{,}5 + 3 \cdot 17{,}5 + 6 \cdot 22{,}5 + 6 \cdot 27{,}5 + 0 \cdot 32{,}5 + 2 \cdot 37{,}5 + 1 \cdot 42{,}5 + 1 \cdot 47{,}5 + 0 \cdot 52{,}5 + 1 \cdot 57{,}5}{23} = 26{,}6$$

Das auf diese Weise berechnete arithmetische Mittel unterscheidet sich von dem tatsächlichen arithmetischen Mittel, das 26,10 € beträgt. Dieser Unterschied entsteht durch den Informationsverlust infolge der Gruppierung der Daten.

2.5.2 Hinweise für den Unterricht

In der Grundschule wird die Gruppenbildung schon in Ansätzen eingeführt. Häufig werden mehrere Ergebnisse mit sehr geringen Häufigkeiten mit dem Begriff „sonstige“ zusammengefasst. Dies ist eine Gruppierung, die oft schon bei der Erstellung von Diagrammen benutzt wird. Den Schülern sollte hier bewusst gemacht werden, dass unter der Rubrik „sonstige“ verschiedene Ergebnisse stecken und demzufolge auch die Häufigkeit des Ergebnisses größer sein kann als alle anderen. Hier kann durch gezielte Teilhandlungen eine Gruppierung, wie sie dann erst in der Orientierungsstufe benutzt wird, vorbereitet werden. Sollten in Verbindung mit anderen Unterrichtsfächern oder Projekten Daten gesammelt worden sein, die eine Gruppierung erforderlich machen, sollte die Gruppierung von der Lehrkraft vorgenommen werden und anschließend diese in kategoriale bzw. ordinale Daten überführt werden, so dass die Schüler die gewohnten Streifendiagramme zeichnen können.

2.6 Schlussfolgerungen und Prognosen aus Daten

2.6.1 Fachliche Grundlagen

Wie können Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung miteinander verbunden werden?

Aus vorher erhobenen Daten können nun mithilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung Prognosen für zukünftige Ereignisse ermittelt werden.

Für das Beispiel des Sponsorenlaufes kann dies zu folgenden Überlegungen führen:

Prognose: Wie wahrscheinlich ist es, dass mehr als die Hälfte der Klasse im nächsten Jahr 10 Runden und mehr laufen? Antwort: wenig wahrscheinlich

Schlussfolgerung: Die Schule möchte mehr Gelder beim Sponsorenlauf einnehmen. Welche Maßnahmen können getroffen werden? Antwort: Länge der Runden verkürzen

Aus vorhandenen Daten können Schlussfolgerungen für zukünftige Ereignisse gezogen werden.

2.6.2 Hinweise für den Unterricht

Erst nachdem der präformale Wahrscheinlichkeitsbegriff in der Primarstufe eingeführt und gefestigt wurde, können nun aus vorher erhobenen Daten Prognosen bzw. Schlussfolgerungen getroffen werden. Dabei kann neben dem Gespräch über Bedingungen der entstandenen Verteilungen auch einfache Schlussfolgerungen auf zukünftige Ereignisse bzw. Prognosen mithilfe der qualitativen Schätzung von Wahrscheinlichkeiten erfolgen.

2.7 Planung einer statistischen Untersuchung

2.7.1 Grundgesamtheit und Stichprobe

2.7.1.1 Fachliche Grundlagen

Ziel einer statistischen Untersuchung ist es, Informationen über interessierende Eigenschaften von Personen oder Objekten zu erhalten. Die Gewinnung statistischer Daten wird auch **Erhebung** genannt. Dabei können nicht immer alle Objekte untersucht oder Personen befragt werden (**Vollerhebung**). Aus diesem Grund kann eine Auswahl aus der **Grundgesamtheit** (alle Personen oder Objekte) getroffen werden. Diese Auswahl wird als **Stichprobe** bezeichnet. Mit der Auswertung der Stichprobe können dann Rückschlüsse auf die Grundgesamtheit gezogen werden, wenn es sich um eine repräsentative Stichprobe handelt. Dies ist z.B. von den Hochrechnungen bei Wahlen bekannt. Eine Stichprobe ist repräsentativ, wenn die Verhältnisse in der Stichprobe denen in der Grundgesamtheit entsprechen und insbesondere alle statistischen Kenngrößen näherungsweise übereinstimmen. Eine repräsentative Stichprobe kann durch eine zufällige Auswahl von Elementen der Grundgesamtheit gewonnen werden.

2.7.1.2 Hinweise für den Unterricht

Im Unterricht sollte bei der Planung einer statistischen Untersuchung oder Befragung auf das Thema Grundgesamtheit und Stichprobe eingegangen werden. In den Klassen 1 und 2 werden Daten in der Regel als Vollerhebung gesammelt. Ab der Klassenstufe 3 können größere statistische Untersuchungen geplant werden. Dazu sollen die Schüler den Unterschied zwischen einer Vollerhebung und einer Stichprobe kennenlernen. Die Begriffe Grundgesamtheit und Vollerhebung werden an dieser Stelle nur inhaltlich vermittelt ohne das Begriffswort zu nennen. Auch eine Vermittlung einer inhaltlichen Vorstellung darüber, wie eine repräsentative Stichprobe ermittelt werden kann, ist möglich.

2.7.2 Fragenstellungen

2.7.2.1 Fachliche Grundlagen

Statistische Daten können auf unterschiedlicher Art und Weise gewonnen werden. Dies kann eine mündliche oder schriftliche Befragung aber auch eine Beobachtung sein. Zunächst muss überlegt werden, welche Daten erhoben werden sollen. Es kann sich dabei um nur eine Fragestellung oder um ein Fragenpaket (Fragebogen) handeln. Der Zweck der Untersuchung kann hierfür unterschiedlich sein. Meistens geht es um die Beschreibung eines Istzustandes oder der Überprüfung von Theorien. Ein Fragebogen ist oft sehr komplex. Es können damit Zusammenhänge zwischen 2 oder mehrerer Merkmalen untersucht werden.

Bei der Entwicklung von Fragestellungen wird zwischen offenen und geschlossenen Fragen unterschieden. Bei offenen Fragen kann der Befragte die Antwort frei wählen. Ist die Formulierung der Frage nicht klar und eindeutig, kann unter Umständen eine Vielzahl an Antworten entstehen. Für eine geschlossene Frage muss der Fragensteller die möglichen Antworten vorgeben, so dass er sich über den Vorgang, das interessierende Merkmal und die möglichen Ergebnisse im Vorfeld informieren muss.

Deswegen sollte der Fragensteller sich vor der Formulierung einer Frage vor allem über die mögliche Antworten Gedanken machen. Aus diesem Grund kann bei der Erstellung eines Fragebogens wieder nach dem bewährten Schema vorgegangen werden:

1. Welchen Vorgang möchte ich untersuchen?
2. Welches Merkmal interessiert mich?
3. Welche Ergebnisse sind möglich?

Nun kann eine Frage entwickelt werden. Fragen müssen klar und verständlich formuliert werden. Dabei sollten nur Begriffe verwendet werden, die den Befragten verständlich sind beziehungsweise die klar definiert werden und nicht frei interpretiert werden können. Weiterhin muss überprüft werden, ob die vorgegebenen Antworten vollständig sind und sich einander ausschließen. Es muss überlegt werden, ob Mehrfachnennungen erlaubt sind. Dies hat dann Auswirkungen auf die Gesamtanzahl der Antworten und damit auf verschiedene Interpretationsmittel.

2.7.2.2 Hinweise für den Unterricht

Die Erstellung eines Fragebogens spielt in der Grundschule noch keine Rolle. Kinder können aber am Ende ihrer Grundschulzeit selbst einfache sie interessierende Fragen stellen und versuchen zu überlegen, welcher Vorgang betrachtet werden muss und welche Ergebnisse auftreten können. Dabei wird zunächst von Daten innerhalb der Klasse ausgegangen und dann überlegt, wie diese Daten mit anderen verglichen werden können. Zum Vergleich können von der Lehrkraft aussagekräftige statistische Untersuchungen vom statistischen Bundesamt herausgesucht werden. Z. B. wird nach den Berufswünschen der Schüler gefragt und dann könnten diese Daten mit der Häufigkeit der auftretenden Berufe in Deutschland verglichen werden. Da diese Vergleiche sehr schwierig in Vorbereitung und Durchführung sind, wäre hier die Projektform geeignet.

2.7.3 Fehler bei der Planung von statistischen Untersuchungen

2.7.3.1 Fachliche Grundlagen

Die folgenden Zitate sollen auf das Kapitel einstimmen:

Benjamin Disraeli: “There are three kinds of lies: lies, damned lies and statistics.” (Es gibt drei Arten von Lügen: Lügen, verdammte Lügen und Statistik)

Winston Curchill: “Ich glaube nur den Statistiken, die ich selbst gefälscht habe.“

A. Lang: „Menschen lügen mit Statistik, sie benutzen die Statistik wie ein Betrunkener einen Laternenpfahl: vor allem zur Stütze unseres Standpunktes und weniger zum Beleuchten eines Sachverhaltes“

Viele uns zur Verfügung stehende Statistiken sind bewusst manipuliert. Hauptschwerpunkte der Manipulation sind Zahlenmanipulationen, Ausnutzung von mangelndem Hintergrundwissen und irreführende Darstellung der Daten. Im Kapitel 2.2.4.1 wurde schon auf Fehler beim Erstellen von graphischen Darstellungen hingewiesen. Im Folgenden werden wesentliche Fehler ohne Anspruch auf Vollständigkeit aufgezählt.

Zahlenmanipulationen: Häufig wird durch fehlende Angaben oder falsche Wahl von Bezugsgrößen. Wer wird bei der Arbeitslosenstatistik als „arbeitslos“ gezählt? Oder was bedeutet es, wenn die Aussage getroffen wird: Im Krankenhaus sterben mehr Menschen als zu Hause?

Falsche Angaben der Befragten: Wenn die Befragten bewusst falsche Angaben machen, wird das Ergebnis der Umfrage durch diese verfälscht. In der Grundschule kann bei Schülern dieses häufig unbewusst passieren, wenn z. B. der Freund ein Lieblingstier wählt, wählt der Schüler dann entsprechend auch dieses aus. Durch eine anonyme Befragung kann dieses Problem oft behoben werden.

Formulierung von Fragestellungen: Fragestellungen dürfen nicht so gestellt werden, dass die Antwort nicht ehrlich sein kann. Wann zum Beispiel gefragt wird: Schlagen sie ihre Kinder? Werden sie wohl kaum die Antwort ja erwarten.

Fehlende Erläuterung von in der Umfrage verwendeten Begriffen: Häufig werden Daten in Zeitschriften visualisiert und mit entsprechenden Fachbegriffen erläutert. Diese müssen aber auch definiert werden, sonst entsteht bei den Lesern ein falsches Bild. Ein Beispiel dazu ist die Angabe des

Durchschnittseinkommens. Hier ist ohne Erläuterung nicht klar, ob es sich um das Netto- oder Bruttoeinkommen handelt.

Nichtrepräsentative Umfrage: Es können gezielt Personengruppen für eine Befragung ausgewählt werden, um somit ein mögliches Wunschergebnis zu erhalten. Wenn zum Beispiel am Flughafen die Frage gestellt wird: ´Reisen sie gern? ´ Wird diese sicher von sehr vielen mit Ja beantwortet werden. Anders fällt das Ergebnis vielleicht auf der Straße aus.

3 Umgehen mit Wahrscheinlichkeiten

3.1 Der Wahrscheinlichkeitsbegriff in der Primarstufe

Wahrscheinlichkeiten werden in der Mathematik durch Zahlen von 0 bis 1 bzw. von 0 % bis 100 % ausgedrückt.

Beispiel:

Die Wahrscheinlichkeit für das Ergebnis „Zahl“ beim Werfen einer Münze ist ½ bzw. 50 %.

Eine Angabe von Wahrscheinlichkeiten durch Zahlen ist also in der Primarstufe bis auf wenige Ausnahmen (0; 1; ½) nicht möglich. Es kann ebenfalls nicht mit Wahrscheinlichkeiten gerechnet werden. Es können lediglich Chancen zahlenmäßig als Verhältnisse natürlicher Zahlen angegeben werden.).

Trotzdem können in der Primarstufe reichhaltige inhaltliche Vorstellungen zum Wahrscheinlichkeitsbegriff ausgebildet werden, die eine unverzichtbare Voraussetzung für das spätere Arbeiten mit Wahrscheinlichkeiten auf der formalen Ebene sind. Man kann Wahrscheinlichkeiten auch ohne Angabe zahlenmäßiger Werte verbal beschreiben, sie können verglichen und geschätzt werden. Dabei ist es in günstiger Weise möglich, an die umgangssprachlichen Bedeutungen der Wörter „wahrscheinlich“ und „Wahrscheinlichkeit“ anzuknüpfen und eine gegenständliche Veranschaulichung, den Wahrscheinlichkeitsstreifen, zu verwenden.

Die aktuellen Vorschläge in Unterrichtsmaterialien und in der didaktischen Literatur zum Umgehen mit Wahrscheinlichkeiten in der Primarstufe beschränken sich fast ausschließlich auf den Glücksspielbereich, also z. B. auf das Werfen von Münzen oder Würfeln, dass Ziehen aus Urnen oder das Drehen von Glücksrädern. Dies sind durchaus stochastische Situationen, die zu den Alltagserfahrungen der Schülerinnen und Schüler gehören und im Unterricht beim Umgang mit Wahrscheinlichkeiten berücksichtigt werden sollten. Eine Schwerpunktsetzung oder gar eine Beschränkung auf diesen Bereich halten wir aber aus folgenden Gründen nicht für sinnvoll.

- Die mit Wahrscheinlichkeitsüberlegungen verbundenen Spielsituationen sind im Alltag eines Schülers von weit geringer Bedeutung als die Anwendungen des Wahrscheinlichkeitsbegriffs, die wir in unseren Vorschlägen für den Unterricht in den Mittelpunkt stellen und die fast alle Bereiche seines Alltags betreffen.
- Mit der Betonung des Glücksspielbereichs entsteht ein sehr einseitiges Bild von der Stochastik, was sich negativ auf den späteren Unterricht auswirkt. Wahrscheinlichkeiten werden von den Schülern dann vor allem mit dem Würfeln in Verbindung gebracht, man spricht in diesem Zusammenhang sogar von einer „Würfelbudenmathematik“.
- Die Glücksspielsituationen und die damit im Zusammenhang stehenden Begriffe „Zufallsgenerator“ und „Zufallsexperiment“ sind in der Wahrscheinlichkeitsrechnung Bestandteil der Ebene der theoretischen Modelle. Sie werden als Modelle für Vorgänge verwendet, die sich unter gleichen Bedingungen beliebig oft wiederholen lassen. Solche Vorgänge kommen außerhalb des Glücksspielbereichs in der Realität sehr selten vor.
- Bei der Beschäftigung mit Glücksspielsituationen entstehen in naheliegender Weise sehr häufig Fragen, die man mit den Mitteln des Mathematikunterrichts in der Primarstufe nicht oder nur in Ansätzen bearbeiten kann. Dazu gehören zum Beispiel das Problem der Gleichwahrscheinlichkeit von Würfelergebnissen, das Verhalten in langen Versuchsreihen und auch das Problem der Augensumme beim Werfen mit zwei Würfeln, auch wenn das teilweise anders gesehen wird.

In den folgenden Abschnitten unterbreiten wir Vorschläge zur Ausbildung inhaltlicher Vorstellungen zum Wahrscheinlichkeitsbegriff in der Primarstufe und diskutieren dazu einige fachliche Grundlagen sowie auftretende Probleme. Weitere Hinweise zum Unterricht in der Primarstufe werden im Kapitel 3.2 im Zusammenhang mit Ausführungen zum Stochastikunterricht in der Sekundarstufe I gegeben.

3.1.1 Die Verwendungen der Wörter „wahrscheinlich“ und „Wahrscheinlichkeit“ in der Umgangssprache

Erste inhaltliche Vorstellungen zum Wahrscheinlichkeitsbegriff können aus der umgangssprachlichen Verwendung von „wahrscheinlich“ und „unwahrscheinlich“ gewonnen werden, die zum Sprachgebrauch der Mehrzahl der Grundschüler gehören. Dabei ist allerdings zu beachten, dass das Wort „wahrscheinlich“ als Adverb meist die Bedeutung von „sehr wahrscheinlich“ hat bzw. für Ergebnisse mit einer Wahrscheinlichkeit größer als 1/2 steht.

Beispiel:

> Die Aussage „Ich werde wahrscheinlich morgen zu Besuch kommen.“ bedeutet im Alltag, dass man mit ziemlicher Sicherheit kommen wird.

Diese Bedeutung kann aber bewusst gemacht werden, da die Wortkombinationen „sehr wahrscheinlich“, „wenig wahrscheinlich“, „sehr unwahrscheinlich“ auch im Sprachgebrauch vorhanden sind.

Auch zum Wort „Wahrscheinlichkeit“ selbst gibt es umgangssprachliche Verwendungen, die vielen Grundschülern bekannt sind. Damit können mehrere Abstufungen zum Ausdruck gebracht werden. Man spricht z. B. von sehr großer, großer, geringer oder sehr geringer Wahrscheinlichkeit.

In welchen Zusammenhängen werden die Wörter „wahrscheinlich“ und „Wahrscheinlichkeit“ verwendet?

Man kann zwei hauptsächliche Anwendungszusammenhänge unterscheiden.

Typ I: Vorhersagen (Prognosen) über künftige Ergebnisse
Mit einer Wahrscheinlichkeit kann den *Grad der Erwartung* des Eintreffens eines bestimmten Ergebnisses bei einem künftigen Ablauf des Vorgangs zum Ausdruck gebracht werden.

