

3.3 Entwicklung einer inhalts- und bereichsunabhängigen Klassifizierung von Schülerantworten für die Vergleichsarbeiten in M/V

Die Vergleichsarbeiten in Mecklenburg-Vorpommern wurden wie in anderen Bundesländern auch mit dem globalen Ziel geschrieben, Unterricht zu verbessern. Ist das Aufgabenformat vorrangig offen, ergeben sich für die Auswertung der Ergebnisse vielfältige Möglichkeiten. Sollen die Ergebnisse der Vergleichsarbeiten genutzt werden, um zur Entwicklung von Rahmenbedingungen von Schule und Unterricht beizutragen (siehe Kapitel 2.2.3.) sind statistische Kenngrößen für die Verteilung der richtigen Lösungen bezogen auf Schulen oder Klassen zu berechnen. Diese Parameter sind für Vergleiche von Schulen oder Klassen sinnvoll. In der Vergleichsarbeit wurden Aufgaben mit verschiedenen mathematischen Inhalten gestellt. Ihnen war gemeinsam, dass die Aufgaben von der Aufgabenkommission dem sicheren Wissen und Können, das Schüler besitzen sollten, zugeordnet wurden. Inhalts- und aufgabenabhängige Analysen der Schülerlösungen sind in diesem Falle nicht generalisierbar, da die Aufgaben nicht repräsentativ für ein Stoffgebiet waren oder nach testtheoretischen Kriterien erstellt wurden. Sie entsprachen lediglich typischen, in der Praxis häufig vorkommenden Aufgaben, die den Anspruch an sicheres Wissen und Können repräsentierten. Gesucht wurde daher ein inhalts- und bereichsunspezifisches Modell, das so praktikabel ist, dass die Analysen aller Aufgaben nach dem gleichen Schema ablaufen können. Da konkrete Schlussfolgerungen für den Unterricht in M/V gezogen werden sollten, durften die Auswertungen einerseits nicht auf so einem verallgemeinerten Niveau stattfinden, dass keine Aussagen mehr über die konkreten mathematischen Inhalte abgeleitet werden können. Andererseits sollte das allgemeine Schema, dem die Auswertungen folgen, von Lehrern nachvollziehbar und auf eigene Aufgaben aus Tests oder Klausuren übertragbar sein.

Die Originalantworten der Schüler waren in eine SPSS-Datei übertragen und für die entsprechenden Teilhandlungen in separate Spalten eingetragen worden. So können sie auch nachträglich so miteinander verknüpft werden, dass die gesamte Aufgabenbearbeitung eines Schülers nachvollziehbar bleibt. Dieses Vorgehen hatte sich bei den Auswertungen der Arbeiten 1999-2001 ebenso bewährt wie die Möglichkeiten, die Kreuztabellen für nachträgliche Analysen in der Grundgesamtheit eröffnen.

Da die Anforderungen der Vergleichsarbeiten stets im Lösen von Aufgaben bestanden und wir uns an dem vom Schüler zu durchlaufenden Prozess des Aufgabenlöses orientieren wollten, erschien uns das Modell von

Sommer als eine gute Grundlage für die Antwortanalysen. Es sollte jedoch um die 5. Phase, die Rückkopplung, erweitert werden. Die 0. Phase ist irrelevant, da die Problemstellungen jeweils gegeben waren. Die für die Aufgabenbearbeitung notwendigen Informationen, die aus dem Langzeitgedächtnis abgerufen werden müssen, beziehen sich auf verschiedenen Strukturen im Gedächtnis. Sommer ordnet unter anderem syntaktisches, semantisches und pragmatisches Wissen den einzelnen Prozessen der Informationsverarbeitung zu. Unseres Erachtens sind diese die Hauptinformationen, aber nicht alle Voraussetzungen zur erfolgreichen Bearbeitung der Aufgabenphase. Diese Informationen sind umgekehrt bei fehlerhafter Bearbeitung der Phase auch nicht die einzigen, auf deren Fehlen ursächlich geschlossen werden könnte. Vielmehr erscheint es uns so, dass in den meisten Phasen des Lösungsprozesses mehrere Informationen gleichzeitig abgerufen werden und in Wechselwirkung miteinander treten müssen.

Die fünf Fehlertypen von Schmassmann beinhalten auch die Fehler, die im syntaktischen, semantischen und pragmatische Wissen (Sommer) auftreten können, so dass wir diese umfassendere Unterteilung in unser Modell einarbeiten.

Schmassmann unterscheidet zwischen Schnittstellen, Verständnis Begriff, Verständnis Operation, Automatisieren und dem Umsetzen. Der Raster wurde als Hilfe für Schülerbeobachtungen entwickelt. Während einer Beobachtung kann man entscheiden, ob eine Fertigkeit vom Schüler automatisiert wurde oder nicht. Liegen nur die schriftlichen, unkommentierten Ergebnisse der Vergleichsarbeit vor, kann man den Grad der Beherrschung einer Fertigkeit nicht einschätzen. Man sieht nur, wo eventuell Fehler bei der Ausführung auftraten. Daher übernehmen wir diese Trennung in Verständnis Operation und Automatisieren nicht und nennen diese syntaktisch-algorithmische Struktur „Fertigkeiten“. Während des Lösungsprozesses einer Aufgabe müssen Schüler neben der Anwendung ihrer semantisch-begrifflichen und syntaktisch-algorithmischen Kompetenzen häufig Problemlösestrategien anwenden und werden durch psychologische Prozesse der Handlungsregulation und eventuell durch Hemmungen bei der Wahrnehmung, Verarbeitung, Wiedergabe, Notation und dem Transfer von Informationen gesteuert. Da in allen Phasen der Aufgabenbearbeitung Fehler durch diese Prozesse entstehen können, müssen jeweils alle beachtet werden, wenn Fehlerursachen aufgedeckt werden sollen.

Durch Einbeziehung der Modelle von Schmassmann und Sommer entstand das folgende erweiterte Modell, das uns als theoretische Grundlage für die Analyse der Aufgaben und Schülerlösungen sowie für die Bildung von Antwortgruppen für alle Aufgaben diene.

Tabelle 3.2: Modell zur Analyse von Aufgaben und Schülerlösungen

Phasen des Lösungsprozesses	Prozesse der Informationsverarbeitung
Aufnehmen der Aufgabeninformation	Perzeptuelle Analyseprozesse und Kodierung
	Wort- und Symbolidentifikation
	Syntaktische Analyse der Symbolketten und Wörter
Verstehen der Aufgabe	Semantische Analyse des begrifflichen Inhalts
Erfassen der Aufgabenanforderung, Aufbau einer Lösungsidee	Pragmatische Analyse des Aufgabenthemas, Aufstellung eines Lösungsansatzes
Ausführen des Lösungsalgorithmus	Aufbau der Lösungsprozedur, Abarbeitung der Lösungsschritte
Rückkopplung	Einordnung der Lösung in das Ergebnis der Analyse des Aufgabeninhalts
	Vergleich der Lösung mit dem Ergebnis der Analyse der Aufgabenanforderung

In *jeder Phase* des Lösungsprozesse zu erfüllende Voraussetzungen und notwendige geistige und praktische Schülertätigkeiten

- Semantisch-begrifflich
 - mathematische Begriffe
 - außermathematische Begriffe
- syntaktisch-algorithmisch
 - mathematische Fertigkeiten (Kompetenzen)
 - außermathematische Fertigkeiten (Kompetenzen)
- Problemlösestrategien
 - heuristische Verfahren
 - Strategien bei Unkenntnis
 - Strategien der Schwierigkeitsminimierung
- psychologische Prozesse der Handlungsregulation
- Wahrnehmungsprozesse

Für die Vergleichsarbeiten von 1999 bis 2001 wurden nachträglich Antwortgruppen für jede Aufgabe konstruiert. Das war ein Prozess, der in den folgenden Schritten ablief (vgl. erste Schrittfolge S. 156)

1 Analyse der Anforderungen an die Schüler bei der Aufgabenbearbeitung

- 1.1 Analyse der Anforderungen der Aufgabe
- 1.2 Unterteilung der Aufgabenbearbeitung in Phasen des Lösungsprozesses und Prozesse der Informationsverarbeitung sowie Ermittlung der zur Bearbeitung notwendigen Voraussetzungen und geistigen und praktischen Schülertätigkeiten für jede Phase
- 1.3 Schlussfolgerungen auf theoretisch mögliche Fehler, Kennzeichnung von Problemzonen, Vorwegnahme möglicher Ergebnisse, die bei Ausführung fehlerhafter Strategien auftreten können

Die Ergebnisse der Analyse der Aufgabenanforderungen lagen bereits durch das Auswertungsgremium vor. Erweitert wurden diese groben Analysen dadurch, dass den Phasen des Lösungsprozesses einer Aufgabe folgend die wichtigsten Voraussetzungen, besonders die notwendigen Begriffe, Fertigkeiten und Problemlösestrategien für die Bewältigung der jeweiligen Phase ermittelt wurden. Während der Analyse der vom Schüler zu beherrschenden Begriffe und seiner zur Aufgabenbearbeitung notwendigen Handlungen wurden die richtigen Antworten und die Antworten, die sich aus möglichen Fehlern ergaben, theoretisch konstruiert. Während der Arbeit kristallisierten sich häufige Fehlerursachen heraus, die verallgemeinert werden konnten. Typische Fehler, die aus der Literatur bekannt sind und bei den Analysen auftraten, wurden in einer Übersicht (s. S. 173) den Phasen der Aufgabenbearbeitung zugeordnet. Diese Strukturen bilden das theoretische Gerüst der Antwortgruppen.

