

### 3 Ziele und Aufgaben Klasse 12

#### 3.1 Planungsvorschlag für die Klasse 12

##### **Analytische Geometrie und Vektorrechnung**

###### **Vorbemerkungen:**

Im Vordergrund stehen die praktischen Bedeutungen der Begriffe und Verfahren der vektoriellen analytischen Geometrie sowie die vielfältigen Möglichkeiten der Modellierung realistischer Probleme, die sich durch die Nutzung eines CAS ergeben. Gleichzeitig sollen die Schüler an Begriffe und Betrachtungsweisen der linearen Algebra herangeführt werden, wodurch die in vielen Studienrichtungen notwendigen Verallgemeinerungen der linearen Algebra inhaltlich und anschaulich vorbereitet werden.

In der Analytischen Geometrie werden verschiedene Konzepte der Stoffverteilung praktiziert. Daher ist dieser Vorschlag nur als einer von mehreren möglichen anzusehen. Die Themen können auch in anderer Reihenfolge unterrichtet werden. Bei den Zielpräzisierungen und den Aufgaben haben wir uns daher entschieden, nur zwei große Themengebiete anzugeben: Koordinatensysteme und Vektoren sowie Geraden, Ebenen und Kreise.

<b>Std.</b>	<b>Inhalte / Schwerpunkte</b>	<b>Bemerkungen</b>
<b>14</b>	<b>Koordinatensysteme und Vektoren</b>	
4	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Zwei- und dreidimensionale kartesische Koordinatensysteme</li> <li>– Darstellung von Punkten, ebenen Figuren und Körpern in Koordinatensystemen</li> <li>– Wiederholung der Kenntnisse zu Dreiecken, Vierecken und Körpern (Definitionsmöglichkeiten, Inhaltsberechnungen)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Erkennen des Zusammenhanges zwischen dem gewählten Koordinatensystem und der Anschauung (Tiefenlinien und Verkürzungsfaktor des Schrägbildes im Raum)</li> <li>– Aufgaben zum räumlichen Vorstellungsvermögen</li> </ul>
10	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Vektorbegriff (Vektor als Pfeilklassen; Vektor als Zahlenpaar, -tripel)</li> <li>– Darstellungen von Vektoren (Koordinatendarstellung, Pfeildarstellung)</li> <li>– Ortsvektor</li> <li>– Betrag eines Vektors, Länge eines Vektors</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Ausbilden reichhaltiger Vorstellungen: Vektor als Werkzeug, um konkrete Darstellungs-, Bewegungs- und Vermessungsprobleme analytisch zu lösen</li> <li>– Vektoren mit CAS</li> <li>– Anwendungen bei Länge und Mittelpunkt einer Strecke</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Operationen mit Vektoren: Vervielfachen mit einer reellen Zahl, Addieren, Subtrahieren, Einheitsvektor</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Vektorraum als Menge gegebener Vektoren, mit 2 Operationen, vereinfachende Schreibweise, anschauliche Darstellung, Analogie zu Zahlenbereichen; Nullelement, Einselement</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Linearkombinationen von Vektoren</li> <li>– Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– inhaltliches Verständnis, geometrische Deutung</li> <li>– Dimension, Basis eines Vektorraumes (im Zusammenhang mit Koordinatensystemen)</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Skalarprodukt</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Problematik der Operation Skalarprodukt</li> </ul>