Beispiel:

> In Wetterberichten wird die Wahrscheinlichkeit angegeben, dass es am nächsten Tag regnen wird. Bei einer Regenwahrscheinlichkeit von 95 % kann man mit ziemlicher Sicherheit mit Regen rechnen.

Weitere Beispiele für diese Art der Verwendung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs aus dem Alltag von Grundschülern sind Vorhersagen über das Ergebnis eines bevorstehenden sportlichen Wettkampfs, die Gestaltung der Freizeit am nächsten Wochenende, den nächsten Wurf mit einem Würfel oder die Note in der kommenden Mathearbeit.

Die Wahrscheinlichkeit ist in diesen Fällen ein fester, objektiver Wert, der sich aus den Bedingungen des Vorgangs ergibt und nicht von den Kenntnissen der Person abhängt, die die Vorhersage macht. Durch neue Informationen kann die Wahrscheinlichkeit jedoch genauer bestimmt werden. So kann ein Meteorologe genauere Prognosen machen, wenn er neue aktuelle Wetterdaten erhält.

Wenn der Vorgang abgelaufen ist, ist das vorher betrachtete Ergebnis eingetroffen oder nicht eingetroffen. Mit dem Grad der Erwartung des Ergebnisses kann nun eine Bewertung des Eingetretenen vorgenommen werden.

Beispiel:

> Im Wetterbericht wurde für den nächsten Tag eine Regenwahrscheinlichkeit von 95 % für ein Gebiet angegeben. Wenn es dann in einem Ort in diesem Gebiet regnet, kann man sagen: „Das war zu erwarten.“ Regnet es nicht, sagt man: „Wir haben Glück gehabt.“

Typ II: Aussagen über eingetretene aber unbekannte Ergebnisse oder Zustände
Wahrscheinlichkeiten können auch den *Grad der Sicherheit einer Person* über schon eingetretene aber unbekannte Ergebnisse oder Zustände ausdrücken.

Beispiel:

> Wenn ein Kind Fieber bekommt, so ist das ein Zeichen für eine Erkrankung. Je nach den weiteren Symptomen sind für die Eltern bestimmte Erkrankungen mehr oder weniger wahrscheinlich. Eine größere Sicherheit über den Krankheitszustand ergibt sich erst nach Untersuchungen eines Arztes. Seine Diagnose sagt aus, welche Krankheit er für am wahrscheinlichsten hält.

Weitere Beispiele für diese stochastischen Situationen aus dem Lebensumfeld von Grundschülern sind die Suche nach dem Verursacher eines Schadens (Wer war das?), die Suche nach den Ursachen eines Defektes an einem Gerät (Woran kann das liegen?) oder auch Vermutungen über eingepackte Geschenke (Was könnte das wohl sein?). Solche Denkweisen sind bei vielen beruflichen Tätigkeiten von großer Bedeutung, wie beim Suchen des Täters durch einen Kriminalisten, beim Untersuchen eines defekten Autos oder eines PC durch einen Monteur oder auch beim Suchen nach Ursachen für die überraschend schlechte Leistung eines Schülers in einer Arbeit durch einen Lehrer.

Im Unterschied zu stochastischen Situationen vom Typ I kann sich der Grad der Sicherheit ändern, wenn die Person, die die Vermutungen äußert, weitere Informationen erhält. Die Wahrscheinlichkeit ist nicht mehr unabhängig von den Kenntnissen der Person. Wenn ein Arzt neue Informationen aus neuen Untersuchungen erhält, ein Kriminalist über Alibis verdächtiger Personen informiert wird, ein Monteur feststellt, welche Bauteile nicht defekt sind oder eine Lehrerin erfährt, dass der Schüler gerade persönliche Probleme hat, werden sich die Wahrscheinlichkeiten ihrer Vermutungen ändern.

Die Entwicklung von Verhaltensweisen eines Kindes lässt sich als immer bessere Anpassung an die gegebenen gesellschaftlichen Normen auffassen. Auch wenn das Wort „wahrscheinlich“ dabei nicht explizit verwendet wird, geht es doch darum, dass das Kind erfährt oder spürt, dass sein gezeigtes Verhalten wahrscheinlich erwünscht oder wahrscheinlich eher nicht erwünscht ist.

Auch Erwachsene lernen auf diese Weise durch Sammeln von Erfahrungen, wie man andere Personen, die Politik von Parteien oder die Produkte bestimmter Firmen einschätzen sollte.

Welche Rolle spielt eine Prozessbetrachtung bei stochastischen Situationen zur Wahrscheinlichkeit?

Die bisherigen Betrachtungen in diesem Abschnitt bewegen sich auf der Ebene der realen Erscheinungen. Die in Abschnitt 1.3 beschriebene Prozessbetrachtung bewegt sich auf der Ebene der Realmodelle. Von den dort beschriebenen fünf Beispielen betreffen die Beispiele D (David würfelt.) und E (Eva überlegt, ob sie in der Arbeit die Aufgaben richtig gelöst hat.) stochastische Situationen zur Wahrscheinlichkeit. Für das Aufstellen eines Realmodells müssen bestimmte vereinfachende Annahmen getroffen. So wird im Beispiel D angenommen, dass der Wurf gültig ist, also der Würfel nicht vom Tisch gefallen ist, nicht auf „Kippe“ oder auf einer Kante oder Ecke zu liegen kommt.

In der Situation D geht es um Vorhersagen für das nächste Würfelergebnis, also um eine Wahrscheinlichkeit vom Typ I. In der Situation E stellt Eva Überlegungen zu einem schon eingetretenen Ergebnis, nämlich ihrer geschriebenen Arbeit an. Bei ihren Vermutungen geht es um eine Wahrscheinlichkeit vom Typ II.

Im stochastischen Anfangsunterricht in der Primarstufe und auch in der Sekundarstufe I gibt es viele Bemühungen, eine Unterscheidung von Ergebnissen und Ereignissen vorzunehmen, was mit zahlreichen Schwierigkeiten verbunden ist. Eine solche, für Schüler schwer zu verstehender Unterscheidung ist auf der Ebene der Realmodelle aber nicht erforderlich, sondern erst auf der Theorie-Ebene. Durch eine Prozessbetrachtung kann das Problem der Formulierung von Aussagen über die Ergebnisse von Vorgängen in günstiger Weise bewältigt werden, indem ein entsprechendes Merkmal betrachtet wird.

Beispiel: David würfelt.

betrachtetes Merkmal	mögliche Ergebnisse
Welche Augenzahl liegt oben?	Es sind die Augenzahlen 1 bis 6 möglich.
Ist die oben liegende Augenzahl gerade?	Die Augenzahl ist gerade (2, 4, 6) oder ungerade (1, 3, 5).
Ist die oben liegende Augenzahl kleiner als drei?	Die Augenzahl ist kleiner als drei (1, 2) oder drei und größer (3, 4, 5, 6).

Auch das Betrachten von Bedingungen ist bei Aussagen zur Wahrscheinlichkeit insbesondere beim Typ II von Aussagen in vielen Fällen von Bedeutung.

Beispiel:

Wenn Eva angibt, wie wahrscheinlich es ist, dass sie alle Aufgaben richtig gelöst hat, müssen zur Bewertung dieser Einschätzung z. B. folgende Bedingungen bekannt sein:

- die Fähigkeit von Eva zur Selbsteinschätzung,
- die Tatsache, ob Eva bereits die richtigen Lösungen kennt oder
- ob Eva bereits erste Informationen von ihrer Lehrerin erhalten hat.

3.1.2 Vergleichen von Wahrscheinlichkeiten

Nachdem im Unterricht einige Beispiele zum Verwenden des Wortes „wahrscheinlich" zusammengestellt und betrachtet wurden, kann folgende Frage aufgeworfen werden: Kann man auch sagen, dass etwas *wahrscheinlicher* ist als etwas anderes? Damit erfolgt dann der Übergang zum komparativen Aspekt des Wahrscheinlichkeitsbegriffs, der ebenfalls in der Umgangssprache vorhanden ist. Man sagt, dass etwas wahrscheinlicher ist als etwas anderes bzw. dass beides gleichwahrscheinlich ist. Diese Verwendungen sind den Schülern für einfache Beispiele bekannt und können vertieft und gefestigt werden. Dazu stellen wir im Folgenden einige Möglichkeiten vor.

Wie können Vergleiche von Wahrscheinlichkeiten in der Primarstufe durchgeführt werden?

Zum Vergleichen von Wahrscheinlichkeiten gibt es eine Reihe von Möglichkeiten, die wir zu folgenden Gruppen von stochastischen Situationen zusammengestellt haben. Es sollten in der Regel nur solche Merkmale betrachtet werden, bei denen nur zwei Ergebnisse möglich sind.

Aufgaben zu Vorgängen, die den Schüler selbst betreffen

Bei diesen Aufgaben können die Schülerantworten nur individuell beurteilt werden. Der Vorteil ist, dass der Schüler die Einflussfaktoren gut beurteilen kann, da sie seine eigene Person betreffen. Bei Wahrscheinlichkeitsaussagen zum Typ I muss sich der Schüler einen künftigen Verlauf des Vorgangs vorstellen und eine Prognose über das zu erwartende mögliche Ergebnis abgeben. Bei Aussagen vom Typ II muss er über einen unbekannten Zustand, der ihn oder bestimmte Objekte aus seinem Umfeld betrifft, nachdenken.

Beispiele:

a) Stelle dir vor, dass im Sportunterricht Weitsprung mit Anlauf geübt wird. Welches Ergebnis ist für dich wahrscheinlicher, wenn der Sprung gültig ist?
   A: Du kommst über 2 m.
   B: Du kommst nicht über 2 m.

b) Im Vorderrad deines Fahrrades ist sehr wenig Luft. Was ist wahrscheinlicher?
   A: Du hast lange nicht Luft aufgepumpt.

B: Das Vorderrad ist kaputt.

Aufgaben zu naturwissenschaftlichen Zusammenhängen

Bei diesen Aufgaben müssen die Schüler ihre Kenntnisse aus dem Sachkundeunterricht oder dem Alltag anwenden. Bei den Aufgaben geht es um die Interpretation stochastischer Zusammenhänge, um die es sich bei den meisten naturwissenschaftlichen und auch gesellschaftswissenschaftlichen Zusammenhängen handelt. Deshalb sind Aussagen zur Wahrscheinlichkeit möglicher Ergebnisse oft sachgerechter als Aussagen ohne Verwendung von Wahrscheinlichkeiten.

Die Art der Aufgabenstellung kann deshalb auch genutzt werden, um die Kenntnisse der Schüler zu diesem Zusammenhang zu festigen oder auch zu überprüfen. Die Schüler erleben gleichzeitig, dass mit Wahrscheinlichkeiten zahlreiche Sachverhalte ausgedrückt werden können.

Beispiel:

Was ist wahrscheinlicher?
A: Zu Weihnachten liegt Schnee.
B: Zu Ostern liegt Schnee.

Aufgaben zu Schlussfolgerungen aus Daten

Es geht einmal um Daten, die in der Klasse, der Schule oder im Umfeld der Schüler erhoben wurden. Die Wahrscheinlichkeitsaussagen betreffen deshalb auch nur Elemente dieser speziellen Population. Zu den erhobenen Daten muss eine stochastische Situation vorhanden sein, in der Aussagen über eine beliebige aber unbekannte Person getroffen werden. Dies kann zum einen dadurch erfolgen, dass eine Person zufällig, z. B. durch ein Losverfahren ausgewählt wird. Es ist auch eine Situation möglich, in der über eine beliebige Person aus der Population gesprochen wird.

Zum Vergleich der Wahrscheinlichkeiten müssen die Häufigkeiten der möglichen Ergebnisse verglichen werden.

Beispiel:

Bei einer anonymen Befragung in der Klasse 3a nach dem Lieblingstier haben sich folgende Häufigkeiten ergeben. Jeder durfte nur ein Tier nennen.

Lieblingstier	Katze	Hund	Vogel	sonstige Tiere
Anzahl der Schüler	8	4	6	6

Mögliche Situationen:

(1) Für einen Quiz über Tiere wird ein Schüler der Klasse ausgelost.
(2) Der Lehrer geht durch die Klasse und fragt einen Schüler nach seinem Lieblingstier.
(3) Schüler der Klasse 3b unterhalten sich über Schüler der Klasse 3a.

Aufgabenstellung für alle drei Situationen:
Was ist wahrscheinlicher?
A: Das Lieblingstier des Schülers ist ein Hund.
B: Das Lieblingstier des Schülers ist ein Vogel.

Es sind zum anderen auch Aufgaben möglich, bei denen es um Prognosen auf der Grundlage von Daten zu Zusammenhängen mit einem großen Allgemeinheitsgrad geht. Deshalb haben diese Prognosen auch einen größeren Anwendungsbereich als Daten zu speziellen Grundgesamtheiten.

Bei dem Vergleichen von Wahrscheinlichkeiten künftiger Ereignisse müssen absolute Häufigkeiten des bisherigen Auftretens der Ereignisse verglichen werden.

Beispiel:

Die Tabelle enthält die durchschnittliche Sonnenscheindauer in Binz auf der Insel Rügen für die Monate Juli und August. Es handelt sich um Ergebnisse langjähriger Wetterbeobachtungen.

	Juli	August
Sonnenstunden pro Tag	8 Stunden	7 Stunden

Deine Großeltern planen, den nächsten Urlaub in Binz zu verbringen und überlegen, ob sie im Juli oder August dorthin fahren. Sie wollen möglichst viel Sonne haben.
In welchem der beiden Monate Juli und August ist die Wahrscheinlichkeit für viele Sonnenstunden größer?

Aufgaben zum Vergleich der Anzahl der möglichen Ergebnisse
In diesen Fällen geht es um Vorgänge, deren Ergebnisse alle gleichwahrscheinlich sind bzw. die sich aus gleichwahrscheinlichen Teilergebnissen zusammensetzen. Es handelt sich dabei in der Regel um Vorgänge aus dem Glücksspielbereich.
Die Frage nach der Gleichwahrscheinlichkeit von Würfelergebnissen sollte möglichst vermieden werden, da Begründungen dafür auf dem Niveau der Primarstufe sehr anspruchsvoll sind. Vorschläge für geeignete Vorgehensweisen, die auch nur in Kl. 4 möglich sind, werden auf S. gegeben.
Die Schüler müssen zur Lösung der Aufgaben die Anzahlen der jeweiligen möglichen Ergebnisse bzw. Teilergebnisse bestimmen und vergleichen.

Beispiele:

a) Es wird mit einem Spielwürfel gewürfelt. Was ist wahrscheinlicher?
A: Es wird eine 2 gewürfelt.
B: Es wird keine 2 gewürfelt.

b) In einem Behälter liegen 3 rote und 5 blaue Kugeln, die gleich groß sind. Ein Schüler zieht mit geschlossenen Augen eine Kugel aus diesem Behälter. Was ist wahrscheinlicher?
A: Es wird eine rote Kugel gezogen.
B: Es wird eine blaue Kugel gezogen.

c) Es wurde mit einem normalen Spielwürfel gewürfelt, du kennst aber das Ergebnis nicht. Was ist wahrscheinlicher?
A: Es wurde eine 1, eine 2, eine 3 oder eine 4 gewürfelt.
B: Es wurde eine 5 oder eine 6 gewürfelt.
Jetzt erfährst du, dass die Zahl größer als 3 ist. Was ist jetzt wahrscheinlicher A oder B?

3.1.3 Schätzen von Wahrscheinlichkeiten – der Wahrscheinlichkeitsstreifen

Nachdem ausgehend von der umgangssprachlichen Verwendung des Wortes „wahrscheinlich“ die Schüler an Beispielen die Verwendung des Wortes „wahrscheinlicher“ erlebt haben, kann in einem weiteren Schritt der Entwicklung inhaltlicher Vorstellungen erneut die Frage gestellt werden, *wie wahrscheinlich* ein einzelnes Ergebnis ist. Die umgangssprachliche Verwendung von „wahrscheinlich“ wird nun weiter ausdifferenziert und der Wert der Wahrscheinlichkeit wird durch eine verbale Beschreibung qualitativ zum Ausdruck gebracht. Dazu muss eine Schätzung der Größe der Wahrscheinlichkeit durch die Schüler erfolgen. Dadurch werden bei den Schülern noch vor der Angabe von Wahrscheinlichkeiten durch Brüche oder Prozente in der Sekundarstufe I tragfähige inhaltliche Vorstellungen vom Begriff der Wahrscheinlichkeit ausgebildet. Ein wesentliches Mittel ist dabei die Verwendung eines „Wahrscheinlichkeitsstreifen“, auch „Wahrscheinlichkeitsskala“ genannt. Damit können Schüler eine anschauliche Vorstellung zur Größe von Wahrscheinlichkeiten entwickeln.

Bevor in diesem Abschnitt Möglichkeiten zur Arbeit mit einem Wahrscheinlichkeitsstreifen und zum Schätzen von Wahrscheinlichkeiten vorgestellt werden, wollen wir uns mit den Problemen der Wörter „sicher", „möglich" und „unmöglich" und ihrer Verwendung im Unterricht auseinandersetzen.

Welche Rolle sollten die Wörter „sicher", „möglich" und „unmöglich" spielen?

Ausgelöst durch Formulierungen in den Bildungsstandards für die Primarstufe findet man in vielen Schulbüchern und in der Literatur umfangreiche Aufgabenvorschläge zur Verwendung dieser Begriffe im Unterricht. Wir halten viele dieser Vorschläge sowie eine umfangreiche Behandlung dieser Begriffe nicht für sinnvoll und wollen deshalb zunächst auf einige der damit verbundenen Probleme hinweisen.