2 Analyse der realen Schülerlösungen

2.1 Übernahme der Spalten der SPSS-Datei

Bei komplexen Aufgaben waren in der Datei der Originalantworten der Schüler mehrere Spalten angelegt. Sie orientierten sich auch an den Phasen des Lösungsprozesses, vorrangig aber an den Vorgaben auf dem Arbeitsblatt. Es konnte nicht jeder Phase eine Spalte zugeordnet werden, da die Schüler viele Phasen durchliefen, ohne sie schriftlich zu dokumentieren. Deshalb sind in der SPSS-Datei stets weniger Spalten mit den Teilantworten der Schüler, die durch das Arbeitsblatt vorgegeben wurden als es Phasen des Lösungsprozesses einer Aufgabe gab.

2.2 Übersicht über alle Schülerantworten und die Häufigkeit ihres Auftretens bezogen auf eine Spalte der SPSS-Datei

Die Schritte 2.1. und 2.2. wurden aus den Vorarbeiten des Auswertungsgremiums übernommen. Vorrangig die verbleibenden fehlerhaften Schüleräußerungen wurden im nächsten Schritt gesondert betrachtet.

3 Bilden von Zuordnungen zwischen den fehlerhaften Schülerantworten und den theoretischen Konstrukten.

Aus dem Abgleich der auftretenden Lösungen der Schüler und der theoretischen Konstrukte ergaben sich häufig schon die Ursachen fehlerhafter Lösungen oder Strategien. Manchmal gab es jedoch mehrere verschiedene Schülerlösungen, die einem theoretischen Konstrukt zugeordnet werden konnten, wobei auch der umgekehrte Fall auftrat. Kreuztabellen, die den Zusammenhang zwischen Aufgabenteilen herstellten, waren dann eine Hilfe bei der Bestimmung von Ursachen für bestimmte Fehler.

4 Bilden von Antwortgruppen.

Es gab fehlerhafte Schülerlösungen, die sich in gleichen Erscheinungen äußerten. Diese mussten einer Antwortgruppe zugeordnet werden, auch wenn es verschiedene Ursachen gab, die zu dieser Erscheinung geführt haben könnten. Andere fehlerhafte Schülerlösungen unterschieden sich in der Erscheinung, waren aber auf gleiche Ursachen zurückzuführen. Sie wurden zu einer Antwortgruppe zusammengefasst. Kreuztabellen konnten helfen, mehr Sicherheit bei der Zuordnung der Antworten zu bestimmten Ursachen zu erhalten. Es wurde stets darauf geachtet, dass es pro Aufgabe nicht mehr als 15 Antwortgruppen gab, da sonst weiterführende Analysen zu unübersichtlich würden.

Jede Schülerlösung wurde in genau eine Antwortgruppe eingeordnet. Wenn Schüleräußerungen sehr selten auftraten, wurden diese Antworten unter „sonstigen“ zusammengefasst.

Die Erarbeitung der Antwortgruppen ging einher mit der Sichtung psychologischer und fachdidaktischer Literatur. Dabei kristallisierten sich häufige Fehlerursachen heraus, die einzelnen Phasen der Aufgabenbearbeitung zugeordnet werden können. Die folgende Übersicht war hilfreich bei der Suche nach Fehlerursachen.

Übersicht über mögliche Fehlerursachen bei der Lösung von Aufgaben

Fehler beim Aufnehmen der Aufgabeninformation

1. Hemmungen bei der Wahrnehmung, Verarbeitung, Wiedergabe und dem Transfer von Informationen (äußere, differenzierende, konditionierte, laterale, reziproke, Interferenz durch zeitliche Nähe)
2. Assoziationen durch Nähe und Ähnlichkeit, Vorrangigkeit, Neuheit oder Frische, Häufigkeit und Reihenfolge des Auftretens der Elemente bzw. Anschaulichkeit
3. Schwierigkeiten bei der Analyse von Veranschaulichungen durch Darstellungen und Diagramme
4. falsches Verständnis der Veranschaulichungen oder wörtlichen Formulierungen durch Lese- oder andere Wahrnehmungsschwächen

Fehler beim Verstehen der Aufgabe

1. Fehler bei der semantische Analyse des begrifflichen Inhalts
 - a) Bezüglich der Objektivität
 - Nichtbeachtung eines oder mehrerer wesentlicher Merkmale
 - Einbeziehung von zusätzlichen unwesentlichen Merkmalen durch Assoziationen
 - Fehlende Abstraktion von der Umgangssprache, fehlerhafte Verknüpfungen mit anderen Begriffsinhalten oder ihren sprachlichen Bezeichnungen aufgrund identischer Elemente (negative Interferenz), Ähnlichkeit zu anderen Begriffen
 - Nichterkennen des Wesentlichen und Überlappung mit persönlich Wichtigem in Verbindung mit dem Begriff
 - b) Bezüglich der Allgemeinheit
 - Fehler durch das Gebundensein an sehr spezifische Repräsentanten des Begriffs (fehlende Verallgemeinerung)
 - Fehler durch Nichterkennen eines Sonderfalles
 - Probleme bei Übergängen oder in der Verbindung zwischen Einzelem, Besonderem, Allgemeinem
 - c) Bezüglich der Systemhaftigkeit
 - Fehlende Verbindungen zwischen Wissensseinheiten aus unterschiedlichen Gebieten
 - Falsche Vorstellungen von Hierarchien

d) Bezüglich der Anschaulichkeit

- Überbewerten der oder Verharren auf der anschaulichen empirischen Ebene
 - Fehlende Vorstellungen der anschaulichen Ebene
 - Nichtbeachtung vielfacher Bestimmungen eines Begriffs
2. Fehler aufgrund von Hemmungen (konnektive, proaktive, reaktive, reproduktive, retroaktive, affektive)
 3. Fehler aufgrund einer Perseveration: Verharren auf und Wiederauftauchen von bestimmten Gedächtnisinhalten.

Fehler beim Erfassen der Aufgabenanforderungen:

1. Fehlerhafte Erfassung der Zielsituation
2. Unvollständige Analyse der Aufgabenbedingungen

Fehler bei der Erfassung der Zielsituation und der Analyse der Aufgabenbedingungen sind ähnlich und bedingen sich häufig.

- Analyse ohne Berücksichtigung der Fragestellung (auffällige Merkmale werden nach zufälligen Gesichtspunkten verbunden)
 - Unvollständiges Abstrahieren auf der Grundlage von Aufgaben- und Situationsbedingungen
 - Unvollständiges Abstrahieren auf der Grundlage von Analogien zu Aufgaben, die im Gedächtnis behalten worden sind
 - unvollständige Analyse aufgrund von Einstellungen, die sich nicht auf das Erkennen von objektiven Zusammenhängen, sondern auf Erfahrungen, die zu Erfolgserlebnissen führen, beziehen
 - ungenügend entwickelte Fähigkeiten der Bedingungsanalyse und der Umsetzung in mathematische Strukturen (Skizzen, Tabellen..)
 - Nichtbeachtung einer oder mehrerer Bedingungen oder Einbeziehung von zusätzlichen assoziierten Bedingungen
3. Fehler durch das Gebundensein an sehr bereichsspezifische Fertigkeiten
Bedingungen werden variiert oder modifiziert, damit die gewünschte Handlung ausgeführt werden kann

Fehler beim Aufbau einer Lösungsidee und Aufstellen eines Lösungsplanes:

1. Durch fehlerhafte Erfassung der Ziel- oder Ausgangssituation wird ein falsches mathematisches Modell entwickelt und falsche Operatoren ausgewählt.

2. Fehler bei der Neustrukturierung der Beziehungen zwischen den Informationen führen zur Auswahl falscher oder keiner Operatoren, obwohl Ziel- und Ausgangssituation richtig analysiert wurden.
 - Analyse der sprachlicher Formulierungen der Aufgabenstellung führe nicht zu entsprechenden neuen Beziehung der mathematischen Objekte.
 - Verknüpfungen im semantischen Netz des Gedächtnis sind nicht mit Verknüpfungen im gegebenen Sachverhalt der Aufgabe adäquat
 - Verminderte Verfügbarkeit oder Verwendbarkeit von deklarativem oder prozeduralem Wissen aufgrund situativer Faktoren und der Konsequenzen (Fixierungen von Merkmalen eines Begriffs oder Operatoren oder Operatorenkombinationen)
 - Einstellungseffekte: aufgrund früherer Erfahrungen werden bestimmte Operatoren bevorzugt.
 - Funktionale Fixierung: Objekte werden in ihrer üblichen Problemlösefunktion und nicht auf neue, dem Problem angemessene Art repräsentiert
 - Unkenntnis heuristischer oder anderer Regeln
3. Manipulieren mit Zahlen oder Objekten, wenn eine Bedingungsanalyse keine ausreichenden Ergebnisse brachte. (Erfahrungen, die im Unterricht zum Erfolg führten, werden ausgenutzt)