<b>Std.</b>	<b>Inhalte / Schwerpunkte</b>	<b>Bemerkungen</b>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Winkel zwischen Vektoren</li> <li>– Vektorprodukt</li> </ul>	(Ergebnis ist kein Vektor) – Die Einführung von Skalar- und Vektorprodukt kann auch später erfolgen
	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Einfache Nachweise geometrischer Zusammenhänge</li> </ul>	
<b>8</b>	<b>Geraden</b>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Geradengleichungen (parameterfreie Gleichungen nur in der Ebene, Parametergleichung im Raum)</li> <li>– Lagebeziehungen zwischen               <ul style="list-style-type: none"> <li>○ Punkt und Gerade</li> <li>○ zwei Geraden im Raum</li> </ul> </li> <li>– Berechnung von Winkeln zwischen Geraden (insbesondere Orthogonalität)</li> <li>– Berechnung des Abstandes eines Punktes von einer Geraden in der Ebene</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Nutzung des CAS zur Anschauung und zur Vereinfachung von Rechnungen,</li> <li>– geometrische Bedeutung des Parameters und von Parametereinschränkungen</li> </ul>
<b>15</b>	<b>Ebenen</b>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Ebenengleichungen (Parametergleichung, Koordinatengleichung, Normalenform)</li> <li>– Lagebeziehungen zwischen               <ul style="list-style-type: none"> <li>○ Gerade und Ebene</li> <li>○ zwei Ebenen</li> </ul> </li> <li>– Berechnung von Durchstoßpunkten</li> <li>– Berechnung von Winkeln zwischen               <ul style="list-style-type: none"> <li>○ Gerade und Ebene</li> <li>○ zwei Ebenen</li> </ul> </li> <li>– Berechnung des Abstandes Punkt – Ebene</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Sonderfälle: Koordinatenachsen, Koordinatenebenen</li> <li>– Benutzung des Begriffes „Matrix“ als mögliche Darstellung von Gleichungssystemen bei Nutzung des CAS,</li> <li>– Keine Berechnung von Spurgeraden</li> <li>– exemplarisch</li> </ul>
<b>5</b>	<b>Kreise</b>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Kreisgleichung in Koordinatenform (allgemeine Lage)</li> <li>– Lagebeziehungen zwischen Kreis und Gerade</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Tangentengleichung für Punkte des Kreises</li> </ul>
<b>8</b>	<b>Gemischte Aufgaben</b>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Räumliche Schnittprobleme in Anwendungssituationen (Projektionen, Flugbahnen)</li> <li>– Berechnung von Flächeninhalten und Volumina</li> </ul>	

## 3.2 Koordinatensysteme und Vektoren

### Vorwissen

*Aus dem Mathematikunterricht:*

*Sekundarstufe I:*

- Verschiebung, Verschiebungspfeil
- Kraft, Geschwindigkeit ... als vektorielle Größe mit Betrag, Richtung und Richtungssinn aus der Physik, Kräfteparallelogramm
- Geometrische Figuren (Dreiecke, Vierecke, Kreise): Definitionen, Eigenschaften, Berechnungen
- Geometrische Körper (Würfel, Quader, Prismen, Pyramiden, Pyramidenstümpfe): Definitionen, Eigenschaften, Berechnungen
- Schrägbilder, Grund- und Aufriss
- Spiegelung von Punkten und geometrischen Figuren
- Parallelität und Orthogonalität von Geraden und Strecken
- Winkel, Lot
- räumliches Vorstellungsvermögen
- Koordinatensysteme in der Ebene
- inhaltliche Kenntnisse des Operationsbegriffs (Rechenoperationen)

*Sekundarstufe II:*

- Normale, Anstieg

### Ziele

#### Sicheres Wissen und Können

Die Schülerinnen und Schüler:

- wissen, dass es zwei- und dreidimensionale Koordinatensysteme gibt,
- kennen den Begriff des kartesischen Koordinatensystems,
- kennen zwei verschiedene Darstellungen eines räumlichen, kartesischen Koordinatensystems in der Ebene ( $x$ -Achse nach vorn,  $x$ -Achse nach rechts),
- verbinden mit dem Begriff des Vektors sowohl einen Verschiebungspfeil als auch ein Zahlenpaar bzw. Zahlentripel,
- kennen ein Vorgehen zur Berechnung von Abständen von Punkten im Raum,
- wissen, dass Punkte durch Ortsvektoren beschrieben werden können.

Die Schülerinnen und Schüler können

- Punkte, Strecken, Vektoren und elementare Körper mit gegebenen Koordinaten der Eckpunkte im kartesischen Koordinatensystem darstellen,
- räumliche Darstellungen lesen,

- Vektoren addieren, subtrahieren und vervielfachen (formal rechnerisch und anschaulich mithilfe von Pfeilen),
- Linearkombinationen von Vektoren in der Ebene berechnen, darstellen und aus Darstellungen ablesen,
- Linearkombinationen von Vektoren in räumlichen Darstellungen von elementaren Körpern erkennen, berechnen und beschreiben, Parameter bestimmen,
- elementare geometrische Figuren oder Körper vervollständigen oder nachweisen, wenn die Koordinaten wesentlicher Eckpunkte gegeben sind,
- folgenden Satz in der Ebene anwenden: „Zwei Vektoren bilden einen Winkel von  $90^\circ$  genau dann, wenn ihr Skalarprodukt Null ist“,
- den Betrag eines Vektors bestimmen,
- die Länge und den Mittelpunkt einer Strecke bestimmen, wenn die Endpunkte gegeben sind,
- einfache Nachweise führen (Mittelpunkt einer Strecke, ebenes Viereck, Parallelogramm).