Oft werden die Begriffe als Fachbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung bezeichnet, was aber nur bedingt zu trifft. Auf der theoretischen Ebene werden die Begriffe „unmögliches Ereignis" und „sicheres Ereignis" verwendet, die Bezeichnung „mögliches Ereignis" gibt es dagegen nicht. Im Unterricht der Primarstufe sollte, wie wir schon dargelegt haben, nicht auf der theoretischen Ebene gearbeitet werden, sodass nur mit den Wörtern sicher, möglich und unmöglich als Adverbien in ihrer umgangssprachlichen Bedeutung bearbeitet werden sollte („Das ist sicher/möglich/unmöglich"). Deshalb wollen wir als Nächstes auf die umgangssprachlichen Verwendungen eingehen.

Als Adverb hat das Wort „sicher" nach dem Deutschen Universalwörterbuch (Mannheim: Duden, 5. überarb. Aufl., 2003) folgende Bedeutungen.

1. höchstwahrscheinlich, mit ziemlicher Sicherheit
   Beispiele: Sicher kommt er bald. Er hat es sicher vergessen. Du hast sicher davon gehört.
2. gewiss, sicherlich, ohne Zweifel
   Beispiel: Das ist sicher richtig.

Nur in der zweiten Bedeutung geht es um Situationen, in denen ein Ereignis mit der Wahrscheinlichkeit 1 eintreten kann und die bei der verbalen Angabe dieser Wahrscheinlichkeiten verwendet werden muss. In der ersten Bedeutung kann die Wahrscheinlichkeit des Ergebnisses auch kleiner als 1 sein. Um diese Interpretation auszuschließen, sollte im Unterricht mit entsprechenden Zusätzen gearbeitet werden, indem man z. B. folgende Formulierungen verwendet: ganz sicher, absolut sicher, völlig sicher, mit absoluter Sicherheit, mit 100%iger Sicherheit.

Das Wort „möglich" kann ohne Probleme in seiner umgangssprachlichen Bedeutung im Unterricht verwendet werden.

Nach dem Deutschen Universalwörterbuch hat das Wort „unmöglich" neben den Bedeutungen „nicht durchführbar", „nicht denkbar" auch im umgangssprachlichen Sinne die Bedeutung des Nichtzulässigen, Nichttragbaren, Nichtvertretbaren, Nichtanständigen: Du benimmst dich unmöglich. Ich kann dich unmöglich im Stich lassen. In dieser Bedeutung kann es nicht zur Beschreibung eines Ergebnisses mit der Wahrscheinlichkeit 0 verwendet werden.

Weiterhin sollte im Unterricht beachtet werden, dass es sich bei Situationen, bei denen ein Ergebnis ganz sicher eintritt oder unmöglich ist, nicht um stochastische Situationen im eigentlichen Sinne handelt, da immer nur ein Ergebnis des Vorgangs existiert. Die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten 1 und 0 sind die Grenzen des Intervalls von 0 bis 1. Auf der theoretischen Ebene werden auch Ergebnisse mit dieser Wahrscheinlichkeit zur Menge der zufälligen Ereignisse gezählt.

Bei einigen Vorschlägen in Unterrichtsmaterialien zu dieser Thematik wird „sicher" mit „wahr" und „unmöglich" mit „falsch" gleichgesetzt und die Schüler sollen von Aussagen entscheiden, ob sie wahr oder falsch sind, wie z. B.: „Jede Woche hat sieben Tage." „Ich bin ein Kind." u. a. Die Gleichsetzung von sicher und wahr ist nicht sinnvoll und auch nicht zutreffend. So ist die Aussage, dass beim nächsten Wurf ein 6 kommen, kann durchaus wahr, dass eine 6 kommt, aber keinesfalls sicher.

Man findet in Unterrichtsmaterialien auch eigentlich unsinnige Formulierungen, die als nicht möglich erkannt werden sollen. Beispiele sind:

- Ein Affe fliegt über mein Haus.

- In der Federtasche ist ein Hund.
- In einem Aquarium sehe ich einen Elefanten.

Diesen lustigen Formulierungen haben mit stochastischen Situationen zwar wenig zu tun, können aber als Beispiel für die notwendige Betrachtung von Bedingungen verwendet werden, womit man die Phantasie der Schüler herausfordern kann. So kann etwa ein Affe über ein Haus fliegen, wenn er sich in einem Flugzeug befindet oder in der Federtasche kann ein Hund sein, wenn es sich um einen kleinen Plastikhund handelt. Man kann sogar einen Elefanten in einem Aquarium sehen, wenn ein Spielzeugelefant dort hinein eingefallen ist. Es handelt sich also in keinem der drei Beispiele um etwas Unmögliches.

Wir empfehlen, den Aufgaben zu dieser Thematik keinen großen Stellenwert beizumessen und sie immer im Zusammenhang mit einer Prozessbetrachtung zu formulieren.

Beispiele:

Beim nächsten Sportfest findet ein 60-m-Lauf statt. Entscheide, ob die folgenden Ergebnisse möglich sind, mit Sicherheit eintreten werden oder unmöglich sind.
A: Der Sieger braucht weniger als 6 Sekunden.
B: Ein Schüler scheidet aus.
C: Der Sieger braucht mehr als 6 Sekunden.

Wie sollte mit einem Wahrscheinlichkeitsstreifen gearbeitet werden?

Um die Schätzwerte von Wahrscheinlichkeiten gegenständlich zu veranschaulichen kann ein Papierstreifen oder einfach ein Schülerlineal verwendet werden. Die Schätzwerte können dann mit Stiften, Wäscheklammern oder Büroklammern markiert werden. Diese Skala kann dann auch leicht in der senkrechten Lage gehalten und zu einem schnellen Vergleich der Ergebnisse in der Klasse hochgehalten werden. Zur zeichnerischen Darstellung ist eine Strecke ausreichend.

Solche Darstellungen werden als **Wahrscheinlichkeitsstreifen** oder **Wahrscheinlichkeitsskala** bezeichnet. Für die Bezeichnung „Skala“ spricht, dass eine Skala ein lineares begrenztes Gebilde ist, also dem Intervall [0, 1] entspricht, während ein Streifen ein ebenes, eigentlich unbegrenztes Objekt ist. Für den Unterricht in der Primarstufe ist die Bezeichnung „Streifen“ aber trotzdem sinnvoll, da die gegenständlichen Formen Streifen sind und das Wort „Skala“ eher schwierig ist.

Mit den Wörtern sicher und unmöglich können die Endpunkte des Intervalls zur Darstellung von Wahrscheinlichkeiten beschriftet werden. Als ein weiterer Punkt kann der *Mittelpunkt* des Intervalls beschriftet werden. Es ist sinnvoll, diesen Punkt zu beschriften, um die öfter auftretende Wahrscheinlichkeit ½, etwa beim Wurf einer Münze, darstellen zu können. Zur Bezeichnung dieses Punktes sind Wörter wie „möglich“ oder „wahrscheinlich“ nicht geeignet, da sie ein bestimmtes Intervall angeben. Eine Möglichkeit ist die Angabe der Chancen für das Ereignis in der Form 1 : 1 oder, wie es auch durchaus üblich ist mit „fifty-fifty“. Da viele Schüler bereits den Prozentbegriff aus dem Alltag kennen, ist auch eine Bezeichnung mit 50 % bzw. 50%ige Wahrscheinlichkeit möglich. Die Enden der Skala könnten dann auch mit 0 % und 100 % beschriftet werden. In Worten kann diese Wahrscheinlichkeit auch so ausgedrückt werden: „Die Chancen für das Eintreten oder Nichteintreten des Ergebnisses sind gleich groß.“

Durch die Verwendung einer Wahrscheinlichkeitsskala erhält der Wahrscheinlichkeitsbegriff bereits einen stetigen Charakter, denn im Prinzip kann jeder Punkt der Skala markiert werden.

Außer den Endpunkten und dem Mittelpunkt können aber keine weiteren Punkte bezeichnet werden, da die gebrochenen Zahlen nicht zur Verfügung stehen. Es müssen also Bezeichnungen für bestimmte Abschnitte der Skala gefunden werden. Dazu findet man findet in der Literatur verschiedene Vorschläge:

- ein Begriff für das ganze Intervall: „wahrscheinlich (möglich)“
  Diese Bezeichnung ist nicht zu empfehlen, da das Wort „wahrscheinlich“ im üblichen Sprachgebrauch nicht das gesamte Intervall abdeckt, sondern nur größere Werte.
- zwei Begriffe für die Teilintervalle von 0 bis 0,5 und 0,5 bis 1: „weniger wahrscheinlich“, „eher wahrscheinlich“
  Diese grobe Einteilung ist einigen Fällen, insbesondere bei Einstiegsaufgaben ausreichend.
- „wahrscheinlich“, „unwahrscheinlich“, „möglich“
  Bei diesen Begriffsbildungen tritt das Problem auf, dass Ereignisse, die wahrscheinlich oder unwahrscheinlich sind, auch als möglich bezeichnet werden können, sodass es sich nicht um eine Einteilung in drei, sondern nur in zwei Intervalle handelt.

Neben diesen eher groben Abstufungen bietet der übliche Sprachgebrauch aber auch noch feinere Unterscheidungen, insbesondere im Bereich der Enden des Intervalls. Dazu gehören die folgenden Bezeichnungen: fast unmöglich, sehr unwahrscheinlich, unwahrscheinlich, eher wahrscheinlich, sehr wahrscheinlich, hoch wahrscheinlich, fast sicher.

Wir empfehlen für eine sehr genaue qualitative Angabe der Wahrscheinlichkeit, folgende Formulierungen zu verwenden. Die Grenzen für die einzelnen Abschnitte sind dabei nicht als exakte Werte, sondern nur als Orientierungen aufzufassen.

Wert, Intervall	**mögliche Beschreibungen**
100 %	ganz sicher, ohne jeden Zweifel, gewiss
95 % - 100 %	fast sicher, mit großer Sicherheit, höchstwahrscheinlich, hoch wahrscheinlich
80 % - 95 %	sehr wahrscheinlich, (umgangsspr.: wahrscheinlich), mit ziemlicher Sicherheit
60 % - 80 %	eher wahrscheinlich
40 % - 60 %, darin 50 %	etwa 1 : 1, etwa 50 : 50, etwa fifty-fifty 1 : 1, 50 : 50, fifty-fifty
20 % - 40 %	eher unwahrscheinlich
5 % - 20 %	sehr unwahrscheinlich
0 % - 5 %	fast unmöglich
0 %	völlig unmöglich, ausgeschlossen

Beim Verwenden eines Wahrscheinlichkeitsstreifens ist weiterhin zu entscheiden, ob dieser hingelegt oder hochgehalten wird. Für das Hochhalten spricht, dass damit das Rechts-Links-Problem umgangen wird und große bzw. kleine Wahrscheinlichkeiten oben (groß) bzw. unten (klein) platziert werden. Ein weiterer Vorteil der senkrechten Lage ist, dass bei einer zeichnerischen Darstellung die Ereignisse einfacher neben der Skala notiert werden können.
Für eine horizontale Lage spricht, dass man die Wahrscheinlichkeit mit Stiften kennzeichnen kann.

Welche Aufgabentypen sind zum Schätzen von Wahrscheinlichkeiten geeignet?

Es können im Prinzip die gleichen Arten zufälliger Vorgänge wie beim Vergleichen von Wahrscheinlichkeiten verwendet werden.

Als ein weiterer Aufgabentyp kann der Einfluss von Bedingungen auf die Wahrscheinlichkeit untersucht werden. Dazu können Faktoren genannt werden, die Einfluss auf die Wahrscheinlichkeit der möglichen Ergebnisse des Vorgangs haben und es soll eingeschätzt werden, ob die Wahrscheinlichkeit bei diesen Faktoren größer oder kleiner wird. Die Aufgabenstellung kann auch als Lückentext erfolgen.

Aufgaben zu Vorgängen, die den Schüler selbst betreffen

Beispiel:

Schätze die Wahrscheinlichkeit der folgenden Möglichkeiten und markiere sie auf der Wahrscheinlichkeitsskala.

A: Beim Weitsprung springst du über 2 m.
B: Du kannst länger als 5 Minuten die Luft anhalten.
C: Am kommenden Wochenende siehst du länger als 5 Stunden fern.

Aufgaben zu naturwissenschaftlichen Zusammenhängen

(1) Fülle die Lückentexte aus:

Wenn ich mir regelmäßig die Zähne putze, wird die Wahrscheinlichkeit ……………, dass ich Zahnschmerzen bekomme.
Wenn ich viele Süßigkeiten esse, wird die Wahrscheinlichkeit ……………., dass ich Zahnschmerzen bekomme.

(2) Anna hat im Garten Gras gesät und überlegt, wovon es abhängt, dass möglichst viele Grassamen keimen. Wird die Wahrscheinlichkeit, dass viele Grassamen, keimen größer oder kleiner?

a) Anna hat die Erde nach dem Aussäen der Grassamen fest angedrückt.
b) In den ersten Wochen nach dem Aussäen der Grassamen bleibt die Erde immer etwas feucht.
c) In den ersten Wochen nach dem Aussäen der Grassamen ist die Erde öfter trocken.
d) Anna hat vor dem Aussäen den Boden gedüngt.

Aufgaben zu Schlussfolgerungen aus Daten

(1) Die Tabelle enthält die durchschnittliche Sonnenscheindauer in Binz auf der Insel Rügen für die Monate Juli und August. Es handelt sich um Ergebnisse langjähriger Wetterbeobachtungen.

	Juli	August
Sonnenstunden pro Tag	8 Stunden	7 Stunden

Schätze die Wahrscheinlichkeit der folgenden Möglichkeiten und markiere sie auf dem Wahrscheinlichkeitsstreifen.

A: In diesem Juli wird die Sonne mehr als 3 Stunden pro Tag scheinen.
B: In diesem Juli wird die Sonne weniger als 3 Stunden pro Tag scheinen.
C: In diesem Juli wird die Sonne mehr als 13 Stunden pro Tag scheinen.

(2) Bei einer Befragung in einer Klasse zu den Zeiten für das Frühstück gab es folgende Ergebnisse.

Zeiten für das Frühstück in Minuten	kein Frühstück	weniger als 5	5 bis 10	10 bis 15	mehr als 15
Anzahl der Schüler	2	4	8	6	4

Ergänze die folgenden Wahrscheinlichkeitsaussagen zu diesen Daten.

a) In dieser Klasse ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schüler 5-10 min für das Frühstück braucht am ………..
b) Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schüler in dieser Klasse nicht frühstückt, ……
c) Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schüler weniger als 5 min für das Frühstück braucht ist ………… als die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schüler dieser Klasse 10-15 min für das Frühstück braucht.

3.1.4 Wahrscheinlichkeit und Chancen eines Ergebnisses

Anstelle von Wahrscheinlichkeit wird im Alltag auch oft von den Chancen gesprochen. Zur qualitativen Beschreibung des Maßes der Erwartung für ein Ereignis können beide Begriffe in gleicher Weise verwendet werden. Wenn die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis groß ist, sind auch die Chancen für das Eintreten dieses Ereignisses groß und umgekehrt.

Beide Begriffe können aber nicht gleichgesetzt werden. Man versteht unter den Chancen (engl. Odds) für das Eintreten eines Ereignisses A das Verhältnis der Wahrscheinlichkeit von A zur Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses. Die Chancen eines Ereignisses werden mit O(A) bezeichnet.

$$O(A) = \frac{P(A)}{P(\overline{A})} = \frac{P(A)}{1 - P(A)}$$

Aus den Chancen als Verhältnis für eine Ergebnis A kann die Wahrscheinlichkeit von A berechnet werden und umgekehrt.

Beispiele:

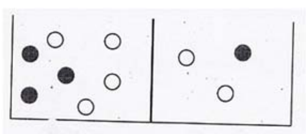
(1) Beim Würfeln betragen die Chancen 1 : 5 für die Augenzahl 6, 2 : 4 für eine durch 3 teilbare Zahl und 5 : 1 für eine Zahl größer als 1.
(2) Betragen die Chancen für ein Ergebnis O(A) = 3 : 5, so gilt für seine Wahrscheinlichkeit P(A) = 3/8.
(3) Ist für ein Ergebnis A die Wahrscheinlichkeit P(A) = 5/8, so sind die Chancen für A gleich 5 : 3.

Mit der Angabe von Chancen als Verhältnis kann im Stochastikunterricht in der Primarstufe die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses quantitativ charakterisiert werden, ohne dass dazu der Bruchbegriff benötigt wird. Es ist außerdem viel einfacher, in einer realen Situation das Verhältnis von günstigen zu ungünstigen Ergebnissen zu erkennen als das Verhältnis der günstigen Ergebnisse zu allen Ergebnissen.

Beispiele:

(1) Sind auf einem Glücksrad mit 8 gleichgroßen Feldern 3 rote und 5 grüne vorhanden und ist Rot die Gewinnfarbe, so kann ohne Verwendung von Brüchen festgestellt werden, dass die Chancen für einen Gewinn 3 : 5 stehen.
(2) Umgekehrt kann die Aufgabe gestellt werden, das Glücksrad so zu färben, dass die Chancen für einen Gewinn 5 : 3 stehen.
(3) In einem Behälter liegen schwarze und weiße Kugeln. Wenn du eine weiße Kugel ziehst, gewinnst du. Aus welchem Behälter würdest du ziehen? Begründe deine Entscheidung! (Neubert: 2012, S. 95 f.)

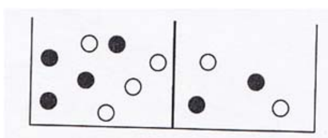
Aufgabe 1



Behälter 1 Behälter 2

Chancen für eine weiße Kugel: 4 : 3 2 : 1

Aufgabe 2



Behälter 1 Behälter 2

Chancen für eine weiße Kugel: 4 : 4 2 : 2

Bei der Aufgabe 1 können folgende Überlegungen angestellt werden:
Für Behälter 1 stehen die Chancen für das Ziehen einer weißen Kugel 4 : 3, das ist nur etwas besser als 1 : 1 (fifty-fifty). Bei Behälter 2 sind die Chancen für das Ziehen einer weißen Kugel doppelt so groß wie für das Ziehen einer schwarzen Kugel. Also muss man Behälter 2 wählen.
Bei Aufgabe 2 ist erkennbar, dass die Chancen in beiden Fällen gleich groß sind.