Fehler beim Ausführen des Lösungsplanes, d. h. Aufbau der Lösungsprozedur und Abarbeitung der Lösungsschritte

1. Ein richtiges mathematisches Modell wurde entwickelt.
 - a) Fehlerursachen aufgrund fehlerhafter Anwendung vorhandenen prozeduralen Wissens
fehlerhafte Ausführung einer Regel durch
 - falsche Assoziationen während der Handlung
 - Perseverationserscheinungen
 - Motorische Probleme
 - fehlende oder unvollständige Arbeitsmittel
 - b) Fehlerursachen aufgrund der Anwendung unvollständig vorhandenen prozeduralen Wissens
 - Nichtbeachtung formaler Regeln oder Anforderungen bei inhaltlicher Richtigkeit
 - Anwendung alternativer, vereinfachter Regeln, die nicht vollständig richtig sind

- Nur teilweise Ausführung einer Regel, weil keine Verkürzung und Automatisierung stattgefunden hat, so dass die Prozedur stets von Anfang an bewusst neu aufgebaut werden muss,
Verkürzung und Automatisierung zwar vollzogen, aber die Regel lange nicht geübt wurde, sodass nur noch einzelne Teile der Handlung, jedoch nicht ihr chronologischer, unbewusster Ablauf abrufbereit sind,
Fehler durch unvollständige Aneignung von Lösungsalgorithmen mit mehreren Entscheidungsstellen im Falle seltener Alternativen auftreten,
Fehler beim Wechsel von inhaltlicher und formaler Betrachtungsweise an Entscheidungsstellen auftreten.
 - c) Fehler durch Anwendung Erfolg versprechender Methoden bei fehlendem prozeduralem Faktenwissen (Unkenntnis einer Regel)
 - Fehler durch Probieren
 - Fehler durch Anwendung von Regeln, die bei ähnlichen Aufgaben zum Erfolg geführt haben
 - Inhaltliche Beschreibung der Gedanken aufgrund von Alltagswissen
 - Entwicklung eigener „Behelfsregeln“ durch Analyse der Bedingungen
 - d) Fehler aufgrund fehlender Mechanismen der Handlungsregulation
 - Ein Algorithmus wird nicht als objektiv angesehen, sondern dient subjektiven Zweckgründen (Einfügen von Nullen, um zu einem Ergebnis zu kommen)
 - Unkorrekte, unvollständige Ausführung einer Regel oder Abbruch der Handlung durch fehlende Motivation, Aufmerksamkeit, Konzentration, Ausdauer oder Sorgfalt
 - ungenaue oder unordentliche Ausführung der Handlung
 - Nutzung eines vereinfachten Algorithmus zur Schwierigkeitsreduktion
2. Ein falsches mathematisches Modell wurde entwickelt und falsch bearbeitet (s. o.) oder richtig bearbeitet

Fehler bei der Rückkopplung

Einordnung der Lösung in das Ergebnis der Analyse des Aufgabeninhalts

- Das mathematische Modell und die Sachstruktur stimmen nicht überein, das mathematische Ergebnis des falschen Modells wird der Sachstruktur folgerichtig, aber falsch zugeordnet.
- Das mathematische Modell und die Sachstruktur stimmen überein, aber das richtige mathematische Ergebnis wird falsch zugeordnet.
- Das mathematische Modell und die Sachstruktur stimmen überein, Zwischenergebnisse oder zusätzlich berechnete Werte werden als Endergebnisse angegeben.
- Das mathematische Modell und die Sachstruktur stimmen überein, falsche Ergebnisse aus Phase 2 werden richtig zugeordnet.
- Kein Antwortsatz, obwohl die anderen Phasen durchlaufen wurden.

Vergleich der Lösung mit dem Ergebnis der Analyse der Aufgabenanforderung

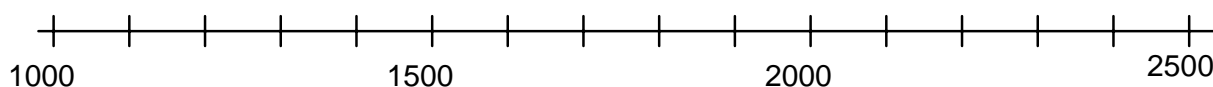
- Richtiges Ergebnis ermittelt, aber nicht in den Antwortsatz eingetragen
- Falsches Ergebnis ermittelt und nicht in den Antwortsatz eingetragen
- Falsches Ergebnis ermittelt aber richtig in den Antwortsatz eingetragen

3.4 Anwendung der Auswertungsmethode auf eine ausgewählte Aufgabe

8. Aufgabe, 7. Klasse, 1999

Die Differenz zweier Zahlen beträgt 800. Auf dem Zahlenstrahl liegen sie gleich weit von 1700 entfernt.

a) Veranschauliche diesen Sachverhalt in der Abbildung.



b) Wie heißen diese Zahlen?

_____ und _____.

Diese Aufgabe hatte zusammen mit einer Sachaufgabe die schlechtesten Erfüllungsquoten der Vergleichsarbeit 1999 (vgl. Tab. 3.3), die weit von dem entfernt sind, was wir unter sicherem Wissen und Können verstehen.

Tabelle 3.3: Richtige Ergebnisse zu Aufgabe 8 der Arbeit 7/99 (in %)

	Schüler			Schulen				
	RS	HS	alle	Min.	25. P.	Med.	75. P.	Max.
1. Zahl (1300) richtig	21,2	11,3	17,8	0,0	9,4	16,2	25,2	43,8
2. Zahl (2100) richtig	19,4	10,3	17,8	0,0	9,3	13,3	25,3	40,0
Beide Zahlen richtig			14,6	0,0	7,2	13,2	21,9	33,3

Bei einer Pilotierung des Testes wäre diese Aufgabe sicher heraus gefallen. Die folgende erneute Analyse der Schülerantworten nach unserer Auswertungsmethode führt aber zu zahlreichen interessanten Ergebnissen und Hypothesen für weitere didaktische Forschungen. Die pauschale Schlussfolgerung in dem Auswertungsbericht zu den Vergleichsarbeiten CD: Bericht_Vergleichsarbeiten_MV_99_00.pdf), dass „in allen Klassenstufen wesentlich intensiver mit einem Zahlenstrahl und einer Zahlengerade gear-

beitet werden muss“ (S. 42), lässt sich nach dieser Analyse nicht mehr aufrechterhalten.

1. Analyse der Anforderungen an die Schüler bei der Aufgabenbearbeitung

1.1. Analyse der Anforderungen der Aufgabe

Die Anforderungen der 8. Aufgabe der Arbeit 7/99 wurden in der Broschüre (CD: /Bericht_Vergleichsarbeiten_MV_99_00.pdf, S. 40) folgendermaßen beschrieben:

- Analyse des vorgelegten Aufgabentextes
- Erkennen von zwei unterschiedlichen Bedingungen, die zwei gesuchte Zahlen miteinander verknüpfen
- Erkennen des operationalen Charakters der einen und des Relationscharakters der anderen Bedingung
- Beherrschung des Differenzbegriffes auch in graphischer Interpretation
- Gleichzeitiges Beachten sowie graphisches Umsetzen der beiden erkannten Bedingungen
- Anschauliches Denken

1.2. Unterteilung der Aufgabenbearbeitung in Phasen des Lösungsprozesses und Prozesse der Informationsverarbeitung sowie Ermittlung der zur Bearbeitung notwendigen Voraussetzungen und geistigen und praktischen Schülertätigkeiten für jede Phase

Tabelle 3.4: Unterteilung der Aufgabenbearbeitung in Phasen und Erfassen der Anforderungen:

Phasen des Lösungsprozesses	Prozesse der Informationsverarbeitung	Hauptinformationen/ Voraussetzungen/Anforderungen
Aufnehmen der Aufgabeninformation	Perzeptuelle Analyseprozesse	
	Wort- und Symbolidentifikation: Wahrnehmung des Textes und der Zeichnung in der Aufgabenstellung	Lesen des Textes Adäquate Wahrnehmung des Zahlenstrahls
	Syntaktische Analyse der Symbolketten und Wörter: Lesen der Aufgabenstellung, wesentliche Wörter finden	Wesentliche Wörter in der Aufgabenstellung: Differenz zweier Zahlen, gleich weit von 1700 entfernt, Zahlenstrahl

Phasen des Lösungsprozesses	Prozesse der Informationsverarbeitung	Hauptinformationen/ Voraussetzungen/ Anforderungen
Verstehen der Aufgabe	<p>Semantische Analyse des begrifflichen Inhalts:</p> <p>Den wesentlichen Wörtern der Aufgabenstellung werden Begriffe zugeordnet, Aktivieren der kognitiven Schemata</p>	<p>Aktivieren des Differenzbegriffes auch in grafischer Interpretation, Erkennen des Relationscharakters der Zahl 800, Vorstellungen von 2 Zahlen entwickeln, deren Differenz 800 beträgt. Erkennen, dass die Lage des Zahlenpaares bei konstanter Differenz beliebig ist.</p> <p>Erkennen des operationalen Charakters der Zahl 1700 als feste Zahl zwischen zwei beweglichen Zahlen.</p> <p>Übertragung des umgangssprachlichen Ausdrucks „gleich weit von ... entfernt“ in Vorstellungen von 2 Zahlen, in deren Mitte es eine dritte Zahl gibt oder von Zahlen, die rechts und links einer Zahl in gleichem Abstand konstruiert werden.</p>
Erfassen der Aufgabenanforderung, Aufbau einer Lösungsidee	Pragmatische Analyse des Aufgabenthemas, Aufstellung eines Lösungsansatzes	<p>Erkennen und Verstehen, dass drei unterschiedliche Bedingungen gegeben sind, die die zwei gesuchten Zahlen gleichzeitig erfüllen sollen, daher müssen die drei Vorstellungen, die den Bedingungen einzeln zugeordnet worden sind, in einer bestimmten Reihenfolge zusammengeführt werden.</p> <p>Beachten, dass Nutzung des Zahlenstrahls verlangt ist.</p>
Ausführen des Lösungsalgorithmus	Aufbau der Lösungsprozedur, Abarbeitung der Lösungsschritte	Mehrere Prozeduren sind möglich: z.B.: 1700 markieren, die gedachte Differenz (Streifen) von 800 so lange in Gedanken