### Reaktivierbares Wissen und Können

Die Schülerinnen und Schüler können

- das Skalarprodukt zur Berechnung des Winkels zwischen 2 Vektoren anwenden,
- das Vektorprodukt anwenden, um einen orthogonalen Vektor zu zwei gegebenen Vektoren herzustellen,
- den Betrag des Vektorprodukts als Fläche des Parallelogramms deuten, das durch die Vektoren aufgespannt wird.

### Exemplarisches

Die Schüler haben an einprägsamen Beispielen erste Vorstellungen und Einsichten zu folgenden Sachverhalten gewonnen:

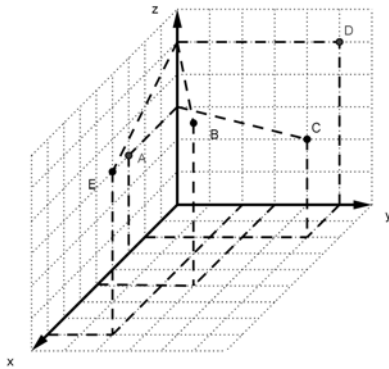
- Der Vektor ist eine Äquivalenzklasse in Analogie zur Klasse der Verschiebungen und den gebrochenen Zahlen als Klasse von Brüchen.
- Der Vektor ist ein Werkzeug, um konkrete Darstellungs-, Bewegungs-, und Vermessungsprobleme analytisch zu lösen,
- Es gibt weitere Bedeutungen des Vektorbegriffs (z.B.: Zeilen und Spalten in Tabellen, Parameter von Gleichungen oder Funktionen, Glieder von Folgen).
- Die Operationen „Addition“, „Subtraktion“ und „Vervielfachen“ von Vektoren und die Begriffe „Nullvektor“ und „Einheitsvektor“ sind analog zu den Rechenoperationen mit gebrochenen Zahlen und den Zahlen Null und Eins.
- Vektoren können linear abhängig oder unabhängig sein.
- Die Bedeutung des Vektorraumes und seiner Dimension kann an zwei- und dreidimensionalen Koordinatensystemen veranschaulicht werden. (Diskussion über verschiedene Basen von Koordinatensystemen)

## Aufgaben

*Hinweis: Wenn nichts Anderes gefordert ist, sollen die Koordinatensysteme kartesisch und die Parameter aus dem Bereich der reellen Zahlen sein.*

### Sicheres Wissen und Können

- Ein gerader Pyramidenstumpf ist durch folgende Eckpunkte gegeben:  
 $A(7 | 1 | -1)$ ,  $B(7 | 9 | -1)$ ,  $C(3 | 9 | -1)$ ,  $D(3 | 1 | -1)$ ,  $E(6 | 3 | 7)$ ,  $F(6 | 7 | 7)$ ,  
 $G(4 | 7 | 7)$  und  $H$ .  
 a) Stellen Sie den Pyramidenstumpf in einem kartesischen Koordinatensystem dar.  
 b) Geben Sie die Koordinaten des Punktes  $H$  an.
- a) Lesen Sie die Koordinaten der gegebenen Punkte ab.  
 b) Begründen Sie, warum es ohne die gestrichelten Linien nicht möglich wäre, die Koordinaten der Punkte eindeutig anzugeben.



- In einem kartesischen Koordinatensystem ist der Punkt  $P(1 | -2 | 3)$  gegeben. Dieser Punkt  $P$  wird an der folgenden Ebene bzw. Achse gespiegelt. Bestimmen Sie jeweils die Koordinaten des Bildpunktes.
  - $x$ - $y$ -Ebene
  - $y$ - $z$ -Ebene
  - $x$ - $z$ -Ebene
  - der  $x$ -Achse; der  $y$ -Achse; der  $z$ -Achse.
- Wo liegen alle Punkte  $P(x | y | z)$  bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems, für die Folgendes gilt.
  - Die  $x$ -Koordinate ist 5
  - Die  $x$ - und die  $y$ -Koordinaten sind negativ, die  $z$ -Koordinate ist 3.
- Markieren Sie in einem kartesischen Koordinatensystem alle Punkte  $P(-2 | y | 3)$ , wobei  $y$  alle reellen Zahlen durchläuft.
- Zeichnen Sie den Punkt  $Q(1 | 2 | 3)$  in ein kartesisches Koordinatensystem.
  - Geben Sie die Koordinaten von fünf Punkten an, die in der Zeichnung nicht vom Punkt  $Q$  zu unterscheiden sind.
  - Erläutern Sie, warum es nicht möglich ist, die Koordinaten eines Punktes aus einer Zeichnung abzulesen.