Mit der Angabe von Chancen für ein Ereignis als Verhältnis wird zugleich der Verhältnisbegriff vorbereitet.

Mit der Angabe von Chancen kann weiterhin ein multiplikativer Vergleich der Wahrscheinlichkeiten vorgenommen werden.

Beispiel:

Die Chancen, dass man beim Werfen eines Würfels eine der Zahlen von 1 bis 5 bekommt stehen 5 : 1. Keine 6 zu würfeln ist damit fünfmal so wahrscheinlich, wie eine 6 zu bekommen.

Bei gleichen Gewinnchancen sind auch die Gewinnwahrscheinlichkeiten gleich groß. Um zu beurteilen, ob ein Spiel fair ist, müssen also nur die Gewinnchancen der Spieler verglichen werden.

Chancen können allerdings nicht auf einem Wahrscheinlichkeitsstreifen veranschaulicht werden.

3.1.5 Spezielle Probleme

Wie kann die Gleichwahrscheinlichkeit von Ergebnissen begründet werden?

Ein spezieller Fall, der beim Vergleichen von Wahrscheinlichkeiten auftreten kann, ist die Gleichwahrscheinlichkeit zweier möglicher Ergebnisse eines Vorgangs. Dieser Fall ergibt sich insbesondere bei der mit Arbeit den sogenannten **Zufallsgeneratoren** wie Münze, Würfel, Glücksrad oder Ziehungsbehältnissen. Mit diesem Spezialfall sind folgende Probleme verbunden.

Die Gleichwahrscheinlichkeit immer eine Modellannahme. Die Berechtigung dieser Annahme muss jeweils durch Betrachtung der Eigenschaften der tatsächlichen Objekte sowie der Bedingungen des Vorgangs begründet oder experimentell nachgewiesen werden. So sind zum Beispiel bei einer 1-Euro-Münze die beiden Seiten unterschiedlich geprägt, sodass es zu einer zwar minimalen aber doch vorhandenen unterschiedlichen Masseverteilung in der Münze kommt. Auch bei einem normalen Spielwürfel, wie er üblicherweise bei Glücksspielen verwendet wird, ist die Masse durch die unterschiedliche Zahl der Vertiefungen für die Augenzahlen nicht homogen verteilt. Diese sehr geringen Abweichungen von einer idealen Symmetrie können im Unterricht vernachlässigt werden und man geht üblicherweise davon aus, dass z. B. alle Augenzahlen die gleiche Wahrscheinlichkeit haben.

Es glauben allerdings viele Kinder aufgrund ihrer eigenen persönlichen Erfahrungen in Glücksspielen, dass die einzelnen Augenzahlen beim Werfen mit einem Würfel eine unterschiedliche Wahrscheinlichkeit besitzen. Um diese Fehlvorstellungen zu überwinden, gibt es in Unterrichtsmaterialien Vorschläge zum Durchführen von geeigneten Experimenten. Dabei müssen allerdings folgende Probleme beachtet werden:

- Eine genaue Gleichverteilung aller Augenzahlen gibt es auch bei einer großen Anzahl von Wiederholungen nicht.
- Es kann bei den Experimenten durchaus auch der Fall eintreten, dass einige Augenzahlen bei einer bestimmten Anzahl von Wiederholungen die gleiche Häufigkeit haben. Diese werden sich dann bei weiteren Wiederholungen aber wieder unterscheiden.
- Ein weiteres Problem dieser Experimente besteht darin, dass mit der meist erfolgten Zusammenfassung der Würfelergebnisse aller Schüler die intuitiven Vorstellungen von vorhandenen persönlichen Glückszahlen nicht ausgeräumt werden können. Jeder Schüler kann ja eine andere Glückszahl haben und bei einer Zusammenfassung können sich die Ergebnisse dann ausgleichen.

Ein direkter Nachweis der Gleichwahrscheinlichkeit ist also mit zahlreichen Problemen verbunden. Eine andere Möglichkeit, Kenntnisse und Einsichten zur Gleichverteilung auszubilden bzw. auch zu korrigieren, sind indirekte Vorgehensweisen. Diese könnten in folgender Weise erfolgen.

Anregen geeigneter Überlegungen
Eine mögliche Fragestellung bei der Untersuchung entsprechender Objekte wie Würfel oder Münze lautet: „Aus welchen Gründen sollte ein Ergebnis wahrscheinlicher als ein anderes sein?“
Oder besser noch konkreter: „Aus welchen Gründen sollte der Würfel eher eine 4 als eine 6 zeigen?“

Diese indirekte Überlegung hat auch in der Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung als Prinzip vom unzureichenden Grund eine Rolle gespielt. Das Prinzip besagt, dass man an dem Modell der Gleichwahrscheinlichkeit von Ergebnissen festhält, wenn man keinen ausreichenden Grund hat, an diesem Modell zu zweifeln.

Mit diesen Fragestellungen kann man aber sicher nicht alle Schüler überzeugen. Dass ein Würfel sehr symmetrisch ist, können Schüler durchaus einsehen ohne daraus auf die Gleichwahrscheinlichkeit zu schließen. Die Fehlintuitionen beruhen ja vor allem auf subjektiven, mystischen oder animistischen Vorstellungen. So glauben manche Schüler, dass bestimmte Wesen die Ergebnisse zufälliger Vorgänge beeinflussen.

Experimente zum indirekten Nachweis der Gleichwahrscheinlichkeit
Im Unterricht oder als Hausaufgabe würfelt jeder Schüler 60-mal mit einem Spielwürfel. Anschließend ermittelt er, welche Augenzahl am häufigsten und welche am seltensten aufgetreten sind. Daraus kann dann die Hypothese abgeleitet werden, dass bei diesem Schüler mit dem verwendeten Würfel diese Augenzahlen immer am häufigsten bzw. am seltensten auftreten.
In einer nächsten Unterrichtsstunde oder einer weiteren Hausaufgabe wird das Experiment nun unter den beiden Hypothesen zur häufigsten und seltensten Augenzahl wiederholt. Diese Hypothesen werden dann entweder bestätigt oder es ergeben sich neue Hypothesen, was in der Regel zu erwarten ist.
Das Experiment sollte noch ein drittes Mal in einer weiteren Stunde oder Hausaufgabe mit den aktuellen Hypothesen wiederholt werden.

Bei der Auswertung der Ergebnisse aller Schüler im Klassenverband lassen sich dann folgende Erkenntnisse gewinnen:
- Wenn man sehr oft, etwa 60-mal, mit einem Würfel würfelt, gibt es immer Augenzahlen, die besonders selten oder besonders häufig auftreten.
- Es sind aber, auch bei ein und demselben Schüler und demselben Würfel immer andere Augenzahlen, die besonders selten oder besonders häufig auftreten.
- Man kann also nicht sagen, welche Augenzahl bei einem Schüler am wahrscheinlichsten oder am unwahrscheinlichsten ist.

Dabei kann es allerdings vorkommen, dass bei einem Schüler zwar nicht eine Augenzahl aber bestimmte Augenzahlen besonders häufig auftreten, sodass auch mit diesem Experiment nicht die letzten Zweifel an der Gleichverteilung ausgeräumt werden können.

3.1.6 Weitere Hinweise für den Unterricht

Welche inhaltlichen Vorstellungen zum Wahrscheinlichkeitsbegriff können bereits in der Primarstufe ausgebildet werden?

Ohne bereits eine Quantifizierung der Wahrscheinlichkeit als Bruch oder Dezimalbruch vorzunehmen, können bei einem Einsatz der vorgeschlagenen Aufgaben bereits reichhaltige Vorstellungen zum Begriff der Wahrscheinlichkeit in der Primarstufe ausgebildet werden. Dazu gehören folgende Gedanken.
- Aussagen zur Wahrscheinlichkeit möglicher Ergebnisse sind in vielen Bereichen verwendbar.
- Die Angabe einer Wahrscheinlichkeit ist ein Maß für das Erwartungsgefühl zum Eintreten des möglichen Ergebnisses.

- Die Wahrscheinlichkeit ist auch ein Maß für die Sicherheit, ob ein unbekanntes Ergebnis eingetreten ist. Je mehr Informationen man über das eingetretene Ergebnis erhält, umso sicherer kann man sein.
- Ist ein Ereignis eingetreten, kann mit der Wahrscheinlichkeit seines möglichen Eintretens eine Bewertung erfolgen.
- Die Wahrscheinlichkeiten von möglichen Ergebnissen können verglichen werden.
- Wahrscheinlichkeiten möglicher Ergebnisse können geschätzt und auf einer Skala zwischen den Endpunkten „sicher“ und „unmöglich“ an beliebigen Punkten eingetragen werden.
- Wahrscheinlichkeiten können auch durch die Angabe von Chancen beschrieben werden.

In welchen Phasen sollte in der Primarstufe die Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs erfolgen?

Klasse 1/2

Ausgangspunkt für die Entwicklung des mathematischen Wahrscheinlichkeitsbegriffs beim Schüler in den Klassen 1 und 2 sollten die intuitiven Vorstellungen der Schüler zum Begriff „wahrscheinlich“ als etwas mit ziemlicher Sicherheit Eintretendes sein. Mit der Frage "Was ist wahrscheinlicher?" werden diese Vorstellungen erweitert und führen zum Vergleich von Wahrscheinlichkeiten.

Nach dem Umgang mit den Begriffen "gleichwahrscheinlich" sowie "mehr oder weniger wahrscheinlich" erfolgt der Übergang zur qualitativen Charakterisierung des Erwartungsgefühls durch den Begriff "Wahrscheinlichkeit". Zur Visualisierung und Darstellung der Lösung der Aufgaben kann man eine Wahrscheinlichkeitsskala (Wahrscheinlichkeitsstreifen) verwenden, auf der Punkte markiert werden, die den geschätzten Wahrscheinlichkeiten entsprechen.

Klasse 3/4

In den Klassen 3 und 4 sollte eine Festigung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs erfolgen durch

- Ableiten von Prognosen aus statistischen Daten
- Aufgaben zum subjektiven Wahrscheinlichkeitsbegriff
- Einschätzen von Wahrscheinlichkeiten in Spielsituationen

Zum Problem der Gleichwahrscheinlichkeit bei symmetrischen Objekten sollten Betrachtungen und Experimente erfolgen. Die Angabe von Wahrscheinlichkeiten durch Chancen sollte zumindest für einfache Fälle erfolgen. Weiterhin können zur Vertiefung der Vorstellungen zum Wahrscheinlichkeitsbegriff Experimente zu kleinen Stichproben durchgeführt werden.

3.2 Ausgewählte Probleme der weiteren Entwicklung des Wissens und Könnens

Im Folgenden wollen wir in groben Zügen die weitere Entwicklung des Wissens und Könnens in der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Sekundastufe I beschreiben. Dabei beschränken wir uns auf die diejenigen Elemente, die Bezüge zum Unterricht in der Primarstufe aufweisen oder sogar für diesen Unterricht vorgeschlagen werden. Wir geben weitere Hinweise und Empfehlungen für den Primarstufenunterricht, insbesondere zu Dingen, die man nicht machen sollte.

3.2.1 Zu Grundbegriffen

Wie werden Wahrscheinlichkeiten bezeichnet?

Um Wahrscheinlichkeiten durch Brüche anzugeben und mit rechen zu können, müssen bestimmte Bezeichnungen eingeführt werden. Für Wahrscheinlichkeiten wird der Buchstabe P (probilitas (lat.), probability (engl.), probabilité (franz.)) verwendet. In der funktionalen Schreibweise wird traditionell ein großes P benutzt und in Klammern das Ergebnis angegeben, dem die Wahrscheinlichkeit zugeordnet wird. Dabei kann das Ergebnis in Worten oder als großer Buchstabe, der zur Abkürzung verwendet wird, angegeben werden.
Bei der Angabe einer Wahrscheinlichkeit ohne Angabe des Ergebnisses in Klammern wird ein kleines p benutzt. Dabei muss aus dem Zusammenhang hervorgehen, welches Ergebnis gemeint ist.

Beispiel:

Die Wahrscheinlichkeit für das Ergebnis „Die gewürfelte Augenzahl ist eine gerade Zahl.“ beträgt beim Werfen eines idealen Würfels 0,5.
Schreibweisen:

- P(Die Augenzahl ist eine gerade Zahl) = 0,5
- P(A) = 0,5 mit A: Die Augenzahl ist eine gerade Zahl.
- Es ist p = 0,5 für das Auftreten einer geraden Augenzahl beim Würfeln mit einem idealen Würfel.

Welche Rolle spielen die Begriffe Ergebnis und Ereignis sowie die Mengenschreibweise in der Sekundarstufe I?

In Unterrichtsvorschlägen für die Sekundarstufe und teilweise sogar für die Primarstufe wird teilweise das Ziel verfolgt, Schülern die Begriffe Ergebnis und Ereignis auf einem theoretischen Niveau zu vermitteln, wozu auch eine Mengenschreibweise verwendet wird. Wir wollen uns zunächst mit der Verwendung dieser Begriffe in der Fachwissenschaft beschäftigen, weitere Verständnisprobleme diskutieren, um dann zu einer Gesamteinschätzung zu kommen.

Zur Verwendung der Begriffe auf der theoretischen Ebene

In der Fachwissenschaft wird zum axiomatischen Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung ein nicht definierbarer Grundbegriff benötigt, der eine Verallgemeinerung der in der Realität oder in dem Realmodell vorhandenen möglichen Ergebnisse eines Vorgangs darstellt. Dazu gibt es in der Fachliteratur unterschiedliche Bezeichnungen, wie Ergebnis, zufälliges Ereignis, Elementarereignis oder atomares Ereignis. In einem weiteren Schritt des Aufbaus der Theorie wird die Menge aller Ergebnisse betrachtet, die man z. B. als Ergebnismenge, Menge der Elementarereignisse oder Grundraum bezeichnet. Weiterhin wird eine Menge von Teilmengen der Ergebnismenge mit bestimmten Eigenschaften gebildet und z. B. als Ereignisfeld, Ereignisalgebra oder System der interessierenden Ereignisse bezeichnet. Unter einem Ereignis wird meist ein Element des Ereignisfeldes, also eine Menge von Ergebnissen verstanden. Ein Elementarereignis ist dann auch eine Menge mit einem Ergebnis als Element, was für Lernende oft unverständlich ist.

Beispiel:

Der Vorgang des Werfens eines Würfels unter den Annahmen eines Realmodells hat als Ergebnisse die 6 möglichen Augenzahlen. Eine Formalisierung erfolgt dann in folgender Weise.
Ergebnisse: 1, 2, 3, 4, 5, 6
Ergebnismenge: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Elementarereignisse: $E_1 = \{1\}$ $E_2 = \{2\}$ $E_3 = \{3\}$ $E_4 = \{4\}$ $E_5 = \{5\}$ $E_6 = \{6\}$
Ereignis A: Es wird eine gerade Zahl gewürfelt. $A = \{2, 4, 6\}$
Es muss zwischen dem Ergebnis 1 und dem Elementarereignis {1} unterschieden werden.

Diese aus axiomatischer Sicht notwendige Verwendung der Mengendarstellung ist inhaltlich nicht erforderlich und sollte auch in der Sekundarstufe I nicht erfolgen.

Beim weiteren axiomatischen Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung wird dann die Wahrscheinlichkeit als ein Maß (eine Funktion) auf der Menge der Ereignisse, also der Menge von Teilmengen der Ergebnismenge definiert. Wahrscheinlichkeiten werden also in der Mathematik stets für Ereignisse angegeben, wobei häufig die Bezeichnung „zufälliges Ereignis“ verwendet wird.

Mit der Bezeichnung „zufälliges Ereignis“ sind aus Sicht eines Lernenden allerdings folgende Gedanken und Probleme verbunden:

- Das Wort Ereignis bezeichnet in der Umgangssprache einen besonderen Vorgang, Vorfall, Geschehnis (ein historisches Ereignis, das Theaterstück war ein Ereignis, die Geburt eines Kindes als ein freudiges Ereignis).
- Das etwas Besonderes zufällig sein soll, verstärkt den Charakter von etwas außergewöhnlichem.
- Mit Ereignis wird immer etwas Einzelnes (ein einzelner Vorgang, ein einzelner Vorfall) bezeichnet.

Insgesamt kann man feststellen, dass es in der Mathematik keine einheitlichen Bezeichnungen aller Grundbegriffen gibt, dass aber der Begriff „Ereignis“ eine zentrale Rolle spielt. Wir haben in den Vorschläge für den Primarstufenunterricht konsequent darauf geachtet, nur von Ergebnissen zu sprechen und mit der Betrachtung von unterschiedlichen Merkmalen auch mögliche Zusammenfassungen von Ergebnissen formulieren können. Im weiteren Unterricht in der Sekundarstufe I sollten die Schüler aber an die Verwendung des Wortes „Ereignis“ gewöhnt werden, wobei auf den Zusatz „zufällig“ wegen der genannten Probleme des Zufallsbegriffs verzichtet werden sollte. Angesichts der erwähnten umgangssprachlichen Verwendung des Wortes „Ereignis“ muss dazu eine neue Bedeutung des Wortes als Fachbegriff in der Stochastik erarbeitet werden. Ausgehend von den umgangssprachlichen Formulierungen: „etwas ist eingetreten“, „es hat sich etwas ereignet“ muss den Lernenden bewusst gemacht werden, dass Ereignisse in der Stochastik keine besonderen Vorfälle oder Vorgänge sind, sondern Zusammenfassungen mögliche Ergebnisse eines Vorgangs beinhalten und Aussagen über bestimmte Arten oder Eigenschaften von Ergebnissen treffen. Ereignisse sind in diesem Sinne Aussagen über Ergebnisse eines Vorgangs.