Phasen des Lösungsprozesses	Prozesse der Informationsverarbeitung	Hauptinformationen/ Voraussetzungen/Anforderungen
		verschieben bis 1700 in der Mitte des Streifens liegt oder Übersetzung der Bedingungen in 2 Rechenoperationen (800:2 und 1700+ 400 bzw. 1700-400) oder 1700 markieren und 400 nach rechts und links abzählen
Rückkopplung	Einordnung der Lösung in das Ergebnis der Analyse des Aufgabeninhalts	Abrufen aller Bedingungen für die 2 Zahlen: Haben die Zahlen die geforderten Merkmale?
	Lösung mit dem Ergebnis der Analyse der Aufgabenanforderung vergleichen	Vergleich der Lösung mit der Aufgabenstellung. Wurde der Zahlenstrahl genutzt? Wurden die Leerstellen ausgefüllt?

1.3. Schlussfolgerungen auf theoretisch mögliche Fehler, Kennzeichnung von Problemzonen, Vorwegnahme möglicher Ergebnisse, die bei Ausführung fehlerhafter Strategien auftreten können

Hier beginnt die theoretische Konstruktion möglicher Antworten und Antwortgruppen.

Ausgehend von der Analyse der Anforderungen und den Phasen der Aufgabenbearbeitung durch die Schüler sollte es sich in den Antwortgruppen niederschlagen, ob die Bedingungen der Aufgabenstellung richtig analysiert und verarbeitet wurden. Da die Angaben in den zwei ersten Sätzen der Aufgabenstellung von den Schülern zu nacheinander auszuführenden Teilschritten neu verknüpft werden mussten, wurde ein theoretisches Konstrukt entwickelt, das alle Möglichkeiten der Beachtung der 3 Bedingungen enthält. Es wird theoretische Antwortgruppe genannt und enthält drei Stellen (z.B. jnj für: erste Bedingung richtig erkannt, zweite Bedingung nicht erfasst, dritte Bedingung richtig erkannt)

Bei der ersten Stelle interessierte, ob der Fixpunkt 1700 erfasst wurde. An der zweiten Stelle wurde die theoretische Antwortgruppe dann weiter untergliedert nach der Erfüllung der Bedingung „Differenz 800“. Die dritte Stelle stand für die Erfassung der Bedingung „gleich weit von einer Mitte entfernt“. Dadurch ergaben sich 8 Möglichkeiten. Nach der theoretischen

Strukturierung der Aufgabe wurden mögliche Schülerantworten für jeden Fall konstruiert. Diese orientierten sich an den Vorgaben auf dem Arbeitsblatt der Schüler. Es gab nur den Zahlenstrahl und die beiden Leerstellen, in die die Zahlen eingetragen werden mussten. Bei dem Zahlenstrahl bestand das Problem, dass es Schüler geben konnte, die zwar die Bedingungen richtig erfasst hatten, aber dieses nicht durch eine Markierung im Zahlenstrahl demonstrierten. Bei der theoretischen Vorwegnahme der möglichen Eintragungen auf dem Zahlenstrahl wurde die Belegung der betreffenden Stelle mit einem j so gedeutet, dass das Erkennen der Bedingung unabhängig von einer Markierung am Zahlenstrahl möglich war. Auch für die Schüler, die die Bedeutung der Bedingungen zwar erfassten, sie aber nicht markierten, wurden mögliche Antworten konstruiert.

Es ist aus der Tabelle ersichtlich, dass verschiedene Fehlerquellen zu gleichen Antworten führen konnten. Deshalb kann aus einer Schülerantwort nicht immer eindeutig auf die zugrunde liegenden Gedanken des Schülers geschlossen werden.

Tabelle 3.5: Theoretische Konstruktion möglicher Schülerantworten

Theoretische Antwortgruppe	Mögliche Eintragungen auf dem Zahlenstrahl	Mögliche Eintragungen bei der ersten Leerstelle	Mögliche Eintragungen bei der zweiten Leerstelle
jjj	Richtig (1700, 1300 und 2100)	1300	2100
jjn	1700 richtig, 2 falsche Zahlen mit der Differenz 800, die unsymmetrisch zu 1700 liegen	2 falsche Zahlen mit der Differenz 800, unsymmetrisch zu 1700	
	1700 richtig, keine weiteren Zahlen		
	1700 fehlt, aber 2 falsche Zahlen mit der Differenz 800, die unsymmetrisch zu 1700 liegen		
jnj	1700 richtig, aber 2 falsche Zahlen, die gleich weit von 1700 entfernt sind	2 falsche Zahlen, die gleich weit von 1700 entfernt sind, aber nicht die Differenz 800 haben.	
	1700 fehlt, aber 2 falsche Zahlen, die gleich weit von 1700 entfernt sind		

Theoretische Antwortgruppe	Mögliche Eintragungen auf dem Zahlenstrahl	Mögliche Eintragungen bei der ersten Leerstelle	Mögliche Eintragungen bei der zweiten Leerstelle
	1700 richtig, keine weiteren Zahlen, Sonderfall: (1700), 900 und 2500	900	2500
jnn	1700 richtig, keine weiteren Eintragungen	Nur 1700 oder 1700 mit falscher Zahl oder 2 falschen Zahlen, die nicht den Abstand 400 von 1700 bzw. 800 voneinander haben,	
	1700 richtig und falsche Zahlen		
Kein Eintrag			
njj	2 Zahlen, deren Differenz richtig ist und die gleichen Abstand von einer falschen Mitte haben, wobei die falsche Mitte eingetragen sein kann oder nicht.	2 Zahlen, deren Differenz richtig ist und die gleichen Abstand von einer falschen Mitte haben.	
njn	2 Zahlen mit der Differenz 800 ohne Mitte	2 Zahlen, deren Differenz richtig ist und die ungleichen Abstand von falscher Mitte haben.	
	Falsche Mitte und 2 Zahlen, deren Differenz richtig ist und die ungleichen Abstand von falscher Mitte haben.		
nnj	Falsche Mitte und 2 Zahlen, deren Differenz falsch ist und die gleichen Abstand von der falschen Mitte haben.	2 Zahlen, deren Differenz falsch ist und die gleichen Abstand von einer falschen Mitte haben.	
	2 Zahlen, deren Differenz falsch ist und die gleichen Abstand von einer falschen nicht markierten Mitte haben.		
nnn	Falsche Zahlen oder keine Zahlen	falsche Zahlen oder kein Eintrag	

2. Analyse der realen Schülerlösungen

2.1. Übernahme der Spalten der SPSS-Datei

Die Auswertung der Aufgabe konnte sich nicht vordergründig an den Phasen der Aufgabenbearbeitung orientieren, sondern an den Vorgaben auf dem Arbeitsblatt, so dass sich die Unterteilung in die 3 Spalten der SPSS-Datei ergab:

8a – Eintragung auf dem Zahlenstrahl,

8b – erste Zahl im Antwortsatz

8c – zweite Zahl im Antwortsatz.

Wie bei anderen Aufgaben auch wurde erst bei der Auswertung deutlich, dass es vorteilhaft gewesen wäre, den Schülern mehr Platz auf dem Arbeitsblatt zu lassen, um eigene Lösungswege aufzuschreiben.

2.2. Übersicht über alle Schülerantworten

Die Übersicht über alle Schülerantworten kann an dieser Stelle nicht gegeben werden, da es 70, 85 bzw. 92 verschiedene Lösungen für 8a, 8b bzw. 8c gab. Als richtig wurden die Eintragungen in den Zahlenstrahl nur gewertet, wenn Markierungen bei den Zahlen 1700, 1300 und 2100 zu sehen waren. Nur 4,32 % aller Schüler haben richtige Einträge vorgenommen. Die erste Zahl wurde nur als richtig angesehen, wenn sie 1300 lautete, obwohl auch 2100 inhaltlich richtig wäre. Für die zweite Zahl wurde 2100 erwartet und als richtig angesehen. Nur 17,1 % bzw. 15,8 % haben die Zahlen richtig eingetragen. Es gab keine Schüler, die die richtigen Zahlen in umgekehrter Reihenfolge in den Antwortsatz geschrieben haben, womit sich eine Diskussion über die Reihenfolge erübrigt.