7. Gegeben ist eine Pyramide ABCD. Die Eckpunkte besitzen in einem kartesischen Koordinatensystem (1 LE = 1 cm) die Koordinaten : A (0 | 0 | 0), B (5 | 0 | 0), C (0 | 4 | 0) und D (0 | 0 | 6).
- Zeichnen Sie diese Pyramide.
  - Berechnen Sie das Volumen und den Oberflächeninhalt der Pyramide ABCD.

8. Welcher der folgenden Vektoren ist parallel zu  $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ?

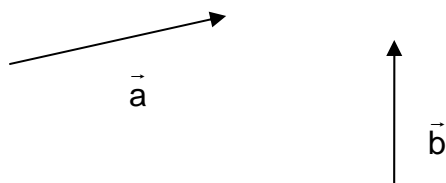
$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0,75 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 27 \\ -36 \end{pmatrix}$$

9. Bestimmen Sie die fehlende Koordinate so, dass die Vektoren parallel zueinander sind.

$$\text{a) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ 8 \\ b_z \end{pmatrix} \quad \text{b) } \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{1}{3} \\ b_z \end{pmatrix}$$

10. Gegeben:  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ;  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ . Ermitteln Sie  $|2\vec{a} + \vec{b}|$

11. Ermitteln Sie zeichnerisch  $2\vec{a} - \vec{b}$  und  $-2\vec{b} + \vec{a}$ .



12. Vergleichen Sie die folgenden mathematischen Objekte miteinander. Finden Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen

$$P(1 | 2 | 3) \quad \text{und} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

13. Erläutern Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen einem Ortsvektor und einem Richtungsvektor.

14. Bestimmen Sie die fehlende Koordinate des Punktes B so, dass die Punkte A (5 | 2) und B (-3 | y) 10 Längeneinheiten voneinander entfernt sind.

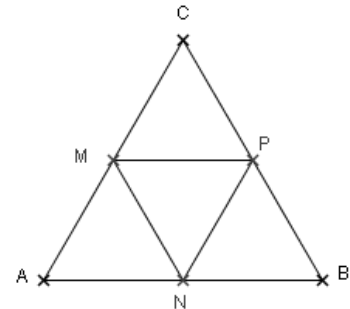
15. In einem kartesischen Koordinatensystem sind A (0 | 0 | -3), B (1 | 4 | -2), C (2 | 5 | 2), und D (1 | 1 | 1) Eckpunkte eines ebenen Vierecks.

- Zeichnen Sie das Viereck in ein Koordinatensystem.
- Untersuchen Sie, ob dieses Viereck ein Rhombus ist.

16. Gegeben sind die Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2c \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ . Ermitteln Sie den Wert von  $c$  so, dass der Winkel zwischen  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$   $90^\circ$  beträgt.

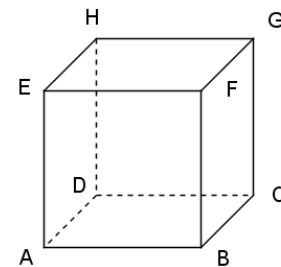
17. In einem gleichseitigen Dreieck  $ABC$  sind  $M$ ,  $N$  und  $P$  die Mittelpunkte der Seiten  $\overline{AC}$ ,  $\overline{AB}$ , und  $\overline{BC}$ .

- a) Nennen Sie Repräsentanten der Vektoren  $\overrightarrow{MN}$  bzw.  $\overrightarrow{CM}$   
 b) Geben Sie Vektoren an, die den gleichen Betrag wie  $\overrightarrow{AN}$  haben.



18. Gegeben sind die Eckpunkte eines Würfels.

- a) Geben Sie alle Repräsentanten der Vektoren  $\overrightarrow{AB}$  und  $\overrightarrow{BH}$  an.  
 b) Nennen Sie je einen Repräsentanten von  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG}$ ;  $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CH}$ ;  $-\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{DC}$  und  $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{HD}$ .