Beispiele:

a) Vorgang: Werfen eines Würfels; Ereignis: Es fällt eine gerade Zahl.
b) Vorgang: Weitsprung eines Schülers; Ereignis: Der Schüler springt weiter als 2 m.
c) Vorgang: Überlegungen eines Schülers zur Note in der gerade geschriebenen Arbeit; Ereignis: „Ich bekomme mindestens eine 3.“

Was ist in der Stochastik ein Zufallsexperiment?

Der Begriff **Zufallsexperiment** wird zwar in den meisten Plänen und Schullehrbüchern verwendet, er ist aber kein Begriff, der im Rahmen der Stochastik definiert werden kann. Er ist zum theoretischen

Aufbau dieser Wissenschaft nicht erforderlich und wird deshalb auch in vielen Fachbüchern nicht verwendet. Wenn er benutzt wird, werden damit in der Regel die folgenden Merkmale verbunden, wobei nicht immer alle Merkmale genannt werden.

(1) Es gibt genau festgelegte Bedingungen, unter denen das Zufallsexperiment durchgeführt wird.
(2) Das Zufallsexperiment ist unter diesen Bedingungen zumindest prinzipiell beliebig oft wiederholbar.
(3) Das Zufallsexperiment hat vorher bekannte unterschiedliche Ausgänge (Ergebnisse), von denen genau einer eintritt.
(4) Das Ergebnis des Zufallsexperimentes ist nicht vorhersehbar bzw. ungewiss.

Diese Merkmale findet man in der Regel auch in vielen Schullehrbüchern der Sekundarstufen. Auch in der Primarstufe wir dieser oft verwendet, da er in den Bildungsstandards genannt.

In der Stochastik werden mit dem theoretischen Begriff „Zufallsexperiment“ Vorgänge in zahlreichen Anwendungsbereichen, wie in der Medizin, der Landwirtschaft, der Technik, der Soziologie und weiteren Wissenschaften erfasst. In Schullehrbüchern, insbesondere in der Grundschule werden oft nur Beispiele aus dem Glücksspielbereich verwendet.

Oft ist in Schullehrbüchern der Begriff „Zufallsexperiment“ eng mit dem Begriff „**Zufallsgenerator**“ verbunden. Als Zufallsgeneratoren werden Geräte bezeichnet, mit denen Zufallsexperimente im Glücksspielbereich durchgeführt werden können. Oft werden symmetrische und nichtsymmetrische Zufallsgeneratoren unterschieden. Bei symmetrischen Zufallsgeneratoren haben alle möglichen Ergebnisse die gleiche Wahrscheinlichkeit. Zu diesen Geräten gehören die Münze, der Würfel und weitere Platonischen Körper, das Glücksrad mit gleichgroßen Sektoren oder die Urne. Nichtsymmetrische Zufallsgeneratoren sind die gezinkte Münze, der Quader, Glücksräder mit nicht gleichgroßen Sektoren oder Reißzwecken.

Bei Betrachtungen und Aufgaben zu Zufallsexperimenten bzw. Zufallsgeneratoren muss zwischen der Theorie, Unterrichtsmodellen, wie man sie etwa in der Wahrscheinlichkeitsbox findet, und realen Objekten unterschieden werden. In diesem Zusammenhang wird oft von der „idealen“ Münze oder dem „idealen“ Würfel (oder Laplace-Würfel) gesprochen. Diese Schwierigkeiten könnten umgangen werden, wenn man die Begriffe Zufallsexperiment und Zufallsgenerator gleich auf der theoretischen Ebene erklären würde, was aber explizit meist nicht erfolgt.

Empfehlungen für den Unterricht

Es gibt folgende Gründe, die gegen eine Verwendung des Wortes „Zufallsexperiment“ in der Primarstufe sprechen und sich auch auf die Sekundarstufen übertragen lassen.

– Die zahlreichen und teilweise gegensätzlichen Bedeutungen des Wortes „Zufall“ in der Umgangssprache, die bei den Schülern teilweise bereits verfestigt sind, können sich auch auf das Wort „Zufallsexperiment“ übertragen und so zu fehlerhaften Vorstellungen führen.

– Der Begriff Experiment hat in den Naturwissenschaften einen klar umrissenen Inhalt. Experimente werden von Individuen geplant, durchgeführt und ausgewertet. Experimente dienen zur Überprüfung von wissenschaftlichen Hypothesen. Diese Eigenschaften haben Erscheinungen, die mit dem Begriff Zufallsexperiment bezeichnet werden, in der Regel nicht. In der Stochastik werden meist Vorgänge betrachtet, die man nicht als Experimente bezeichnen kann. Auch wenn die Kinder in der Grundschule noch nicht mit dem Wort Experiment vertraut sind, werden bei Verwendung des Wortes „Zufallsexperiment“ fehlerhafte Vorstellungen für die künftige Entwicklung des Begriffes Experiment aufgebaut.

– Der Begriff Zufallsexperiment ist in der Stochastik mehr oder weniger explizit auf der theoretischen Ebene angesiedelt. Er wird in den meisten Fällen als ein Modell für reale Vorgänge angesehen. Um reale Vorgänge mit bestimmten mathematischen Methoden untersuchen zu können, müssen sich diese Vorgänge durch ein Zufallsexperiment mit den oben beschriebenen Merkmalen modellieren lassen. In der Primarstufe sollte aber noch keine Arbeit auf der theoretischen Ebene erfolgen sondern eine Beschränkung auf die Betrachtung von konkreten Phänomenen erfolgen. Dies entspricht den grundlegenden Intentionen, die dem propädeutischen Geometrieunterricht in der Primarstufe zu Grunde liegen.

- Mit dem Begriff Zufallsexperiment erfolgt oft eine wesentliche Einschränkung in der Betrachtung zufälliger Vorgänge im Unterricht. Im Mittelpunkt stehen dann in der Regel Vorgänge, die sich mit Zufallsgeneratoren wie Würfel, Münze, Urne, Glücksrad oder Glückskreisel oder auch durch das Werfen von Quadern und Reißzwecken realisieren lassen. Diese Vorgänge treten meist bei Glücksspielen auf und haben ansonsten keinen praktischen Nutzen. Die Dominanz dieser Vorgänge im Stochastikunterricht der Primarstufe verfälscht im erheblichen Maße die Vorstellung der Schüler von dem Anwendungsbezug der Stochastik.

Dies bedeutet nicht, dass man im Stochastikunterricht der Primarstufe auf den Einsatz von Zufallsgeneratoren verzichten sollte. Mit ihnen können wichtige intuitive Vorstellungen zum Wahrscheinlichkeitsbegriff, insbesondere zur Gleichwahrscheinlichkeit, zur Unabhängigkeit von Ereignissen und zum Zusammenhang von Wahrscheinlichkeit und relativer Häufigkeit ausgebildet werden.
Zufallsgeneratoren spielen in der Stochastik als (ideelle) Modelle für reale Vorgänge durchaus eine Rolle, da man an ihnen zahlreiche Eigenschaften realer Vorgänge studieren kann.

Es gäbe allerdings auch die Möglichkeit, mit dem Wort „Zufallsexperiment" ein tatsächliches Experiment zu bezeichnen, das zu einem zufälligen Vorgang durchgeführt wird. Dann entspricht allerdings der Inhalt dieses Begriffes nicht mehr der Bedeutung des Wortes in der Mathematik.

Wie ist das Verhältnis von Wahrscheinlichkeit und relativer Häufigkeit?

Untersuchungen zur relativen Häufigkeit von Ergebnissen insbesondere in langen Versuchsserien sind für die Vertiefung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs von großer Bedeutung. Diese sind in der Schule aber erst in der Sekundarstufe I nach Einführung der gebrochenen Zahlen möglich. In der Grundschule können erste Vorstellungen durch Betrachtung von absoluten Häufigkeiten ausgebildet werden (s. 3.2.2)

Der Vergleich von Wahrscheinlichkeiten und Häufigkeiten ist nur für die Verwendung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes für den Typ A von zufälligen Vorgängen von Bedeutung (s. S. 14). Beim Typ B ist eine Ermittlung von Häufigkeiten nicht möglich, da der Vorgang ja beendet ist und es um Betrachtungen zu den eingetretenen Ergebnissen geht. Im Folgenden soll nur der Typ A betrachtet werden.

Eine Wahrscheinlichkeitsangabe hat in diesem Fall immer einen prognostischen und theoretischen Charakter. Es ist eine allgemeine Aussage über eine Eigenschaft eines realen Vorgangs, die Prognosen für seine möglichen Ergebnisse gestattet. Wahrscheinlichkeitsaussagen sind Betrachtungen auf der Theorieebene, die nicht unmittelbar das konkrete Geschehen betreffen.

Eine relative Häufigkeit ist dagegen ein empirischer Wert, der sich auf der Grundlage von konkreten Ergebnissen durchgeführter oder abgelaufener Vorgänge ergibt. Die Angabe von absoluten oder relativen Häufigkeiten ist an eine konkrete Anzahl von Wiederholungen des Vorgangs und damit an tatsächliche Ereignisse gebunden.

Beispiel:

> Wird bei einem Wetterbericht eine Regenwahrscheinlichkeit angegeben, so ist dies eine Prognose, die auf der Grundlage von Wettermodellen und aktuellen Wetterdaten entstanden ist. Auf der Grundlage von Wetterdaten über einen längeren Zeitraum an einem Ort kann die absolute bzw. relative Häufigkeit von Regentagen für einzelne Monate bestimmt werden.

Ein zentraler Satz in der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist das Gesetz der großen Zahlen, dass bereits von Jakob Bernoulli im Jahre 1689 formuliert wurde. Es beschreibt den Zusammenhang von Wahrscheinlichkeit und relative Häufigkeit eines Ereignisses. Dabei wird allerdings vorausgesetzt, dass der

Vorgang in dessen Resultat das Ereignis entstanden ist, beliebig oft unter gleichen Bedingungen wiederholt werden kann. Ein prototypisches Beispiel für einen solchen Vorgang ist das Werfen einer Münze. Für viele andere Vorgänge in der Natur oder der Gesellschaft trifft diese Voraussetzung allerdings nur näherungsweise zu. Das Gesetz besagt, dass mit größer werdender Anzahl der Wiederholung eines Vorgangs unter den gleichen Bedingungen die Schwankungen der relativen Häufigkeit um die Wahrscheinlichkeit immer geringer werden. Dies wird auch als Stabilität der relativen Häufigkeit oder stochastische Konvergenz bezeichnet. Diese Konvergenz darf nicht mit der numerischen Konvergenz einer Zahlenfolge gleichgesetzt werden. So kann man nicht formulieren, dass sich die relative Häufigkeit immer mehr der tatsächlichen Wahrscheinlichkeit annähert.

Ein Beweis oder eine Begründung des Gesetzes der großen Zahlen mit mathematischen Mitteln ist in der Schule nicht möglich. Oft wird deshalb versucht, diesem Zusammenhang durch Experimente zu verdeutlichen. Dabei muss allerdings eine sehr große Zahl von Wiederholungen des Vorgangs durchgeführt werden, um den Effekt der stochastischen Konvergenz beobachten zu können. Dies ist sinnvoll nur mit Software möglich, die eine Simulation des Vorgangs erlaubt.

Experimente zum Verhältnis von Wahrscheinlichkeit und Häufigkeiten

Es gibt eine Reihe von Vorschlägen zur Durchführung von Experimenten mit Zufallsgeneratoren. Neben Experimenten zur Gleichwahrscheinlichkeit (s. S. 5 f.) geht es dabei um Untersuchungen zur Stabilität der relativen Häufigkeit und um Experimente zu Gewinnchancen.

Mit der ausschließlichen Betrachtung einer Folge von relativen Häufigkeiten kann das Gesetz der großen Zahlen nicht vollständig erfasst werden. Hinzu kommt, dass die Schüler solche Beobachtungen sehr selten im Alltag erleben. Weitaus häufiger erleben sie eine relativ geringe Anzahl von Wiederholungen eines Vorgangs, aus der sie Schlussfolgerungen über die Wahrscheinlichkeit ableiten. Deshalb sollte ein Experiment durchgeführt werden, mit dem die Schwankungsbreite der relativen Häufigkeit bei einer bestimmten kleinen Anzahl von Wiederholungen erlebt werden kann.

Ein mögliches Experiment zum Verhältnis von Wahrscheinlichkeit und absoluten Häufigkeiten könnte in folgender Weise durchgeführt werden.

1. Es wird das Werfen von Münzen (oder Wendeplättchen) untersucht.
2. Als Chancen für das Ergebnis „Zahl“ ergibt sich durch Symmetrieüberlegungen: 1 : 1
3. Es werden nun von den Schülern Vorhersagen für die Anzahl der Ergebnisse „Zahl“ bei 10 Würfen formuliert. Dies könnten sein:
   - Es sind 5 zu erwarten.
   - Es können aber auch mehr oder weniger sein
4. Jeder Schüler notiert als Vermutung den kleinsten und größten Wert, den er erwartet.
5. Es werden 10 Würfe in Partnerarbeit durchgeführt, ein Schüler wirft und der andere führt eine Strichliste.
6. Die Ergebnisse aller Gruppen werden an der Tafel in einer Strichliste/Häufigkeitstabelle gesammelt und es kann noch ein Streifendiagramm erstellt werden.
7. Als Erkenntnis kann dann erarbeitet werden, dass die Abweichungen vom erwarteten Wert 5 größer als gedacht sind.

3.2.2 Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten in der Orientierungsstufe

Nach Einführung der Brüche und Dezimalbrüche in der Klasse 5 können Wahrscheinlichkeiten durch Zahlen von 0 bis 1 dargestellt werden es kann mit ihnen auch gerechnet werden. Dazu werden folgende Eigenschaften und Zusammenhänge erarbeitet.

(1) Die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Ergebnisse eines Vorgangs ist 1.
Beispiel: Ein Schüler schätzt die Wahrscheinlichkeit seiner Noten in der gerade geschriebenen

Arbeit. Es sei A_i : Ich bekomme die Note i. (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6).
Dann gilt: $P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) + P(A_5) + P(A_6) = 1$

(2) Bezeichnet $\overline{A}$ die Aussage, dass das Ergebnis A nicht eintritt, so gilt: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
Beispiel: Es sei A: Beim Würfeln fällt eine 6. Dann ist $\overline{A}$: Beim Würfeln fällt keine 6.
Dann gilt: $P(\overline{A}) = 1 - 1/6 = 5/6$

(3) Wenn ein Vorgang bezüglich eines Merkmals n mögliche Ergebnisse E_i hat, die alle die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen, so gilt:

$$P(E_i) = \frac{1}{n} \text{ für } i = 1, 2, \dots, n$$

Wenn eine Aussage A über Ergebnisse dieses Vorgangs für m der möglichen n Ergebnisse zutrifft, so gilt

$$P(A) = \frac{m}{n} \quad (\textbf{Laplace-Formel})$$

Beispiele:
Es wird mit einem Würfel gewürfelt und als Merkmal die gewürfelte Augenzahl betrachtet. Unter vereinfachenden Annahmen besitzen alle 6 möglichen Ergebnisse die gleiche Wahrscheinlichkeit.

Es sei E_i das Ergebnis: Es wird die Augenzahl i gewürfelt. Dann gilt $P(E_i) = \frac{1}{6}$ für i = 1, 2, …, 6

Für den gleichen Vorgang kann man die Wahrscheinlichkeit der folgenden Aussagen über die 6 möglichen Ergebnisse berechnen, indem jeweils die Anzahl der zutreffenden Ergebnisse bestimmt wird.

A: Die Augenzahl ist gerade.	P(A) = 0,5
B: Die Augenzahl ist ungerade.	P(B) = 0,5
C: Die Augenzahl ist eine Primzahl.	P(C) = 0,5
D: Die Augenzahl ist eine Quadratzahl.	P(D) = 2/6
E: Die Augenzahl ist durch 2 und durch 3 teilbar.	P(E) = 1/6
F: Die Augenzahl ist durch 2 oder durch 3 teilbar.	P(F) = 4/6
G: Die Augenzahl ist Teiler von 60.	P(G) = 1
H: Die Augenzahl ist mindestens 3.	P(H) = 4/6
I: Die Augenzahl ist als Summe zweier gerader Zahlen darstellbar.	P(I) = 0,5
J: Die Augenzahl ist als Summe zweier ungerader Zahlen darstellbar.	P(J) = 2/6
Z: Die Augenzahl ist größer als 6.	P(Z) = 0

Wie können sehr kleine oder sehr große Wahrscheinlichkeiten veranschaulicht werden?

Um sich bei sehr kleinen oder sehr großen Wahrscheinlichkeiten eine *Vorstellung von der Größe der Wahrscheinlichkeit* verschaffen, kann das folgende Gedankenexperiment verwendet werden.