3. Bilden von Zuordnungen zwischen den fehlerhaften Schülerantworten und den theoretischen Konstrukten

Unsere Erfahrungen haben gezeigt, dass die Fantasie eines ganzen Forscherteams nicht ausreicht, um die Vielfalt der Schülerantworten bereits beim Entwerfen, Lesen oder selbst beim Analysieren der Aufgaben vorwegzunehmen. Deshalb ist es interessant, die Schülerantworten aufzulisten und ihnen die möglichen theoretischen Konstrukte zuzuordnen. Allerdings zeigte sich in diesem Prozess auch bei anderen Aufgaben, dass Schülerantworten oder theoretische Konstrukte nicht belegt waren.

4. Bilden von Antwortgruppen

Die realen Antwortgruppen entstanden durch den Vergleich der Schülerantworten und ihrer Häufigkeit mit den theoretisch konstruierten Antwortgruppen. Welche Folgen dieser ständige Abgleich auf die Konstruktion der realen Antwortgruppen hatte und welche Aussagekraft Antwortgruppen dadurch besitzen, soll kurz am Beispiel der Eintragungen in den Zahlenstrahl (8a) dargestellt werden.

Zuerst wurden aus allen Schülerantworten die richtigen und fehlenden gesucht und ihnen die realen Antwortgruppen zugeordnet.

Die erste theoretische Antwortgruppe (jjj) konnte als reale Antwortgruppe „richtig“ übernommen werden. Die fehlenden Schülerantworten in diesem Aufgabenteil wurden unterschieden in „kein Eintrag auf dem Zahlenstrahl“ und „Ganze Aufgabe nicht bearbeitet“. Die Häufigkeit von 50% für „kein Eintrag auf dem Zahlenstrahl“ lässt vermuten, dass die Schüler keine Eintragungen vornahmen, obwohl bestimmte Denkvorgänge abliefen. Das können Kreuztabellen später klären.

Nun wurden die Schülerantworten nach bestimmten Häufungen untersucht.

Es fiel auf, dass die meisten Eintragungen auf dem Zahlenstrahl nur die 1700 betrafen. Deshalb entstand die erste Antwortgruppe aufgrund der großen Häufigkeit und wurde „1700, keine weiteren Eintragungen“ genannt. Aus dieser Markierung lässt sich zwar mit großer Wahrscheinlichkeit darauf schließen, dass die Schüler die Bedeutung der Zahl 1700 erfasst haben, die Ursachen für das Fehlen der beiden anderen Markierungen könnten jedoch sowohl in dem Unvermögen gelegen haben, die zweite und/oder dritte Bedingung umzusetzen (jnj, jjn, jnn) oder darin, dass Schüler weitere Markierungen als überflüssig empfanden, da sie nicht ausdrücklich verlangt waren (jjj). Gleiche Ursachen könnten auch die Markierung von „1300 und 1700 oder 1700 und 2100“ bewirkt haben. Diese Antwortgruppe war bei dem theoretischen Konstrukt nicht bedacht worden. Bei der Auswertung der Schülerantworten trat sie jedoch auf, so dass diese Gruppe Beachtung fand. Es wird angenommen, dass die Schüler, die 2 richtige Zahlen eingetragen haben, den Sachverhalt verstanden haben. Diese Erfahrung lehrte die auswertenden Personen, dass nicht – wie angenommen – immer beide gesuchte Zahlen eingetragen wurden, sondern von den Schülern eine Zahl als ausreichend empfunden werden konnte.

Die Antwortgruppe „1700 und die Zahl 800 eingetragen“, die mit 6,5 % der Eintragungen recht häufig auftrat, war auch nicht Bestandteil der theoretischen Konstrukte und lässt vermuten, dass die Schüler beide in der Aufgabe vorkommenden Zahlen markierten, ohne die gegebenen Bedingungen

und das Ziel der Aufgabe richtig zu analysieren. Die Antwortgruppe „1700, 800 und falsche Zahl(en)“ deutet darauf hin, dass diese Schüler die Bedeutung der Zahl 800 als Differenz ebenfalls nicht erfasst hatten und damit weitere falsche Zahlen erzeugten oder dass sie aus Gewohnheit alle gegebenen Zahlen markierten, bevor sie die semantische Analyse des Textes begannen. Die Ergebnisse, die zur Antwortgruppe „1700 und Zahlen, die einer Bedingung genügen“ zusammengefasst wurden, beinhalten alle Markierungen, die vermuten lassen, dass die Schüler zwar die Bedeutung von 1700 als Mitte und 800 als Differenz und nicht als abzutragende Zahl erkannten, aber nicht beide weiteren Bedingungen im Zusammenhang umsetzten (jjn, jnj, jnn).

Es waren nur wenige Schüler, die Markierungen vornahmen, die die 1700 nicht enthielten. Deshalb wurden die theoretischen Antwortgruppen njn und njj zusammengefasst zu der realen Antwortgruppe „Differenz richtig bei falscher / fehlender Mitte“. Der Sonderfall „900 und 2500 (Abstand 800 von 1700)“ kam etwas häufiger vor und wurde deshalb separat aufgenommen. Unter den Markierungen, die auf die Nichtbeachtung aller Bedingungen schließen lassen, fielen diejenigen auf, bei denen die Schüler nur den Zahlenstrahl beschrifteten. Falsche Einträge, die keiner theoretischen Antwortgruppe zugeordnet werden konnten, wurden zu „Falsche Einträge ohne Deutungsmöglichkeit“ zusammengefasst.

Tabelle 3.6: Antwortgruppen zu 8a (Eintragung auf Zahlenstrahl)

Antwortgruppen zu 8a	Prozent
Richtig (1700, 1300 und 2100)	4,3
1700 enthalten:	24,0
1700, keine weiteren Eintragungen	14,1
1300 und 1700 oder 1700 und 2100	0,8
1700 und Zahlen, die einer Bedingung genügen	2,3
1700 und 800	6,3
1700, 800 und falsche Zahl(en)	0,5
1700 nicht enthalten, aber mindestens eine Bedingung erfasst:	1,3
Differenz richtig bei falscher / fehlender Mitte	0,5
900 und 2500 (Abstand 800 von 1700)	0,8
Keine Bedingung beachtet:	4,8
800 und evtl. falsche Zahl(en)	0,9
nur Zahlenstrahl beschriftet	2,0
Falsche Einträge ohne Deutungsmöglichkeit	1,9
kein Eintrag auf dem Zahlenstrahl	50,0
Ganze Aufgabe nicht bearbeitet	13,0

Schlussfolgerungen aus den Antwortgruppen und offene Fragen

Die mit 50 % häufigste Antwortgruppe ist „kein Eintrag auf dem Zahlenstrahl“. Man könnte mangelhaftes Vermögen der Schüler beim Umgang mit dem Zahlenstrahl vermuten. Es ist über Kreuztabellen zu klären, welcher Anteil dieser Schüler welche Zahlen in den Antwortsatz schrieb. Außerdem soll der Frage nachgegangen werden, warum so viele Schüler die Aufgabe ohne die vorgegebene Veranschaulichung bearbeiteten.

14,1 % der Schüler markierten die Zahl 1700. Man kann davon ausgehen, dass diese Schüler erkannt haben, dass diese Zahl einen operativen Charakter hat, den die Zahl 800 nicht aufweist. 13,0 % der Schüler bearbeiteten die ganze Aufgabe nicht, was für den Schwierigkeitsgrad der Aufgabe kein hoher Prozentsatz ist.

Nur 4,8 % der Schüler bewiesen durch ihre Markierungen auf dem Zahlenstrahl, dass sie keine der drei Bedingungen richtig veranschaulichen konnten, während die restlichen Schüler wenigstens eine oder zwei Bedingungen berücksichtigten.

Antwortgruppen zu den Aufgabenteile 8b und 8c

Aus den theoretischen Überlegungen zu den Antwortgruppen wurde ersichtlich, dass nur zwei Eintragungen der Schüler für die erste bzw. zweite Zahl eindeutig auf die Gedankengänge der Schüler verweisen. Das sind die richtigen Eintragungen 1300 bzw. 2100 und die Zahlen mit dem Abstand 800 von 1700, also 900 bzw. 2500. Besonders häufig, aber ausgehend von den theoretischen Überlegungen nicht erwartet, wurden die Zahlen 1000 und 800 in das erste Leerzeichen geschrieben. Da auch einige Schüler die Zahl 800 markiert haben und sie die kleinere der zwei im Text gegebenen Zahlen ist, kann man vermuten, dass einige Schüler diese in den Antwortsatz schrieben. Rätsel gab jedoch die Häufung der Zahl 1000 auf. Natürlich kann sie durch Rechenfehler ebenso wie die Zahl 800 entstanden sein bei der Rechnung $1700 - 800$. Aber fast 10 % der Schüler können sich wohl nicht verrechnen. Bei der Betrachtung des vorgegebenen Strahls fiel auf, dass die erste eingetragene Zahl die 1000 war und schräg über dem Leerzeichen stand. Sollten die Schüler diese Zahl einfach übernommen haben, da sie die Aufgabenstellung nicht verstanden haben? Die Zahlen 400 und 1700 hatten noch Häufigkeiten, die die Bildung einer Fehlergruppe zuließen, aber die anderen falschen Zahlen konnten nicht einzeln analysiert werden, da sie einzeln zu selten auftraten und da sie nur im Zusammenhang sowohl mit dem Zahlenstrahl als auch miteinander gesehen werden müssen. Es ist möglich, diese Zahlen gesondert in Kreuztabellen zu betrachten,

um herauszufinden, ob ein oder zwei der Bedingungen eingehalten wurden. Vorerst wurden sie zu einer Antwortgruppe zusammengefasst. Auch alle wörtlichen Beschreibungen wie „ganze Zahlen“ oder „natürliche Zahlen“ oder „Hunderter“, die darauf verweisen, dass die Schüler über die Antwort auf die Frage, wie diese Zahlen heißen, nachgedacht haben, wurden zu einer Antwortgruppe zusammengefasst. Durch die freien Antworten der Schüler wurden Gedankengänge der Schüler offenbar, die von den auswertenden Personen nicht oder nicht in dieser Häufung vermutet wurden. Wäre diese Aufgabe als Multiple-Choice-Aufgabe gestellt worden, wäre wohl niemand auf die Idee gekommen, die Zahl 1000 oder eine Bezeichnung der Zahlen zur Wahl zu stellen.