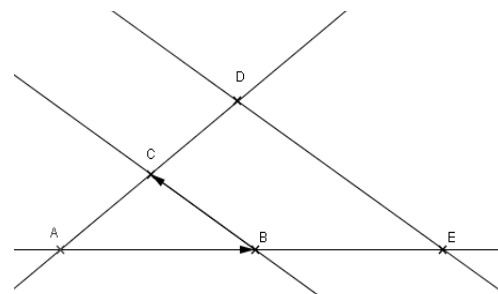
19. Die Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks betragen 3 LE, 4 LE und 5 LE. Suchen Sie nach Koordinaten bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems für die Eckpunkte  $A$ ,  $B$  und  $C$ , so dass die genannten Eigenschaften des Dreiecks  $ABC$  erfüllt sind.

20. Gegeben ist eine Strahlensatzfigur.

Es gilt:  $2 \cdot \overline{AC} = \overline{AD}$      $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ ;     $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$

Drücken Sie die Vektoren:

$\overrightarrow{AD}$ ;  $\overrightarrow{DE}$ ;  $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED}$  nur durch  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aus.



### Reaktivierbares Wissen und Können

21. Suchen Sie nach mehreren Möglichkeiten, einen Würfel mit der Kantenlänge 5 LE in einem Koordinatensystem anzugeben. Bestimmen Sie zu jeder Möglichkeit die Koordinaten der Eckpunkte des Würfels.

22. Gegeben sind folgende Vektoren im Raum:  $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} u \\ 3 \\ v \end{pmatrix}$ .

Bestimmen Sie  $u$  und  $v$  so, dass der dritte Vektor senkrecht zu beiden anderen verläuft.

23. Gegeben ist das Dreieck ABC mit  $A(2 | 3 | 5)$ ,  $B(4 | 4 | 1)$ ,  $C(0 | 7 | 5)$ .
- Stellen Sie das Dreieck in einem räumlichen kartesischen Koordinatensystem dar.
  - Prüfen Sie auf zwei Arten, ob dieses Dreieck rechtwinklig ist.
  - Berechnen Sie den Umfang und die fehlenden Innenwinkel des Dreiecks.
  - Berechnen Sie die Mittelpunkte  $M_1$  und  $M_2$  der Seiten  $\overline{AB}$  und  $\overline{AC}$ .
  - Bilden Sie den Vektor  $\overrightarrow{M_1M_2}$  und prüfen Sie, ob er zu  $\overrightarrow{BC}$  parallel ist.
  - In welchem Verhältnis stehen die Beträge dieser Vektoren?
  - Fassen Sie Ihre Ergebnisse aus e), f) und g) in einem Satz für das Dreieck ABC zusammen.
  - \*Gilt dieser Satz auch für beliebige Dreiecke? Beweisen Sie ihn mithilfe von Vektoren.

### Exemplarisches

24. Vergleichen Sie die Rechenoperationen mit reellen Zahlen mit den Rechenoperationen mit Vektoren.
25. Vergleichen Sie den Nullvektor mit der Zahl Null und den Einheitsvektor mit der Zahl Eins.
26. Ein Pilot überfliegt A-Stadt in Richtung des Ortes B. Der Ort B liegt 1000 km nördlich von A-Stadt. Die Eigengeschwindigkeit des Flugzeugs beträgt  $\left| \vec{v}_1 \right| = 900 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ . Auf dem Weg weht ein Westwind mit einer Geschwindigkeit von  $\left| \vec{v}_2 \right| = 100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ .
- Beschreiben Sie durch Angabe des so genannten Vorhaltewinkels die Richtung, in die der Pilot steuern muss, um den Kurs zu halten.
  - Wie groß ist die Geschwindigkeit des Flugzeugs über Grund, d. h. die Resultierende aus Eigen- und Windgeschwindigkeit?
  - Nach welcher Flugdauer überfliegt das Flugzeug den Ort B?
27. Interpretieren Sie den Vektor  $(a | b | c) = (8 | 12 | 18)$  in folgenden Kontexten.
- als Tagestemperaturen in °C um 6, 12 bzw. 18 Uhr an einem bestimmten Ort,
  - als Glieder einer Zahlenfolge,
  - als Parameter einer quadratischen Funktion der Form  $y = ax^2 + bx + c$ ,
  - als Parameter einer quadratischen Gleichung der Form  $ax^2 + bx = c$
28. Der dreidimensionale Vektor  $(a | b | c)$  kann unterschiedlich gedeutet werden. Untersuchen Sie, welche Bedeutung in den gegebenen Kontexten die Vektoraddition, das Vervielfachen von Vektoren und der Nullvektor haben.
- als Tageseinnahmen in € einer Firma mit 3 Standorten
  - a, b und c als Parameter einer quadratischen Funktion der Form  $y = ax^2 + bx + c$
  - als Verschiebung
29. Geben Sie möglichst viele Deutungen des Vektors  $(a | b | c | d | e) = (2 | 4 | 6 | 8 | 10)$  an.
30. Das Billiardspiel wird häufig zur Veranschaulichung der Begriffe und der Vektoroperationen benutzt. Erläutern Sie an diesem Beispiel die Begriffe Vektor, Nullvektor und Einheitsvektor sowie die Operationen Addition und Vervielfachen eines Vektors.