– Man stellt sich ein Ziehungsgerät mit Kugeln vor, mit dem eine Kugel zufällig ausgewählt werden kann (analog den Geräten zur Ziehung der Gewinnzahlen beim Spiel 6 aus 49). Zufällige Auswahl bedeutet, dass alle Kugeln die gleiche Wahrscheinlichkeit haben, gezogen zu werden.
– Man packt in Gedanken schwarze und weiße Kugeln in den Ziehungsbehälter, sodass die Wahrscheinlichkeit des Ziehens einer schwarzen Kugel der vorzustellenden Wahrscheinlichkeit entspricht. Man wähle möglichst kleine Anzahlen und stelle sich die Zahl der Kugeln vor.
– Nun stellt man sich vor, dass eine Ziehung durchgeführt wird und eine schwarze Kugel gezogen werden soll.
– Zur Anwendung der Häufigkeitsinterpretation stelle dir vor, dass die Ziehung so oft wiederholt wird, wie es der Gesamtzahl der Kugeln entspricht. Die Anzahl der schwarzen Kugeln ist dann ei-

ne Vorhersage für die zu erwartenden Anzahl des Auftretens des Ereignisses bei diesen Wiederholungen. Sie vermittelt ebenfalls eine Vorstellung von der Größe der Wahrscheinlichkeit.

vorzustellende Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A	Anzahl der schwarzen Kugeln	Anzahl der weißen Kugeln	Anzahl der Ziehungen	zu erwartende Anzahl des Auftretens von A
$P(A) = 10^{-4} = \frac{1}{10000}$	1	9 999	10 000	1
$P(A) = 0{,}95 = \frac{95}{100} = \frac{19}{20}$	19	1	20	19

Wie kommt man zu Wahrscheinlichkeiten?

Zusammenfassend sollen die Möglichkeiten genannt werden, eine Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis zu bestimmen.

1. **Subjektive Schätzung der Wahrscheinlichkeit auf der Grundlage von persönlichen Erfahrungen, Kenntnissen oder Vorstellungen**
   Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses kann von einer Person auf der Grundlage von Kenntnissen dieser Person über Bedingungen des Vorgangs geschätzt werden. Die Vorschläge zur Ausbildung eines präformalen Wahrscheinlichkeitsbegriffs beruhen in der Mehrzahl auf solchen subjektbezogenen Schätzungen. Dabei kann es sich um die Schätzung von Wahrscheinlichkeiten künftiger Ergebnisse handeln, wie etwa die Wahrscheinlichkeit zum Würfeln einer Sechs oder für das morgige Wetter, aber auch um die Wahrscheinlichkeiten von bereits eingetretenen aber unbekannten Ergebnissen, wie etwa die Wahrscheinlichkeit für die Ursachen einer defekten Fahrradlampe.
2. **Bestimmung der Wahrscheinlichkeit auf der Grundlage von Modellannahmen**
   Der für die Schule bedeutsamste Fall ist die Annahme einer Gleichverteilung, also der gleichen Wahrscheinlichkeit für alle möglichen Ergebnisse eines Vorgangs. Das prototypische Beispiel ist das Würfeln mit einem normalen Spielwürfel. Unter der Annahme, dass aufgrund des symmetrischen Aufbaus des Würfels die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der Augenzahlen gleich ist, kann die Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Augenzahl ermittelt werden. Weiterhin lassen sich aus dieser Modellannahme auch die Wahrscheinlichkeiten für weitere Ereignisse berechnen.
3. **Bestimmung der Wahrscheinlichkeit auf der Grundlage von Daten aus Beobachtungen oder von Experimenten zum wiederholten Ablauf des Vorgangs unter gleichen Bedingungen**
   Wenn es nicht möglich ist, über sinnvolle Modellannahmen zu Wahrscheinlichkeiten zu kommen, müssen diese auf der Grundlage von Daten näherungsweise experimentell bestimmt werden. Ein dafür in der Schule oft verwendetes Beispiel ist das Werfen von nichtsymmetrischen Objekten zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit für die verschiedenen möglichen Endlagen der Objekte. Solche Experimente haben meist eine sehr geringe praktische Relevanz und sind in ihrer Durchführung problematisch, wie etwa des Werfen von Reißzwecken oder gar von Nutella-Broten.
4. **Berechnen der Wahrscheinlichkeit aus anderen Wahrscheinlichkeiten**
   Mit Regeln und Sätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung können aus den auf die bisherigen Weisen ermittelten Wahrscheinlichkeiten für meist elementare Ereignisse die Wahrscheinlichkeiten für weitere Ereignisse berechnet werden. Eine Möglichkeit ist die Anwendung von Pfadregeln zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten für zusammengesetzte Ergebnisse (s. Kap. 3.3).

3.2.3 Mehrstufige Vorgänge

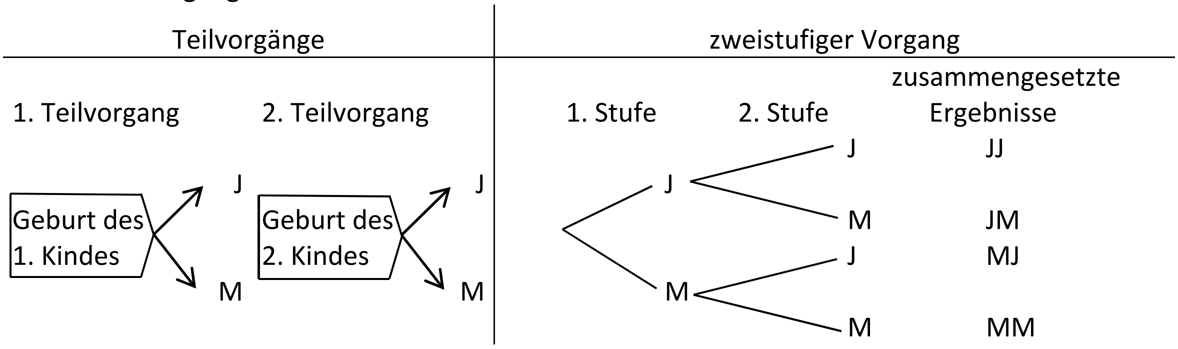
Was ist ein mehrstufiger Vorgang und wie kann man ihn veranschaulichen?

Um die Wahrscheinlichkeit von Ereignissen zu berechnen, die sich aus Ergebnissen mehrerer Vorgänge zusammensetzen, kann man diese als Teilvorgänge bzw. als **Stufen** eines **mehrstufigen Vorgangs** auffassen.

Die möglichen Ereigniskombinationen können in einem **Baumdiagramm** dargestellt werden. Jeder Pfad des Diagramms entspricht einem zusammengesetzten Ereignis.

Beispiel:

Die Geburt zweier Kinder kann man als Zusammensetzung zweier Teilvorgänge ansehen, die nacheinander ablaufen. Jedes Ergebnis des ersten Teilvorganges kann mit jedem Ergebnis des zweiten Teilvorganges kombiniert werden.



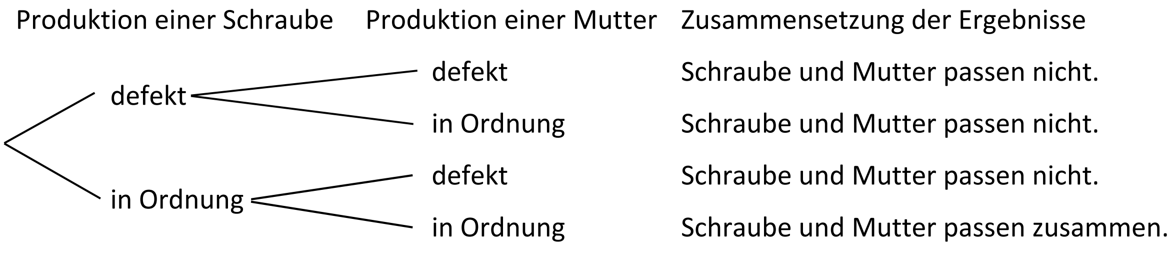
Ein mehrstufiger Vorgang kann aus *gleichen* oder *verschiedenen* Teilvorgängen bestehen, die *nacheinander* oder *gleichzeitig* ablaufen.

Mehrstufiger Vorgang	Verlauf und Art der Teilvorgänge	ein mögliches Ergebnis
zweimaliges Werfen einer Münze	Der gleiche Teilvorgang läuft zweimal nacheinander ab.	(W; Z)
Werfen von zwei Münzen	Zwei gleiche Teilvorgänge laufen gleichzeitig ab.	(Z; W)

Um die möglichen Ergebniskombinationen zu veranschaulichen, werden auch bei gleichzeitigem Verlauf der Teilvorgänge diese im Baumdiagramm stets nacheinander angeordnet.

Beispiel:

Bei der Herstellung von Schrauben und Muttern in einem Betrieb laufen die beiden Produktionsprozesse parallel ab. Ihre Ergebnisse bezüglich des Merkmals „fehlerhaft oder nicht“ können aber nacheinander angeordnet werden



Um einen mehrstufigen Vorgang zu untersuchen und in einem Baumdiagramm darzustellen, kann man in folgenden Schritten vorgehen.

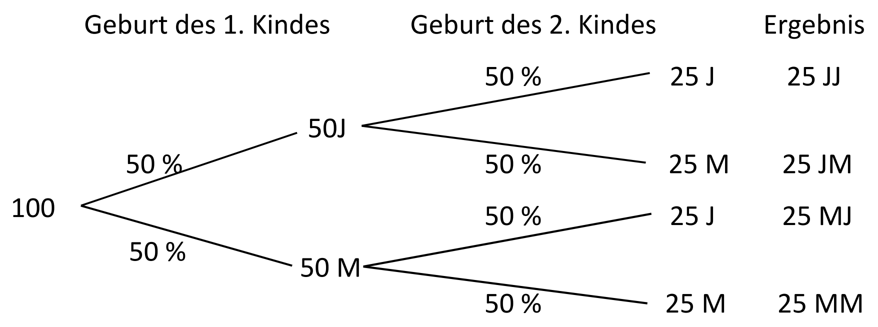
1. Ich stelle mir den Sachverhalt vor und bestimme die Teilvorgänge, die nach einander ablaufen („Was passiert zuerst *und* was passiert dann *und* was danach…..“) bzw. die gleichzeitig ablaufen („Was passiert *und* was passiert gleichzeitig *und* was passiert noch gleichzeitig …“).
2. Ich bestimme für jeden Teilvorgang das jeweils betrachtete Merkmal sowie alle möglichen Ergebnisse des Teilvorgangs bezüglich des Merkmals
3. Ich ordne die Teilvorgänge nacheinander an, möglichst dem zeitlichen Ablauf entsprechend.
4. Ich zeichne ein Baumdiagramm, in dem jedes Ergebnis des 1. Teilvorgangs Ausgangspunkt für alle Ergebnisse des 2. Teilvorgangs ist. Gibt es mehr als zwei Teilvorgänge, ist wieder jedes Ergebnis des 2. Teilvorgangs Ausgangspunkt für alle Ergebnisse des 3. Teilvorgangs usw.
5. Jedes Pfadende entspricht einem zusammengesetzten Ergebnis, das ich in Kurzform hinter die Pfadenden schreibe.

Wie kann die Wahrscheinlichkeit zusammengesetzter Ergebnisse berechnet werden?

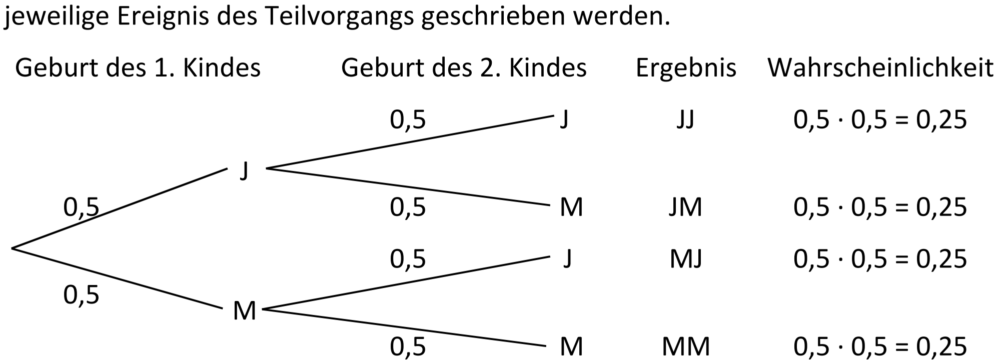
Um Regeln zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten bei mehrstufigen Vorgängen zu finden, kann die Häufigkeitsinterpretation der Wahrscheinlichkeit verwendet werden.

Beispiel:

Die Wahrscheinlichkeit für die Vererbung des Merkmals männlich oder weiblich ist etwa 50 %. Bei 100 Familien wird deshalb bei etwa 50 als erstes Kind ein Junge und bei ebenfalls 50 als erstes Kind ein Mädchen geboren. Von diesen 50 bekommen jeweils 25 als zweites Kind einen Jungen und ebenfalls 25 als zweites Kind ein Mädchen. Dies kann in einem Baumdiagramm als zweistufiger Vorgang veranschaulicht werden, wobei an den Pfadenden jeweils die zu erwartenden absoluten Häufigkeiten eingetragen werden.



25 sind die Hälfte von 50 und ein Viertel von 100. Die Wahrscheinlichkeit für jede der 4 Möglichkeiten beträgt also $0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$. Um die Wahrscheinlichkeit für ein zusammengesetztes Ereignis zu berechnen, können an jeden Pfad eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten für das jeweilige Ereignis des Teilvorgangs geschrieben werden.



1. Pfadregel:
In einem Baumdiagramm ist die Wahrscheinlichkeit für ein zusammengesetztes Ergebnis gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs des Pfades.

Man kann folgende Rechenkontrollen verwenden:

1. Bei einer Verzweigung des Baumes ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller weiterführenden Pfade gleich 1.
2. Die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Ergebnisse des mehrstufigen Vorgangs ist 1.

Oft werden mehrere Ergebnisse zu einem Ereignis zusammengefasst. Dann kann man die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ergebnisse addieren.

Beispiel:

Die Wahrscheinlichkeit für ein Geschwisterpaar in einer Familie mit 2 Kindern beträgt 0,5.

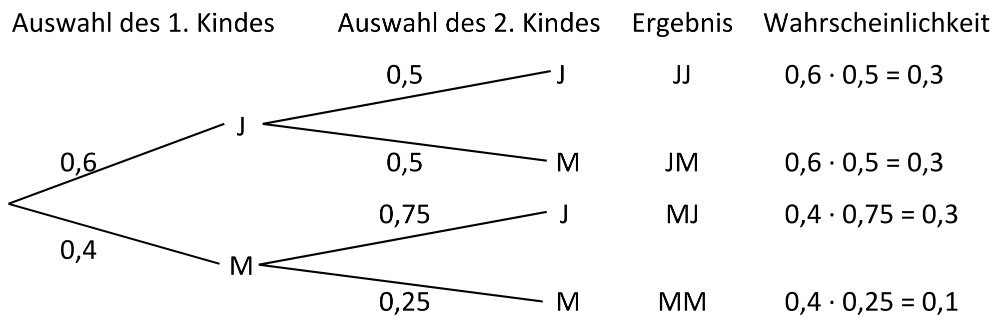
2. Pfadregel:
Bilden mehrere zusammengesetzte Ergebnisse ein Ereignis, so ist die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse.

Was bedeutet es, dass zwei Ereignisse voneinander stochastisch abhängig sind?

Bei Vorgängen, die nacheinander ablaufen kann die Anzahl der möglichen Ergebnisse bzw. die Wahrscheinlichkeit der Ergebnisse des einen Vorgangs vom Verlauf des anderen Vorgangs abhängig sein.

Beispiel:

Aus einer Gruppe mit 3 Jungen und 2 Mädchen werden nacheinander 2 Kinder ausgelost.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden Mädchen ausgelost werden?



Nach der Auswahl des 1. Kindes sind nur noch 4 Kinder in der Gruppe. Je nachdem, ob zuerst ein Junge oder ein Mädchen ausgelost wurde, sind es noch zwei Jungen und zwei Mädchen bzw. drei Jungen und ein Mädchen. Die Wahrscheinlichkeit, dass bei der zweiten Auswahl ein Mädchen ausgelost wird, hängt also von dem Ergebnis der ersten Auswahl ab.

Zwei Ereignisse heißen **stochastisch abhängig voneinander**, wenn das Eintreten des einen Ereignisses Einfluss auf die Wahrscheinlichkeit des anderen Ereignisses hat. Ansonsten heißen sie **stochastisch unabhängig voneinander.**

Woran erkennt man, ob zwei Merkmale eines Objektes voneinander abhängig sind?

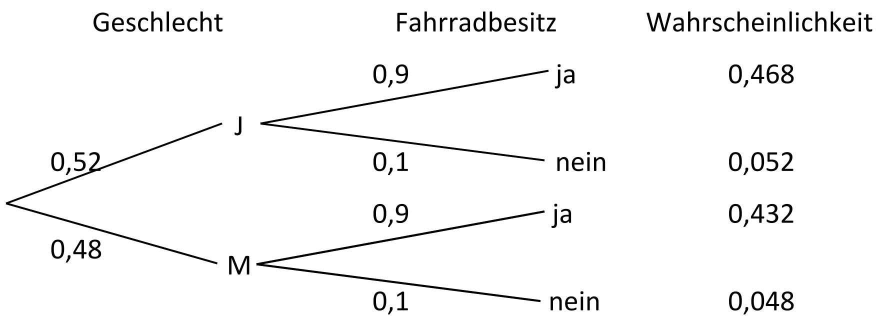
Bei statistischen Erhebungen werden an einem Objekt oft *zwei* Merkmale untersucht. Hängt die Wahrscheinlichkeit der Ausprägung des einen Merkmals von der Ausprägung des anderen Merkmals ab, so sagt man in diesen Fall, dass das eine Merkmal vom anderen abhängig ist.

Beispiel:

Bei 14-jährigen wurden die Merkmale „Geschlecht“ und „Besitzt eines eigenen Fahrrades“ untersucht. Die Ergebnisse der Befragung können in einer **Vierfeldertafel** dargestellt werden.

	eigenes Fahrrad	kein eigenes Fahrrad	Summe
Jungen	468	52	520
Mädchen	432	48	480
Summe:	900	100	1000

Die Befragung kann auch als ein zweistufiger Vorgang bei einem beliebigen Teilnehmer der Befragung aufgefasst werden, der aus den Teilvorgängen „Entstehung des Geschlechts“ und „Besitz eines Fahrrades“ besteht. Die entsprechenden relativen Häufigkeiten der Befragung werden nun als Wahrscheinlichkeiten für die Merkmalskombinationen bei einem beliebigen Teilnehmer gedeutet.