Die Antwortgruppen zu 8c entstanden in Analogie zu den Antwortgruppen 8b und sollen daher nicht näher erläutert werden.

Tabelle 3.7: Antwortgruppen zu 8b (erste Zahl im Antwortsatz)

Antwortgruppen zu 8b	Prozent
Richtig (1300)	17,1
900 (Abstand 800 von 1700)	16,8
1000 (erste vorgegebene Zahl auf dem Strahl)	9,8
800 (gegebene Differenz)	8,8
400 (Abstand)	2,1
1700 (Mitte)	1,9
Andere falsche Zahl (teilweise Markierung entsprechend)	17,3
Beschriftung des Zahlenstrahls abgeschrieben	0,9
wörtliche Beschreibungen	1,3
Falsche Eintragungen ohne Deutungsmöglichkeit	5,9
kein Eintrag in das Feld	5,1
Ganze Aufgabe nicht bearbeitet	13,0
Gesamt	100,0

Tabelle 3.8: Antwortgruppen zu 8c (zweite Zahl im Antwortsatz)

Antwortgruppen zu 8c	Prozent
Richtig (2100)	15,8
2500 (Abstand 800 von 1700)	19,8
1500 (zweite Zahl auf dem Strahl)	6,3
1700 (Mitte)	3,9
900 (Abstand 800 von 1700)	2,1
400 (Entfernung)	1,7
800 (Abstand)	0,8
Andere falsche Zahl (teilweise Markierung entsprechend)	23,6
Beschriftung des Zahlenstrahls abgeschrieben	0,6
Falsche Eintragungen ohne Deutungsmöglichkeit	5,3
wörtliche Beschreibungen	0,9
kein Eintrag in das Feld	6,3
Ganze Aufgabe nicht bearbeitet	13,0
Gesamt	100,0

Zusammenhänge zwischen den Antwortgruppen, Schlussfolgerungen und offene Fragen

Die geringen Erfüllungsprozente richtiger Lösungen aller Aufgabenteile lassen vermuten, dass die Schüler bereits Probleme beim Verständnis der Aufgabenstellung hatten. Nur 16 – 17 % der Schüler haben die richtigen Zahlen in den Antwortsatz geschrieben.

Um Zusammenhänge zwischen den Antworten der Schüler bei den Teilaufgaben zu untersuchen, wurden Kreuztabellen der Antwortgruppen gebildet. Die Tabelle 3.9. enthält die prozentualen Anteile ausgewählter Kombinationen der Antworten zu den Teilaufgaben 8b und 8c. Es werden jeweils die Anteile der Antwortkombinationen an der Antwort zu 8b als auch zu 8c ausgewiesen. Die Tabelle enthält die Fehlergruppen, die für die Auswertung interessant sind. Deshalb ist die Angabe 100 %, die in der letzten Spalte der Tabelle für die Summe der Anteile an der Antwort zu 8b auftritt, nicht die Summe der aufgeführten Prozentsätze.

Tabelle 3.9: Ausschnitt aus der Kreuztabelle 8b (Zahl 1300) * 8c (Zahl 2100), Angaben in Prozent

8b (erste Zahl)		8c (zweite Zahl)					
		2100	1000	1500	1700	2500	gesamt
1300	% von 8b	85,1	0,9		0,5	0,9	100
	% von 8c	92,2	33,3		2,0	0,8	17,1
900	% von 8b	1,4	0,5	0,5	6,0	79,8	100
	% von 8c	1,5	16,7	1,2	26,0	67,7	16,8
1000	% von 8b	1,6	1,6	49,6	1,6	15,7	100
	% von 8c	1,0	33,3	76,8	4,0	7,8	9,8
Gesamt	% von 8b	15,8	0,5	6,3	3,9	19,8	100

Aus der Tabelle ist ersichtlich, dass ein enger Zusammenhang zwischen der ersten und der zweiten eingetragenen Zahl besteht. 85,1 % der Schüler, die als erste Zahl richtig 1300 eintrugen, gaben auch die zweite Zahl richtig an und 92,2 % der Schüler, die als zweite Zahl richtig 2100 angaben, hatte auch bereits die erste Zahl richtig.

Ein Problem bestand für viele Schüler möglicherweise im Erfassen der Aufgabenstellung. Die Antworten 900 bzw. 2500 kamen in ähnlicher Häufigkeit vor wie die richtigen Erfüllungen von 8b und 8c. Man kann annehmen, dass diese Schüler nicht erfasst haben, dass die gesuchten Zahlen den Abstand 800 voneinander und nicht von 1700 haben sollen. Der Zusammenhang zwischen beiden Antworten in der Kreuztabelle zeigt jedoch, dass nur 79,8 % der Schüler, die 900 als erste Zahl benannten, auch 2500 als zweite Zahl wählten, 6 % von ihnen schrieben als zweite Zahl 1700 auf, deren Abstand zur ersten Zahl 900 800 beträgt, jedoch die Bedingung der 1700 als Mitte unbeachtet lässt.

Hätte man den Schülern – wie bei einigen Tests üblich – nur wenige Antwortmöglichkeiten vorgegeben, wäre man sicher nicht auf die Idee gekommen, die 1000 als erste und die 1500 als zweite Zahl auszuwählen. Aus der Häufigkeitstabelle wird jedoch ersichtlich, dass fast 10 % der Schüler die 1000 als erste Zahl aufschrieben. Die Kreuztabelle zeigt, dass rund die Hälfte von ihnen sie mit der zweiten Zahl 1500 und etwa 16 % sie mit 2500 verbanden. Man kann vermuten, dass die entsprechenden Schüler die Aufgabe nicht verstanden haben und nur die Zahlen aufschrieben, die in dem Ausschnitt des vorgegebenen Zahlenstrahls direkt über den Lücken im Antwortsatz bzw. am Anfang und Ende des Strahls stehen. Ohne Schüler zu

zu befragen, bleiben die Ursachen für diese Entscheidungen der Schüler jedoch im Bereich der Spekulation. Der Vorteil der offenen Schülerantworten besteht jedoch darin, dass Probleme aufgeworfen werden, die man bei Antwortvorgaben nicht bemerkt hätte.

Auf dem Zahlenstrahl sind die Markierungen bei den richtigen Zahlen nur bei 4 % der Arbeiten und bei 900 und 2500 nur bei 0,77 % zu finden. Man könnte vorschnell vermuten, dass die Schüler mangelnde Fähigkeiten im Umgang mit dem Zahlenstrahl besäßen.

Welche Veranschaulichungen auf dem vorgegebenen Zahlenstrahl nutzten die Schüler, die die richtigen bzw. die Zahlen 900 und 2500 in den Antwortsatz schrieben?

Vielleicht haben die 14,1 % der Schüler, die nur die Mitte 1700 auf dem Zahlenstrahl markierten, die richtige Lösung durch Abzählen gefunden?

Es fällt auf, dass zwar 50 % der Schüler keine Markierung auf dem Zahlenstrahl vornahmen, aber nur 5 – 6 % keinen Eintrag in den Antwortsatz. Zeugt das davon, dass die Schüler die Aufgabe auf anderem Wege bearbeitet und den Zahlenstrahl nicht als Hilfe empfunden haben? Um diese und weitere Fragen zu beantworten, wird der Zusammenhang zwischen den Aufgabenteilen 8a und 8b anhand der folgenden Kreuztabelle untersucht. Für diese Tabelle gilt ebenfalls, dass nur Antwortgruppen erfasst wurden, die für die Auswertung interessant sind. Deshalb ist die Angabe 100 %, die in der letzten Spalte der Tabelle für die Summe der Anteile an der Antwort zu 8a auftritt, nicht die Summe der aufgeführten Prozentsätze.