Die folgende Aufgabe ist als Idee zur Selbsttätigkeit interessierter Schüler gedacht, nicht für alle Schüler.

31. In der Physik sind die Galilei-Transformation und die Lorentz-Transformation wichtig. In den Geowissenschaften gibt es Transformation von geographischer Breite und Länge in Gauß-Krüger-Koordinaten und die Umrechnungen zwischen astronomischen Koordinaten, die als Anwendungen von Vektoren angesehen werden können. Informieren Sie sich über eine dieser Transformationen und stellen Sie einen Zusammenhang zur Vektorrechnung her.

32. Gegeben seien die Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$   $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ .

Sind diese Vektoren linear unabhängig?

33. In der folgenden Figur werden der Punkt O als Koordinatenursprung eines nichtkartesischen Koordinatensystems und die Vektoren

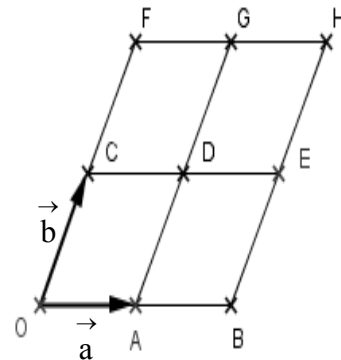
$\vec{a}$  und  $\vec{b}$  als Basisvektoren aufgefasst.

- a) Stellen sie die Ortsvektoren

$$\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}, \vec{OD}, \vec{OE}, \vec{OF}, \vec{OG}, \text{ und } \vec{OH}$$

der Punkte A, B, C, D, E, F, G und H nur

mithilfe der Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  dar und geben Sie die Koordinaten dieser Punkte in diesem Koordinatensystem an.



- b) Begründen Sie, dass der Vektor  $\vec{d} = \vec{OD}$  als Basisvektor nicht ausreichen würde, um alle Ortsvektoren nur durch ihn darzustellen.

34. Gegeben ist ein Würfel mit einer Kantenlänge von 5 Längeneinheiten. In dem Würfel liegt ein regelmäßiger Tetraeder ABCD (siehe Skizze).

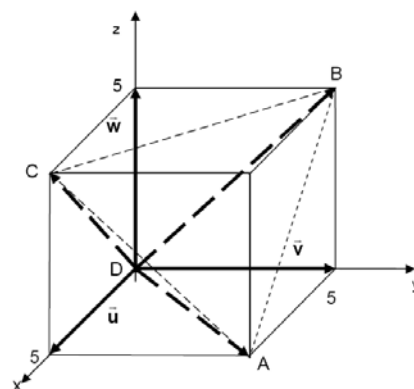
- a) Die Vektoren  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  sind als Basisvektoren gegeben.

Geben Sie die Vektoren

$\vec{a} = \vec{DA}$ ,  $\vec{b} = \vec{DB}$  und  $\vec{c} = \vec{DC}$  nur in Abhängigkeit von den Vektoren

$\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  und  $\vec{w}$  an.

- b) Nun seien die Vektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  als Basisvektoren gegeben. Stellen Sie die Vektoren  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  oder  $\vec{w}$  als Linearkombination von  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  dar.