Aus beiden Darstellungen ist erkennbar, dass der Besitz eines eigenen Fahrrades nicht vom Geschlecht abhängig ist.

Vierfeldertafel:
Der Anteil der Fahrradbesitzer ist bei Jungen und Mädchen mit 90 % gleich groß.

Baumdiagramm:
Die Pfadwahrscheinlichkeiten beim zweiten Teilvorgang hängen nicht von den Ergebnissen des ersten Teilvorgangs ab.

Hinweise für den Unterricht

Zum Augensummenspiel

In Publikationen und Schulbüchern zum Stochastikunterricht in der Primarstufe ist sehr oft das Betrachten der Augensumme beim gleichzeitigen Werfen von zwei Würfeln enthalten, teilweise wird dies sogar als eines der ersten Beispiele vorgeschlagen. Die damit verbundenen Probleme werden allerdings oft nicht betrachtet. Das gleichzeitige Werfen von zwei Würfeln kann zunächst in unterschiedlicher Weise modelliert werden. Es wird in der Grundschulliteratur meist als ein einziger Vorgang betrachtet, der dann bei der Untersuchung der Augensumme 11 unterschiedliche Ergebnisse hat. Um die Wahrscheinlichkeiten dieser Ergebnisse zu ermitteln bzw. zu vergleichen, werden dann kombinatorische Überlegungen angestellt. Dabei stößt man schnell auf das Problem, dass etwa die Augenzahl 3 auf zwei unterschiedliche Weisen entstehen kann, indem der erste Würfel eine 1 unter zweite eine 2 bzw. der erste einer 2 unter zweite eine 1 zeigen. Werden zwei nicht unterscheidbare Würfel verwendet, wie es im Alltag meist üblich ist, so ist der Unterschied zwischen diesen beiden Würfelergebnissen nicht sichtbar. In der Literatur werden deshalb in der Regel zwei verschiedenfarbige Würfel verwendet. Doch auch mit diesem Trick gelingt es oft kaum, alle Schüler zu den erwarteten Einsichten zu bringen, wie Prediger in einem Fallbeispiel zeigen konnte (Prediger 2005). Doch selbst wenn dies gelingen sollte, bleibt die Frage offen, wie man das naheliegende Problem der nicht unterscheidbare Würfel im Anfangsunterricht bewältigen will.

Das gleichzeitige Werfen von zwei Würfeln lässt sich bei genauer Betrachtung sinnvollerweise als zweistufiger Vorgang des zweimaligen Werfen eines Würfels modellieren. Damit entfallen dann die schwierigen Betrachtungen zur Unterscheidung der Würfel und man kann mit einem Baumdiagramm leicht die Menge der 36 gleichwahrscheinlichen Ergebnisse veranschaulichen, woraus sich dann die gesuchte Wahrscheinlichkeitsverteilung der Augensumme oder auch anderer Zufallsgrößen ergeben.

Die Gleichwertigkeit des gleichzeitigen Werfens von zwei Würfeln und des zweimaligen Werfens eines Würfels lässt sich mit folgenden Überlegungen und Handlungen überzeugend nachweisen.

1. Man schüttelt einen Würfelbecher mit zwei Würfeln und stellt sich in Gedanken vor, dass man sich in diesem Becher befindet und beide Würfel beobachten kann. Dabei könnte man sehen, dass sich die Würfel zwar ständig gegenseitig berühren aber dadurch wird die von ihnen am Schluss angezeigten Augenzahlen nicht so beeinflusst, dass einige Augenzahlen eine größere Wahrscheinlichkeit haben.
2. Nun stellt man sich in Gedanken einen Würfelbecher mit zwei Kammern vor, in denen sich jeweils ein Würfel befindet.
3. Im nächsten Schritt, der nun auch real ausführbar ist, wird gleichzeitig mit zwei Würfelbechern mit je einem Würfel gewürfelt und wieder erkennt man die Gleichwertigkeit zur Ausgangssituation.
4. Nun ist es nicht mehr schwer, auf einen Würfelbecher zu verzichten und mit nur einem Würfelbecher und einem Würfel zweimal nacheinander zu würfeln.

Der mathematische Hintergrund des oft so bezeichneten Augensummenspiels sind mehrstufige Vorgänge und das Arbeiten mit Zufallsgrößen ist. Beides sind Gegenstände, die erst in der 8. oder 9. Jahrgangsstufe thematisiert werden. Wir empfehlen deshalb, das Augensummenspiel nicht vor der Behandlung mehrstufige Vorgänge in den Unterricht einzubeziehen.

3.2.4 Berechnen und Interpretieren von Erwartungswerten

Was ist eine diskrete Zufallsgröße?

Ein betrachtetes Merkmal eines Vorgangs heißt auch **Zufallsgröße,** wenn die Merkmalswerte reelle Zahlen oder Größen sind. Zufallsgrößen werden mit großen Buchstaben bezeichnet.

Wenn die Zufallsgröße nur endlich (oder abzählbar) viele Werte annehmen kann, heißt sie **diskret**.

Oft werden den Ergebnissen eines Vorgangs Zahlenwerte zugeordnet, um damit eine unterschiedliche Wichtung der Ergebnisse vorzunehmen. So wird bei finanziellen Überlegungen und Entscheidungen als Zufallsgröße oft der Gewinn bzw. der Verlust betrachtet, der beim Eintreten der jeweiligen Ergebnisse entsteht.

Beispiel:

Eine Unfallversicherung erhebt einen jährlichen Versicherungsbeitrag von 60 Euro. Jeder Unfall verursacht der Versicherung im Durchschnitt Kosten von etwa 5000 Euro.
In dieser stochastischen Situation geht es um den Vorgang des Unfallgeschehens einer versicherten Person. Als Merkmal wird betrachtet, ob die Person einen Unfall erleidet oder nicht und die möglichen Ergebnisse sind dementsprechend Unfall bzw. kein Unfall. Diesen Ergebnissen wird als Zufallsgröße X der Gewinn der Versicherung zugeordnet.

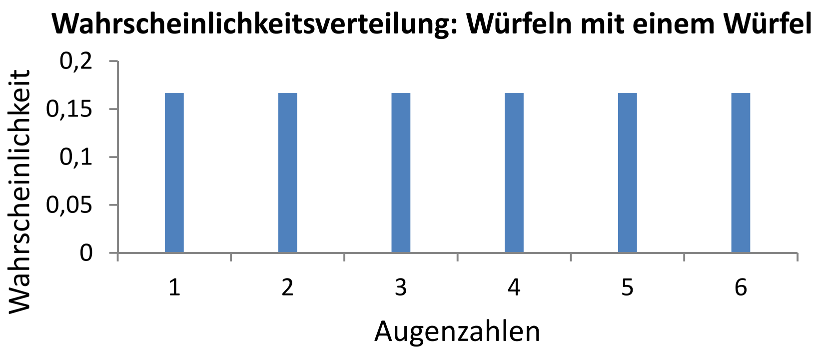
mögliche Ergebnisse	Zufallsgröße X: jährlicher Gewinn der Versicherung
kein Unfall	60 €

Unfall	– 5000 €

Was ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung?

Unter einer Wahrscheinlichkeitsverteilung versteht man eine Funktion, die jedem Wert eine Zufallsgröße eine Wahrscheinlichkeit zuordnet. Man spricht von einer **Gleichverteilung**, wenn alle Wahrscheinlichkeiten gleich sind.

Beispiel:



Der Begriff der Wahrscheinlichkeitsverteilung

Was ist der Erwartungswert einer Zufallsgröße?

Der Erwartungswert E einer Zufallsgröße X ist die Summe der Produkte aus den Werten der Zufallsgröße und den Wahrscheinlichkeiten der Werte.

Der Erwartungswert gibt den Wert der Zufallsgröße an, der beim einmaligen Ablauf des Vorgangs zu erwarten ist. Dies ist ein Wert, der bei einem einzelnen Vorgang oft gar nicht eintreten kann. Daraus lässt sich aber der zu erwartende Wert bei mehrfacher Wiederholung berechnen.

Beispiel:

Aufgrund der Daten zum Unfallgeschehen ist der Unfallversicherung bekannt, dass in der Personengruppe, zu der Versicherte gehört, innerhalb einer Jahresfrist etwa 0,5 % der Versicherten verunglücken. Diese relative Häufigkeit kann als Wahrscheinlichkeit für einen Unfall eines Versicherten im nächsten Jahr angesehen werden. Damit lässt sich der Erwartungswert des jährlichen Gewinns der Versicherung pro Versichertem berechnen:

mögliche Ergebnisse	Zufallsgröße X: Gewinn der Versicherung	Wahrscheinlichkeit der Ergebnisse
kein Unfall	60 €	0,995
Unfall	– 5000 €	0,005

$$E(X) = 60\text{ €} \cdot 0{,}995 + (-\,5000\text{ €}) \cdot 0{,}005 = 34{,}70\text{ €}$$

Pro Versicherten kann die Versicherung einen jährlichen Gewinn von 34,70 € erwarten. Bei 200 000 Versicherten ergibt sich ein jährlicher Gesamtgewinn von 6,940 Mill. Euro, aus dem dann natürlich auch die Betriebskosten zu bestreiten sind.

Welcher Zusammenhang besteht zwischen Erwartungswert und arithmetischem Mittel

Der Erwartungswert ist wie die Wahrscheinlichkeit ein theoretischer Wert, die eine Prognose für den künftigen Verlauf zufälliger Vorgänge erlaubt, wenn sich die Bedingungen nicht ändern.
Werden die Daten des tatsächlichen Verlaufs des Vorganges ausgewertet, so entspricht die relative Häufigkeit der eingetretenen Ergebnisse ihrer erwarteten Wahrscheinlichkeit und das arithmetische Mittel der Werte der Zufallsgröße entspricht ihrem Erwartungswert.
Der Erwartungswert ist also das zu erwartende arithmetische Mittel der Werte der Zufallsgröße bei mehrfacher Wiederholung des Vorgangs.

Beispiel:

Ein Obsthändler handelt mit Orangen. Er weiß aus Erfahrung, dass bei einem bestimmten Lieferanten etwa 70 % von ausgezeichneter, 20 % noch von guter und 10 % von minderwertiger Qualität sind.
Der Händler kauft die Orangen für 1 € pro Kilogramm. Die Orangen mit ausgezeichneter Qualität verkauft er für 2,49 € pro Kilogramm und die von guter Qualität für 1,49 € pro Kilogramm. Die minderwertigen verkauft er nicht.

Bei der Lieferung von 500 kg Orangen des Lieferanten stellt er im Laufe des Verkaufs fest, dass 340 kg von ausgezeichneter Qualität, 105 kg von guter Qualität und 55 kg minderwertig waren.

Wie groß ist der Erwartungswert des Gewinns des Händlers und wie groß ist der durchschnittliche Gewinn pro Kilogramm bei dem Verkauf der Lieferung?

Ergebnisse: Qualitätsgruppen	Werte der Zufallsgröße: Gewinn G in $\frac{\text{Euro}}{\text{kg}}$	Wahrscheinlichkeit
sehr gut	1,49	0,70
gut	0,49	0,20
minderwertig	− 1	0,10

Der Erwartungswert der Zufallsgröße Gewinn beträgt:

$$E(G) = 1{,}49\,\frac{\text{Euro}}{\text{kg}} \cdot 0{,}70 + 0{,}49\,\frac{\text{Euro}}{\text{kg}} \cdot 0{,}20 + \left(-1\,\frac{\text{Euro}}{\text{kg}}\right) \cdot 0{,}10 = 1{,}041\,\frac{\text{Euro}}{\text{kg}}.$$

Der Obsthändler kann also theoretisch für jedes gelieferte Kilogramm Orangen einen Gewinn von etwa 1,04 Euro erwarten. Bei 500 kg beträgt die Gewinnerwartung 520,50 €.

Für die konkrete Lieferung ergibt sich folgende Situation.

Qualitätsgruppen	Menge in kg	relative Häufigkeit
sehr gut	340	0,68
gut	105	0,21
minderwertig	55	0,11

Daraus ergibt sich folgender durchschnittliche Gewinn pro eingekauftes Kilogramm.

$$\bar{x} = \frac{1}{500\text{ kg}}\left(340\text{ kg} \cdot 1{,}49\,\frac{\text{Euro}}{\text{kg}} + 105\text{ kg} \cdot 0{,}49\,\frac{\text{Euro}}{\text{kg}} + 55\text{ kg} \cdot \left(-1\,\frac{\text{Euro}}{\text{kg}}\right)\right)$$

$$= 0{,}68 \cdot 1{,}49\,\frac{\text{Euro}}{\text{kg}} + 0{,}21 \cdot 0{,}49\,\frac{\text{Euro}}{\text{kg}} + 0{,}11 \cdot \left(-1\,\frac{\text{Euro}}{\text{kg}}\right)$$

$$= 1{,}0061\,\frac{\text{Euro}}{\text{kg}}$$

Das arithmetische Mittel $\bar{x}$ liegt unter dem Erwartungswert E, da der Anteil der Orangen mit sehr guter Qualität um 2 % geringer und der Anteil mit guter Qualität dafür nur 1 % größer als erwartet war. Der Gewinn des Händlers beträgt nach dem Verkauf der Äpfel 503,05 €.

Wie kann der Erwartungswert verändert werden?

Ohne dass sich der zufällige Vorgang selbst ändert, kann man oft eine Veränderung des Erwartungswertes der Zufallsgröße durch Veränderung ihrer Werte erreichen.

Beispiel:

Wenn der Obsthändler auch die minderwertigen Orangen zum Einkaufspreis, also für 1 Euro pro Kilogramm verkauft, erhöht sich der zu erwartende Gewinn auf 1,141 Euro pro kg:

$$E(G) = 1{,}49\,\frac{\text{Euro}}{\text{kg}} \cdot 0{,}7 + 0{,}49\,\frac{\text{Euro}}{\text{kg}} \cdot 0{,}2 + 0\,\frac{\text{Euro}}{\text{kg}} \cdot 0{,}1 = 1{,}141\,\frac{\text{Euro}}{\text{kg}}$$

Der Erwartungswert ändert sich ebenfalls, wenn sich durch Veränderung der Bedingungen des Vorgangs die Wahrscheinlichkeitsverteilung ändert.

Beispiel:

Wenn der Obsthändler den Zulieferer wechselt, könnte sich auch die Wahrscheinlichkeit der einzelnen Qualitätsgruppen ändern. Bei einer Wahrscheinlichkeitsverteilung wie in der Tabelle angegeben, erhöht sich bei gleichen Preisen der Erwartungswert des Gewinns auf 1,191 Euro pro Kilogramm.

Qualitätsgruppen	Gewinn in $\frac{\text{Euro}}{\text{kg}}$	Wahrscheinlichkeit
sehr gut	1,49	0,85
gut	0,49	0,05
minderwertig	– 1,-	0,10

$$E(G) = 1{,}49\,\frac{\text{Euro}}{\text{kg}} \cdot 0{,}85 + 0{,}49\,\frac{\text{Euro}}{\text{kg}} \cdot 0{,}05 + \left(-1\,\frac{\text{Euro}}{\text{kg}}\right) \cdot 0{,}1 = 1{,}191\,\frac{\text{Euro}}{\text{kg}}$$

4 Anhang

4.1 Zur Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung

In den Anfängen der Entstehung der Wahrscheinlichkeitsrechnung hatte der Begriff Wahrscheinlichkeit zahlreiche inhaltliche Aspekte. So entwickelte *Thomas Bayes* (um 1702 - 1761**)** englischer Mathematiker und Pfarrer die Idee der Wahrscheinlichkeiten von Ursachen von beobachteten Ergebnissen, die wir als Typ II der Verwendung von Wahrscheinlichkeiten bezeichnet haben. Daraus hat sich die sogenannte **Bayes-Statistik** entwickelt, die einen **subjektiven Wahrscheinlichkeitsbegriff** verwendet und heute zunehmende Berücksichtigung in der Schule findet.

Pierre-Simon Laplace (1749 – 1827) prägte den so genannten **klassischen Wahrscheinlichkeitsbegriff**, in dem er die Wahrscheinlichkeit als Verhältnis von Anzahlen bei gleichmöglichen Ereignissen definierte. Alle Bemühungen, die „Gleichmöglichkeit“ mathematisch exakt zu erfassen, sind allerdings gescheitert. Die Laplace-Formel ist ein fester Bestandteil des Mathematikunterrichts.

Richard von Mises (1883-1953) versuchte, die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses als Grenzwert von relativen Häufigkeiten zu definieren. Man spricht in diesem Sinne von einem **statistischen** oder auch **frequentistischen Wahrscheinlichkeitsbegriff**. Auch dieser Ansatz zur mathematischen Fundierung hat sich nicht als haltbar erwiesen, Betrachtungen zur relativen Häufigkeit sind in der Schule unverzichtbar.

Andrej Nikolajewitsch Kolmogorow (1903 – 1987) hatte als Erster die Idee, sich völlig von inhaltlichen Vorstellungen und Erklärungen durch andere Begriffe zu lösen und den Begriff Wahrscheinlichkeit als mathematisch nicht definierbaren Grundbegriff aufzufassen. Wie andere Grundbegriffe der Mathematik (Menge, Zahl, Punkt) legte er den Wahrscheinlichkeitsbegriff axiomatisch fest und schuf damit die so genannte axiomatische „Definition“ der Wahrscheinlichkeit; man spricht dabei von einem **axiomatischen Wahrscheinlichkeitsbegriff**. Eine mathematische Grundlage dieses Zugangs ist die Theorie messbarer Mengen. Die axiomatische Festlegung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs ist in der Schule höchstens als exemplarisches Wissen in der Sekundarstufe II anzusehen.