Tabelle 3.10: Ausschnitt aus der Kreuztabelle 8a (Zahlenstrahl) * 8b (Zahl 1300), Angaben in Prozent

8a (Zahlenstrahl)		8b (erste Zahl)					
		1300	1700	kein Eintrag	900	800	gesamt
Richtig	% von 8a	88		1,8	1,8		100
	% von 8b	22		1,52	0,5		4,3
Nur Mitte 1700 richtig	% von 8a	22	3,8	15,8	24,6	7,1	100
	% von 8b	19	28	43,9	20,6	11,4	14,0
Kein Eintrag	% von 8a	17	2	0,6	19,3	9,9	100
	% von 8b	49	52	6,1	57,3	56,1	50,0
1700 und 800 eingetragen	% von 8a	12		22,2	3,7	23,5	100
	% von 8b	4,5		27,3	1,4	16,7	6,3
1700 richtig und falsche Zahlen	% von 8a	6,3	3,2	6,3	31,7	7,9	100
	% von 8b	1,8	8	6,1	9,2	4,4	4,9
900 und 2500	% von 8a				100		100
	% von 8b				4,6		0,77
Gesamt	% von 8a	17,1	1,9	5,1	16,8	8,8	100

Betrachtet man nur die wenigen Schüler (es sind nur 49 von 1295), die sowohl die richtigen Eintragungen auf dem Zahlenstrahl als auch im Antwortsatz vornahmen, zeigt sich, dass 88 % der Schüler, die den Zahlenstrahl richtig beschrifteten, auch die richtigen Zahlen fanden. Dieser enge Zusammenhang ließe die Vermutung zu, dass der Eintrag in den Zahlenstrahl eine wichtige Voraussetzung für das Finden der Zahlen wäre.

Umgekehrt sind das nur 22 % der 221 Schüler, die eine richtige Lösung in den Antwortsatz schrieben. 19 % von ihnen markierten nur die Mitte 1700 und 49 % fanden die richtige Lösung ohne den Zahlenstrahl! Leider war auf dem Arbeitsblatt kein Platz zur Niederschrift eines alternativen Lösungsweges. Es kann auch nicht nachgewiesen werden, ob die Schüler etwas am Zahlenstrahl abgezählt haben, ohne Spuren auf ihm zu hinterlassen. Dass mehr als doppelt so viele Schüler die Lösung ohne nachweisbaren Eintrag in den Zahlenstrahl fanden als mit richtigen Markierungen, könnte

auch die Hypothese implizieren, dass ein Teil der 49 Schüler, die beide Aufgabenteile richtig hatten, die Markierungen auf dem Zahlenstrahl erst vornahmen, nachdem sie die Zahlen ausgerechnet hatten. Unterstützt wird der Gedanke von der Tatsache, dass sogar 100 % der Schüler, die die Zahlen 900 und 2500 auf dem Strahl markierten, diese auch in den Antwortsatz eintrugen. Da hier die Markierung 1700 fehlt, ist es recht eindeutig, dass die Zahlen erst berechnet und dann eingetragen wurden.

Dass nur 22 % derjenigen, die die Mitte 1700 auf dem Strahl markierten, eine richtige Lösung fanden, beantwortet die oben gestellte Frage, ob eventuell das Markieren der Mitte eine ausreichende Voraussetzung für eine erfolgreiche Lösung wäre, negativ. Die Kreuztabelle zeigt, dass 24,6 % von ihnen die Zahl 900 als Lösung angaben und 15,8 % zu keiner Lösung kamen.

Allerdings erhöhte das Eintragen der Zahl 1700 die Lösungswahrscheinlichkeit. Während in der Grundgesamtheit nur 17,1 % bzw. 16,8 % (ohne die 168 Schüler in der Grundgesamtheit, die die ganze Aufgabe nicht bearbeiteten, 19,6 % bzw. 19,3 %) die Zahlen 1300 bzw. 900 eintrugen, waren es unter der Bedingung der Markierung der Mitte wenigstens 22 % bzw. 24,6 %. Der Versuch, den Sachverhalt grafisch darzustellen, ist also doch der Schlüssel zum Erfolg. Allerdings wird der grundlegende Fehler, nämlich die Relation der Differenz der Zahlen, allein durch die Markierung der Mitte nicht überwunden. Es besteht ja auch keine Kontrollmöglichkeit, wenn die Zahlen selbst nicht eingetragen und ihre Differenz nicht sichtbar wird.

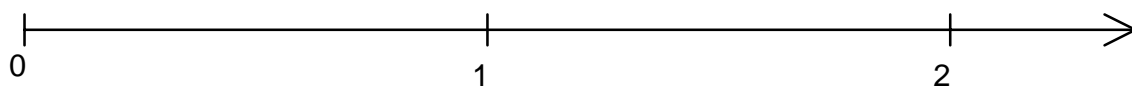
Zusammenfassend kann man feststellen: Die Schüler, die eine grafische Darstellung versuchten, hatten etwas bessere Lösungschancen. Der Zahlenstrahl wurde als vorgegebene Form der grafischen Darstellung jedoch von den Schülern nicht angenommen.

Es sind ganz unterschiedliche Ansprüche, ob der Zahlenstrahl zur Eintragung von Zahlen genutzt wird, um auf Koordinatensysteme vorzubereiten oder als Visualisierung der Vorstellungen der Schüler und als Hilfe beim Rechnen dienen soll. Das wird ersichtlich, wenn man die Lösungen der 9. Aufgabe im Zusammenhang zu der 8. sieht. Da beide Aufgaben formal den Umgang mit dem Zahlenstrahl fordern, ist es interessant, vergleichende Betrachtungen beider Aufgaben vorzunehmen.

Zusammenhänge zwischen den Schülerantworten zu den Aufgaben 8 und 9 in der Vergleichsarbeit 7/99

9. Aufgabe, 7. Klasse, 1999

Trage folgende Brüche auf dem Zahlenstrahl ein: $\frac{1}{3}$; $\frac{7}{6}$; $\frac{84}{84}$; $\frac{2}{6}$; 0,5.



Aus der Kreuztabelle ist ersichtlich, dass den Schülern das Abtragen von Zahlen auf dem Zahlenstrahl leichter fiel als seine Nutzung zur Veranschaulichung von Bedingungen über den Zusammenhang von Zahlen.

Tabelle 3.11: Ausschnitt aus der Kreuztabelle 8a (Zahlenstrahl) * 9a (Eintrag $\frac{1}{3}$), Angaben in Prozent

		9a (Eintrag $\frac{1}{3}$)				
8a (Zahlenstrahl)		richtig	falsche Markierungen	keine Markierung	ganze Aufgabe nicht bearbeitet	Gesamt
Richtig	% von 8a	58,9	33,9	5,4	1,8	100,0
	% von 9a	6,9	3,3	2,7	,7	4,3
Mitte 1700 richtig	% von 8a	32,2	48,6	10,4	8,7	100,0
	% von 9a	12,3	15,7	16,8	11,9	14,1
kein Eintrag	% von 8a	41,5	40,6	8,5	9,4	100,0
	% von 9a	56,2	46,3	48,7	45,2	50,0
Aufgabe nicht bearbeitet	% von 8a	24,4	43,5	10,1	22,0	100,0
	% von 9a	8,6	12,9	15,0	27,4	13,0

		9a (Eintrag 1/3)				
8a (Zahlenstrahl)		richtig	falsche Markierungen	keine Markierung	ganze Aufgabe nicht bearbeitet	Gesamt
1700 richtig, falsche Zahlen	% von 8a	19,0	57,1	12,7	11,1	100,0
	% von 9a	2,5	6,3	7,1	5,2	4,9
1700 und die Zahl 800 eingetragen	% von 8a	34,6	53,1	6,2	6,2	100,0
	% von 9a	5,8	7,6	4,4	3,7	6,3
nur Zahlenstrahl beschriftet	% von 8a	38,5	46,2	3,8	11,5	100,0
	% von 9a	2,1	2,1	,9	2,2	2,0
Gesamt	% von 8a	37,0	43,9	8,7	10,4	100,0
	% von 9a	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0

Obwohl auch diese Aufgabe von 13 % der Schüler nicht bearbeitet wurde, zeigt die Tabelle, dass es nicht dieselben Schüler waren. Die Nichtbearbeitung der Aufgaben kann also nicht als grundsätzliche Abneigung einiger Schüler gegen den Zahlenstrahl gedeutet werden. Die Schüler haben schon die unterschiedliche Bedeutung des Zahlenstrahls im Kontext beider Aufgabenstellungen erkannt.

Von den Schülern, die bei Aufgabe 8 keine Zahlen markierten, haben 41,5 % die Zahl bei 9a richtig markiert. Das ist ein höherer Anteil als in der Grundgesamtheit und zeigt, dass viele Schüler bei Aufgabe 8 bewusst keine Eintragungen in den Zahlenstrahl vornahmen. Sie sahen es offensichtlich nicht als sinnvoll an, für eine „Rechenaufgabe“ Markierungen am Zahlenstrahl vorzunehmen, obwohl die Aufforderung zur Nutzung des Strahls formuliert war. Dass sogar 56 % der Schüler, die bei Aufgabe 9 bewiesen, dass sie richtige Markierungen auf dem Zahlenstrahl vornehmen können, bei Aufgabe 8 nicht einmal die Zahl 1700 eintrugen (obwohl sie die Aufgabe bearbeiteten), kann als Demonstration ihrer Meinung gewertet werden, dass „man solche Aufgaben wie Nr. 8 nicht mit einem Zahlenstrahl rechnet“.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, aus den Defiziten der Schüler Schlüsse zu ziehen: Gängige Praxis ist es, die Schwierigkeiten der Schüler auf

Lücken in der Unterrichtspraxis zurückzuführen. Üblicherweise würde deshalb nach Aufdeckung des Problems gefordert, die Arbeit mit dem Zahlenstrahl im Unterricht zu forcieren. Der Zahlenstrahl sollte in Zukunft häufiger für die Veranschaulichungen von Rechnungen und nicht nur zur Darstellung von Zahlen genutzt werden. Dieser Schluss wäre nicht begründet, wird jedoch leider in unserer Broschüre und in anderen Zusammenhängen häufig praktiziert.