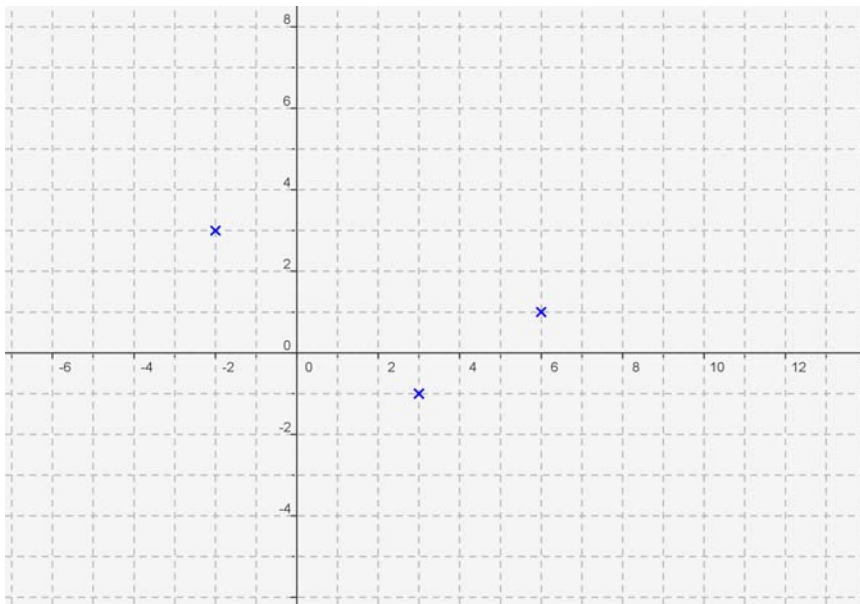


35. Gegeben seien die Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Berechnen Sie den Flächeninhalt der folgenden Figur.

- Das Parallelogramm, das von den Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aufgespannt wird
- Das Dreieck, das von den Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aufgespannt wird

36. Es gibt drei Möglichkeiten, die gegebenen Punkte so durch einen vierten Punkt zu ergänzen, dass ein Parallelogramm entsteht. Berechnen Sie für jedes entstehende Parallelogramm den Flächeninhalt.



### 3.3 Geraden, Ebenen und Kreise

#### Vorwissen

- Lösen linearer Gleichungssysteme
- Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme
- Lagebeziehungen zwischen Geraden, Gerade - Kreis, Punkt - Gerade
- Begriff des Abstandes
- Spiegelung von Figuren
- Lot, Normale
- Zusammenhang zwischen dem Anstieg zueinander senkrechter Geraden in der Ebene ( $m_1 \cdot m_2 = -1$ )
- Höhen und Mittelsenkrechten im Dreieck

#### Ziele

##### Sicheres Wissen und Können

Die Schülerinnen und Schüler kennen:

zu Geraden:

- ein Verfahren zur Bestimmung der Lagebeziehungen zwischen Punkten und Geraden,
- ein Vorgehen, um den Abstand eines Punktes von einer Geraden in der Ebene zu bestimmen,
- die geometrische Bedeutung des Parameters in Parametergleichungen von Geraden / Strecken / Strahlen,
- anschauliche geometrische Vorstellungen von Geraden im Raum und können Geraden in ein Koordinatensystem eintragen.

zu Ebenen:

- Verfahren zur Bestimmung von Lagebeziehungen zwischen Punkten, Geraden und Ebenen.

Die Schülerinnen und Schüler können

zu Geraden:

- Parametergleichungen von Geraden in der Ebene und im Raum aufstellen, wenn die dafür notwendigen Punkte oder Vektoren gegeben sind,
- Parameterfreie Gleichungen von Geraden in der Ebene (z. B.:  $y = mx + n$ ) aufstellen,
- Lagebeziehungen an einfachen Beispielen zwischen Punkten und Geraden bzw. Strecken erkennen oder realisieren,
- Lagebeziehungen zwischen zwei Geraden oder Strecken / Kanten von Körpern erkennen (Parallelität, Orthogonalität und auf das Vorhandensein eines Schnittpunktes schließen, ohne ihn zu berechnen) und realisieren (Parallelität von Geraden im Raum, Orthogonalität von Geraden nur in der Ebene).

zu Ebenen:

- Parametergleichungen von Ebenen aufstellen, wenn die dafür notwendigen Punkte oder Vektoren gegeben sind,
- Gleichungen von Ebenen in der Normalen- und der Koordinatenform aufstellen, wenn der Normalenvektor der Ebenen bekannt oder ohne Hilfsmittel zu bestimmen ist,
- Lagebeziehungen an einfachen Beispielen zwischen Punkten und Ebenen erkennen und realisieren,
- Lagebeziehungen an einfachen Beispielen zwischen einer Geraden und einer Ebene erkennen und realisieren (Parallelität und Orthogonalität, wenn der Normalenvektor der Ebene bekannt ist),
- Lagebeziehungen an einfachen Beispielen zwischen 2 Ebenen erkennen und im Falle der Parallelität und der Identität realisieren,
- Anwendungen auf punktweise Projektionen und punktweise Spiegelungen von Figuren auf/an Koordinatenebenen beziehen.