Während also in den Anfängen der Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung der Wahrscheinlichkeitsbegriff noch eine Vielzahl inhaltlicher Aspekte besaß, wird er heute in der mathematischen Theorie lediglich auf einen formalen Aspekt reduziert. Was eine Wahrscheinlichkeit inhaltlich bedeutet, kann mit mathematischen Begriffen nicht erklärt werden.

In der Schule ist es nicht sinnvoll von verschiedenen Wahrscheinlichkeitsbegriffen zu sprechen, wie es teilweise in der didaktischen Literatur und Schullehrbüchern der Fall ist. Es wird damit der Eindruck erweckt, dass es verschiedene Wahrscheinlichkeitsbegriffe in der Mathematik gibt, was nicht zutrifft. Alle grundlegenden mathematischen Begriffe wie etwa Natürliche Zahl, Bruch oder Variable haben sehr viele inhaltliche Aspekte, die nicht extra bezeichnet werden. Eine Aneignung dieser Aspekte erfolgt durch die häufige Verwendung des Begriffs in unterschiedlichen Zusammenhängen.

Die hinter den Bezeichnungen stehenden Bedeutungen können viel deutlicher durch eine explizite Beschreibung zum Ausdruck gebracht werden. Mit der Bezeichnung „klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff“ ist gemeint, dass der Sonderfall der Gleichwahrscheinlichkeit aller möglichen Ergebnisse vorliegt und somit dann auch Berechnungen mithilfe der Laplace-Formel angestellt werden können. Hinter der Bezeichnung „frequentistischer Wahrscheinlichkeitsbegriff“ verbergen sich umfangreiche Betrachtungen zum Verhältnis von Wahrscheinlichkeit und relativer Häufigkeit (s. S.).

4.2 Methoden zum Lösen kombinatorischer Aufgaben

4.2.1 Zur Rolle der Kombinatorik

Das Lösen kombinatorischer Aufgaben wird in der Schule oft noch als ein Bestandteil des Stochastiklehrgangs angesehen. Dies führt dann oft dazu, dass weniger Zeit für Elemente der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik zur Verfügung stehen. Diese Situation entspricht weder der Stellung der Kombinatorik als Wissenschaft noch den aktuellen Orientierungen in zentralen Plänen.

Die Kombinatorik ist kein Bestandteil der Wissenschaftsdisziplin Stochastik. Im Rahmen der Wahrscheinlichkeitsrechnung hat die Kombinatorik die Funktion einer Hilfsdisziplin, indem sie geeignete Abzählverfahren zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten bereitstellt.

In den aktuellen Bildungsstandards für die Primarstufe und den mittleren Schulabschluss wird das Lösen kombinatorischer Aufgaben in die Leitidee Zahl eingeordnet.

Die Kombinatorik auch eine eigenständige Bedeutung. Es gibt zum einen eine Reihe von Alltagsproblemen, die kombinatorische Fähigkeiten erfordern. Darüber hinaus lassen sich Beiträge zu folgenden Zielen leisten:

- Entwicklung geistiger Beweglichkeit
- Festigung des Rechnens mit natürlichen Zahlen
- Entwicklung von Vorstellungen über mögliche Größenordnungen bei kombinatorischen Problemstellungen.

Die Mehrzahl der kombinatorischen Aufgaben in den Schullehrbüchern sind Sach- bzw. Anwendungsaufgaben. Eine nähere Betrachtung zeigt jedoch, dass viele Aufgabenstellungen lebensfremd oder praxisirrelevant sind. Bei der Berechnung der Anzahlen werden häufig reale Voraussetzungen oder Einschränkungen nicht beachtet. Es ist allerdings bei tatsächlichen Anwendungen oft schwierig, alle Bedingungen zu berücksichtigen und die Aufgabenstellung eindeutig zu interpretieren. Man sollte deshalb bei der Einführung der Lösungsmethoden und Rechenregeln zunächst bewusst auf Praxisnähe verzichten und formale, eindeutige Sachverhaltsvorgaben verwenden, die durchaus auch reizvoll sein können, wenn man sie geschickt einbettet. Bei der Bearbeitung der übrigen Aufgabenstellungen ist in der Regel eine Diskussion des realen Sachverhaltes erforderlich, um dem Anspruch der Lebensnähe Genüge zu tun.

Kombinatorische Aufgaben wirken in der Regel auf Kinder in der Primarstufe sehr anregend. Wenn die Kinder die Chance zum eigenständigen Lösen bekommen, sind sehr unterschiedliche Vorgehensweisen zu beobachten. Dies betrifft genau so die Darstellung des Lösungsweges. Deshalb sollten nach der Formulierung der Fragestellung die Schüler Möglichkeiten und Darstellungsformen selbst suchen und anschließend ihre Lösungswege vorstellen.

4.2.2 Mögliche Vorgehensweisen

Systematisches Probieren

In einfachen Fällen kann man alle Möglichkeiten durch ein geeignetes systematisches Vorgehen und Aufschreiben ermitteln. Systematisches Probieren kann die Verwendung von Zählregeln vorbereiten.

Beispiel:

Wie viel Möglichkeiten gibt es, drei gleichgroße aber verschiedene Bücher nebeneinander ins Regal zu stellen?

Werden die Bücher mit A, B, C bezeichnet, erhält man nach dem Prinzip: Festhalten eines Buches auf dem ersten Platz, Variation der Plätze der beiden übrigen, die sechs Möglichkeiten

A B C   **A** C B   **B** C A   **B** A C   **C** A B   **C** B A

Es sind aber auch andere Überlegungen und Darstellungen möglich. So kann man das Buch A nacheinander auf die Plätze 1, 2 und 3 Stellen und dann jeweils die anderen beiden Bücher einordnen. Dies führt zu folgender Lösung:

A B C **A** C B B **A** C C **A** B B C **A** C B **A**

Verwenden von kombinatorischen Baumdiagrammen

Bereits beim systematischen Probieren ist das Verwenden von kombinatorischen Baumdiagrammen möglich. Baumdiagramme bereiten weiterhin die Anwendung von Zählregeln und ebenso die Pfadregeln und die damit verbundenen Baumdiagramme der Wahrscheinlichkeitsrechnung vor.

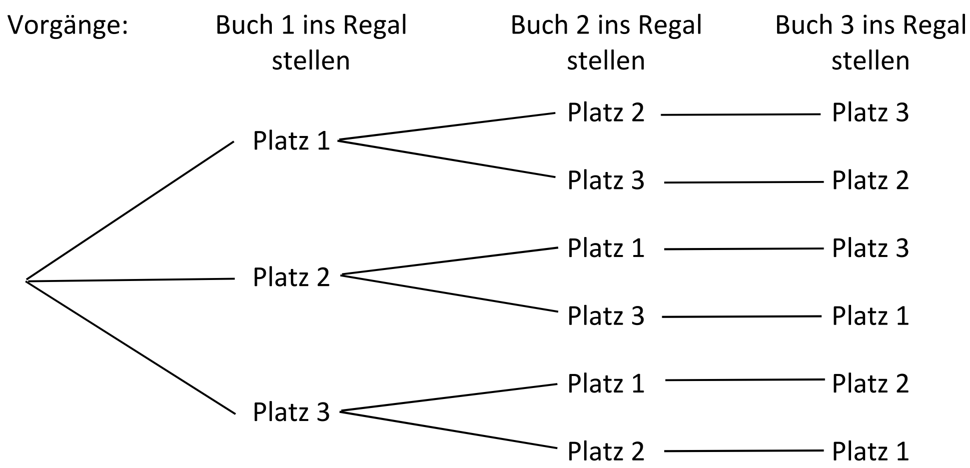
Baumdiagramme sind in der Kombinatorik allerdings nur einsetzbar, wenn die Gesamtzahl der Möglichkeiten gering ist.

Für das Aufstellen von Baumdiagrammen können bereits Gedanken der Prozessbetrachtung verwendet werden. Dazu kann überlegt werden, welche Entscheidungsprozesse nacheinander ablaufen, um eine Möglichkeit zu erzeugen. In einigen Fällen sind unterschiedliche Folgen von Entscheidungsprozessen möglich. Ein Baumdiagramm kann von rechts nach links oder von oben nach unten gezeichnet werden.

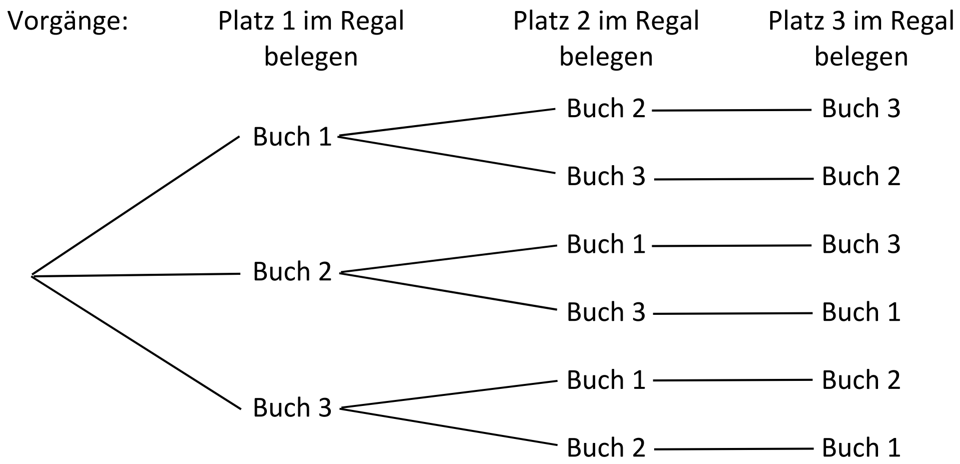
Beispiel:

Wie viel Möglichkeiten gibt es, drei gleichgroße aber verschiedene Bücher nebeneinander ins Regal zu stellen?

1. Variante: Es wird von den Büchern ausgegangen, sie werden schrittweise ins Regal gestellt.



2. Variante: Es wird von den Plätzen ausgegangen, sie werden schrittweise mit Büchern belegt.



Verwenden von Zählregeln

Mit Hilfe der *Zählregeln*, auch *Zählprinzipien* genannt, lassen sich kombinatorische Aufgaben lösen, ohne ein Begriffs- oder Formelsystem zu benötigen. Die Überlegungen bleiben sehr nahe am Sachverhalt, eine Verallgemeinerung oder Typisierung der Aufgaben ist nicht erforderlich. In der Schulpraxis hat sich dieser Weg als der effektivste herausgestellt.

Es gibt mehrere Zählregeln. Die **Produktregel** ist dabei die wichtigste, da sie am häufigsten auftritt und Grundlage der anderen Regeln ist. Sie kann in folgender Weise formuliert werden:

> Kann zur Erzeugung eines möglichen Ergebnisses eine Folge von Handlungen angegeben werden, die nacheinander ausgeführt werden müssen und die voneinander unabhängig sind, so ist die Gesamtzahl aller möglichen Ergebnisse gleich dem Produkt der Anzahl der möglichen Ergebnisse bei jeder Handlung. Es dürfen keine Mehrfachzählungen vorkommen.

Zur Anwendung der Produktregel sollte ein Schüler in folgenden Schritten vorgehen:

1. Ich stelle mir vor, dass eine der Möglichkeiten verwirklicht werden soll.
2. Ich überlege, welche Handlungen zur Verwirklichung einer Möglichkeit nacheinander ausgeführt werden müssen.
3. Ich überprüfe, ob die Möglichkeiten bei einer Handlung in Abhängigkeit vom Ergebnis der vorherigen Handlung unterschiedlich sind.
4. Ich bestimme die Anzahl der möglichen Ergebnisse bei jeder einzelnen Handlung.
5. Ich berechne das Produkt der ermittelten Anzahlen und erhalte die Gesamtzahl der Möglichkeiten.

Bis zur sicheren Beherrschung der Produktregel sollte zumindest andeutungsweise stet ein Baumdiagramm verwendet werden. Anschließend sollte stets eine Tabelle erstellt werden.

Bei einer tabellarischen Darstellung sind zwei unterschiedliche Anordnungen möglich, die den beiden Möglichkeiten der Darstellung von Baumdiagrammen entsprechen.

Beispiel:

Eva hat Geburtstag. Sie will eine Hose und ein T-Shirt anziehen und hat zwei Hosen und drei T-Shirts zur Auswahl, die alle zueinander passen.
Wie viele Möglichkeiten der Zusammenstellung hat sie?

Baumdiagramm:

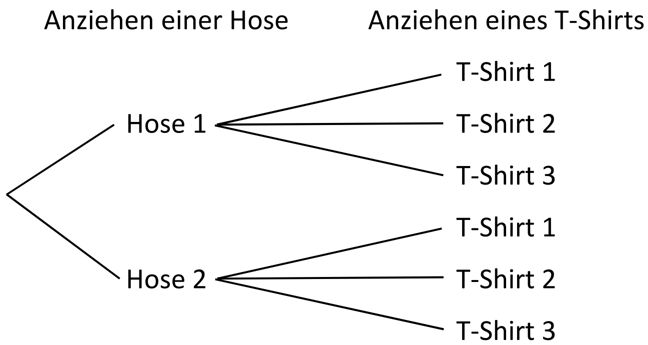


Tabelle:

Handlungsfolge:	1. Anziehen einer Hose	2. Anziehen eines T-Shirts
Anzahl der Entscheidungsmöglichkeiten:	2	3

Gesamtzahl der Möglichkeiten: $2 \cdot 3 = 6$

Die Tabelle kann auch in anderer Form dargestellt werden. Diese Form ist günstiger, wenn die Zahl der aufeinanderfolgenden Handlungen größer ist.

Handlungsfolge	Anzahl der Entscheidungsmöglichkeiten
1. Anziehen einer Hose	2
2. Anziehen eines T-Shirts	3

Gesamtzahl der Möglichkeiten: $2 \cdot 3 = 6$

Probleme bei der Anwendung der Produktregel ergeben sich, wenn die Entscheidungsfolge nicht dem natürlichen Handlungsablauf entspricht bzw. wenn auch Folgen in Betracht kommen, bei denen die Entscheidungen voneinander nicht unabhängig sind.

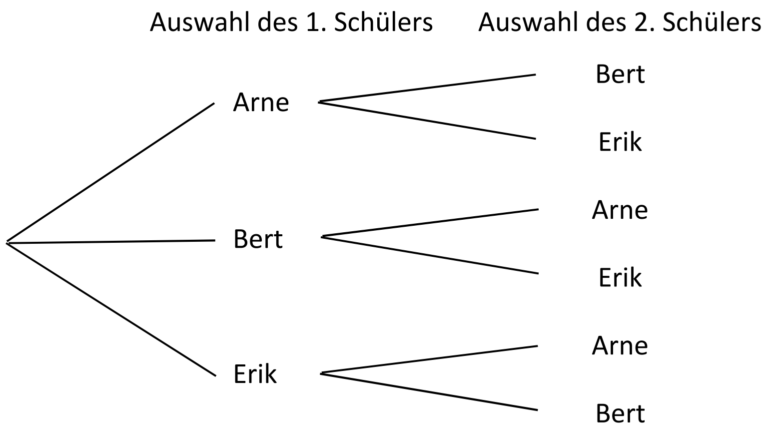
In einigen Fällen kommt es bei der Anwendung der Produktregel zu **Mehrfachzählungen**. Das bei Mehrfachzählungen zu verwendende Zählprinzip wird häufig als **Quotientenregel** bezeichnet und könnte so formuliert werden:

Wurde bei Anwendung der Produktregel jede der ermittelten Möglichkeiten n mal gezählt, so ist die Gesamtzahl der Möglichkeiten durch n zu dividieren.

Beispiel:

Von den drei Schülern Arne, Bert und Erik sollen zwei ausgewählt werden. Wie viele Möglichkeiten zur Auswahl gibt es?

Baumdiagramm:



Aus dem Baumdiagramm ist zu erkennen, dass jede der Möglichkeiten zweimal gezählt wurde. Deshalb muss das Produkt der Möglichkeiten durch zwei geteilt werden. Es gibt nur die drei Möglichkeiten Arne und Bert, Arne und Erik sowie Bert und Erik

Tabelle:

Handlungsfolge	Anzahl der Entscheidungsmöglichkeiten
1. Auswahl des 1. Schülers	3
2. Auswahl des 2. Schülers	2

Mehrfachzählungen: jede Möglichkeit zweimal

Gesamtzahl der Möglichkeiten: $(2 \cdot 3) : 2 = 3$

Die Aufgabe lässt sich auch ohne Baumdiagramme und Zählregeln lösen, indem man sich überlegt, dass ein Schüler übrig bleiben muss, wofür es drei Möglichkeiten gibt.

4.2.3 Hinweise für den Unterricht

In der Primarstufe sollten kombinatorischer Aufgaben nur durch systematisches Probieren gelöst werden. Dabei können auch Baumdiagramme als eine spezielle Methode des systematischen Vorgehens verwendet werden.

Dies setzt allerdings voraus, dass nur solche Aufgaben gestellt werden, bei denen alle Möglichkeiten mit einem vertretbaren Aufwand dargestellt werden können.

Das Bilden von Produkten bei kombinatorischen Problemstellungen ist eine Operationsvorstellung der Multiplikation. Dies sollte an einfachen Aufgaben exemplarisch behandelt werden, ohne eine Verallgemeinerung zur Produktregel der Kombinatorik vorzunehmen. Dazu sind dann auch Überlegungen zur Unabhängigkeit der einzelnen Handlungen und zu Mehrfachzählungen erforderlich, die in der Primarstufe nur als Zusatz thematisiert werden sollten.