Wir sind der Meinung, dass die Probleme der Schüler auf Forschungsdefizite oder auf die fehlende Umsetzung vorhandener Forschungsergebnisse in die Praxis verweisen. Es wird in Frage gestellt, ob die Vorstellungen der Schüler vom Aufbau der Zahlenbereiche und von den Rechenoperationen innerhalb dieser der horizontalen Anordnung des Zahlenstrahls entsprechen. Die Schüler werden im Laufe der Schuljahre mit verschiedenen Veranschaulichungen der Zahlen und der Operationen konfrontiert: konkrete Objekte, Mengen, Abakus (Zehnerreihen übereinander), Zahlenstrahl (horizontal) oder das Thermometer (vertikal) bei der Einführung der rationalen Zahlen. Welche dieser räumlichen, ebenen, horizontalen oder vertikalen Darstellungen eignen sich nun am Besten, um die Vorgänge, die beim Rechnen in den Köpfen der Schüler ablaufen, adäquat darzustellen? Kann man andere durchgängige Darstellungen für alle Zahlenbereiche entwickeln? Sind die Vorstellungen der Schüler überhaupt einheitlich? Ist es daher legitim, bestimmte Visualisierungen zu favorisieren und vom Schüler zu verlangen, mit ihrer Hilfe zu rechnen? Diese und ähnliche Fragen eröffnen Möglichkeiten für Forschungsaufgaben oder Veröffentlichungen. Erst nachdem bessere und Erfolg versprechende Methoden wissenschaftlich begründet sind, sollten sie auch Lehrern zugänglich gemacht und Veränderungen in der Unterrichtspraxis verlangt werden.

3.5 Ausblicke

Für die nachträgliche Konstruktion von Antwortgruppen waren viel Zeit und Kraft notwendig, die bei besserer Vorbereitung hätte gespart werden können. Weiterhin haben wir bei allen Arbeiten bedauert, dass keine Pilotierung stattfand. Deshalb schlagen wir für zukünftige Arbeiten vor, die Vorgehensweise entsprechend zu verändern. Erste Vorstellungen wurden bereits bei der Auswertung der Vergleichsarbeit 2002 umgesetzt. Die Konstruktion der Aufgaben oder ihre Pilotierung konnte allerdings nicht mehr beeinflusst werden, aber bei der Auswertung wurden erste Ideen umgesetzt. Bei mehreren Aufgaben wurden die Antwortgruppen bereits vor dem Eintrag aller Originalantworten in die SPSS-Datei nach der Analyse der Anforderungen der Aufgabe und der Sichtung der Schülerlösungen konstruiert. Unsere Erfahrungen haben ergeben, dass dieses Vorgehen jedoch nur realisiert werden kann, wenn die Personen, die die Dateneingabe durchführen, Fachdidaktiker sind oder eng mit ihnen zusammenarbeiten. Es hat sich bei der Eingabe gezeigt, dass die Zahl der unterschiedlichen Schülerantworten so groß ist, dass man den technischen Kräften unmöglich eine Übersicht mit einer eindeutigen Zuordnung der möglichen Schülerantworten zu einer Antwortgruppe zur Verfügung stellen kann. Es ist weiterhin anzunehmen, dass in der Pilotierungsphase nicht alle möglichen Schülerantworten auftreten werden, die in der Grundgesamtheit zum Vorschein kommen können. In diesem Fall müssen von den technischen Kräften fundierte Entscheidungen getroffen werden, welchen Antwortgruppen die entsprechenden Schülerlösungen zugeordnet werden. Falsche Zuordnungen zu den Antwortgruppen verfälschen später die Ergebnisse der Analysen.

Bei der Aufgabe 10/2002, deren Analyse auf der CD zu finden ist (CD: Analyse_Sachaufgabe_10_02.pdf), wurde das beschriebene Vorgehen bei der Auswertung der Schülerantworten praktiziert. Die erhebliche Zeiterparnis bei den nachfolgenden Analysen war jedoch nur möglich, weil die Zuordnung der Schülereinträge und die Eingabe der Antwortgruppen in die SPSS-Datei durch die studentischen Hilfskräfte von der Autorin beständig angeleitet wurden. Dabei hat sich gezeigt, wie häufig und vielfältig die auftretenden Fragen sein können und wie wichtig es für die nachfolgenden Analysen ist, dass in dieser Phase richtige Entscheidungen getroffen werden.

Die folgende Schrittfolge zur Erstellung und Auswertung von Aufgaben einer Leistungserhebung unter Nutzung von Antwortgruppen stellt die Zusammenfassung unserer Erfahrungen mit den bisher angegebene Vorgehensweise dar (vgl. Schrittfolgen S. 156 und 171)

Schrittfolge zur Entwicklung und Auswertung von Aufgaben unter Nutzung von Antwortgruppen zur Fehleranalyse

1. Entwurf der Aufgaben
2. Analyse der Anforderungen an die Schüler bei der Aufgabenbearbeitung
 - 2.1. Analyse der Anforderungen und Einordnung der Aufgabe,
 - 2.2. Unterteilung der Aufgabenbearbeitung in Phasen des Lösungsprozesses und Prozesse der Informationsverarbeitung sowie Ermittlung der zur Bearbeitung notwendigen Voraussetzungen und geistigen und praktischen Schülertätigkeiten für jede Phase
 - 2.3. Schlussfolgerungen auf theoretisch mögliche Fehler, Kennzeichnung von Problemzonen, Vorwegnahme möglicher Ergebnisse, die bei Ausführung fehlerhafter Strategien auftreten können

Bereits bei der Erarbeitung der Aufgaben sollten den Phasen des Lösungsprozesses einer Aufgabe folgend die wichtigsten Voraussetzungen, besonders die notwendigen Begriffe, Fertigkeiten und Problemlösestrategien für die Bewältigung der jeweiligen Phase ermittelt werden. Während der Analyse der vom Schüler zu beherrschenden Begriffe und seiner zur Aufgabenbearbeitung notwendigen Handlungen werden die richtigen Antworten und die Antworten, die sich aus möglichen Fehlern ergeben, theoretisch konstruiert. Daraus ergeben sich die Vorgaben auf dem Arbeitsblatt für die Schüler.

3. Erprobung der Aufgaben in einer kleinen Schülerpopulation
4. Analyse der realen Schülerlösungen
 - 4.1. Anlegen von Spalten in einer Antwortdatei

In der Datei der Originalantworten der Schüler mehrere Spalten angelegt. Sie orientierten sich auch an den Phasen des Lösungsprozesses und an den Vorgaben auf dem Arbeitsblatt.

- 4.2. Übersicht über alle Schülerantworten und die Häufigkeit ihres Auftretens bezogen auf eine Spalte der Antwortdatei

Diese Übersicht dient der ersten Orientierung. Von einer Expertenkommission wird entschieden, welche Antworten als richtig angesehen werden. Der Anteil der Nichtbearbeitung gibt Hinweise auf das Verständnis der Schüler für die Aufgabenstellung und kennzeichnet eventuelle Probleme. Eine erste Analyse der fehlerhaften Schülerlösungen dient einem Vergleich der Erwartungen mit der Realität. Sollten die Unterschiede sehr groß und

der Anteil richtiger Lösungen gering sein, müssen die Ursachen dafür aufgedeckt und über einen Verbleib der Aufgabe in der Vergleichsarbeit nachgedacht werden. Wenn sich in der Erprobung herausstellen sollte, dass Formulierungen oder Vorgaben auf dem Arbeitsblatt ungünstig sind, werden Verbesserungen vorgenommen.

5. Bilden von Zuordnungen zwischen den fehlerhaften Schülerantworten und den theoretischen Konstrukten
6. Bilden von Antwortgruppen

Jede Schülerlösung wird nach dem im zweiten Modell beschriebenen Muster in genau eine Antwortgruppe eingeordnet.

7. Schreiben der Vergleichsarbeit in der Grundgesamtheit und Erstellen der Antwortdatei für die Stichprobe

Bereits bei der ersten Auswertung der Arbeit werden die Schülerantworten den Antwortgruppen zugeordnet. In die Antwortdatei werden Kürzel für die Antwortgruppen eingetragen. Das erleichtert den Auswertern die Arbeit und ermöglicht eine schnelle Analyse der Ergebnisse, setzt aber voraus, dass die Personen, die die technischen Arbeiten ausführen, über die entsprechende Sachkompetenz verfügen und motiviert sind. In dieser Phase findet die eigentliche inhaltliche Arbeit statt, die nicht auf die formale Zuordnung von Schülerantworten zu Antwortgruppen beschränkt bleiben kann. Es muss auch in dieser Phase noch die Möglichkeit bestehen, Antwortgruppen neu zu entwickeln oder zu verändern.

Im Anhang auf der beiliegenden CD befindet eine Auswertung von drei weiteren Aufgaben nach unserem Auswertungsschema (Analyse_Geometrieaufgaben_2_99 und 3_99.pdf, Analyse_Sachaufgabe 10_02.pdf)