### Reaktivierbars Wissen und Können

Die Schülerinnen und Schüler können

- lineare Gleichungssysteme mit 3 Gleichungen und 3 Unbekannten lösen.

zu Geraden:

- die Lagebeziehung von zwei Geraden bestimmen,
- den Schnittpunkt zweier Geraden berechnen,
- das Skalarprodukt zur Berechnung des Schnittwinkels zwischen zwei Geraden anwenden,
- den Abstand Punkt - Gerade in der Ebene bestimmen,
- Gleichungen von Geraden in der Ebene in Parameterform und in Koordinatenform angeben, ineinander umwandeln und gezielt anwenden, z.B. um den Abstand eines Punktes von einer Geraden in der Ebene zu bestimmen,
- Gleichungen von Geraden im Raum in Parameterform aufstellen und gezielt anwenden, um z. B. einfache geometrische Nachweise zu führen.

zu Ebenen:

- Ebenengleichungen in Parameterform, Normalenform und Koordinatenform angeben, ineinander umwandeln und gezielt anwenden,
- die Lagebeziehung von einer Geraden und einer Ebenen erkennen und realisieren (besonders Parallelität und Orthogonalität),
- Lagebeziehungen zwischen Punkten und Ebenen erkennen und realisieren,
- Lagebeziehungen zwischen 2 Ebenen erkennen und realisieren (besonders Parallelität und Orthogonalität),
- den Durchstoßpunkt einer Geraden durch eine Ebene bestimmen (keine Schnittgerade zweier Ebenen bestimmen),

- das Skalarprodukt zur Berechnung des Schnittwinkels zwischen zwei Ebenen anwenden,
- das Skalarprodukt und die Beziehung  $\alpha = 90^\circ - \alpha'$  zur Berechnung des Schnittwinkels zwischen einer Geraden und einer Ebenen anwenden,
- den Abstand Punkt - Ebene bestimmen,
- die Gleichung für das Lot von einem Punkt auf eine Ebene analytisch bestimmen,
- die Volumenberechnung von Körpern analytisch durchführen.

zu Kreisen in der Ebene:

- die Gleichung eines Kreises in Koordinatenform bei vorgegebenem Mittelpunkt und Radius aufstellen,
- Mittelpunkt und Radius aus der Kreisgleichung der Form  $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$  bestimmen,
- die Lage eines Punktes bezüglich eines Kreises feststellen,
- Lagebeziehung von einem Kreis zu Geraden (Tangente, Sekante, Passante) feststellen und gegebenenfalls Schnittpunkte berechnen und Tangenten, Sekanten, Passanten realisieren,
- Tangentengleichungen an einen Kreis von einem Punkt des Kreises aufstellen (nicht von einem Punkt außerhalb).

### **Exemplarisches**

Die Schüler haben an einprägsamen Beispielen erste Vorstellungen und Einsichten zu folgenden Sachverhalten gewonnen:

- Beim Lösen eines linearen Gleichungssystems mit einem CAS benötigt man den Matrixbegriff und kann einen kurzen Einblick in deren Bedeutung bekommen.
- Die Gleichungen eines Kreises in der Ebene in Koordinatenform und in vektorieller Form sind ineinander überführbar.

## Aufgaben

Wenn nicht Anderes gefordert ist, sollen alle Koordinatensysteme kartesisch und alle Parameter aus dem Bereich der reellen Zahlen sein.

### Sicheres Wissen und Können

#### Aufgaben zu Geraden

1. Gegeben sind zwei Gleichungen  $y = -2x + 5$  und  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ .

- Zeigen Sie, dass beide Gleichungen dieselbe Gerade  $g$  beschreiben.
- Geben Sie die Gleichung einer Geraden  $h$  an, die orthogonal zu  $g$  verläuft.

2. Gegeben sind die Gerade  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$  und der Punkt  $P(-1 | 5 | 4)$ .

- Für welchen Wert von  $a$  liegt  $Q(-1 | 5 | a)$  auf  $g$ ?
- Geben Sie die Gleichung einer Geraden  $h$  an, die durch  $P$  und parallel zu  $g$  verläuft.
- Geben Sie die Gleichung einer Geraden  $k$  an, die  $g$  nur in einem Punkt schneidet.

3. Stellen Sie Gleichungen der Geraden auf, die durch den Punkt  $A(3 | 6 | 9)$  verlaufen und jeweils parallel zu den Koordinatenachsen sind.

4. Welche Richtung muss eine Gerade haben, wenn sie bei Spiegelung an einer Koordinatenebene in sich selbst übergeht?

5. Beschreiben Sie die besondere Lage der Geraden im Koordinatensystem.

a)  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b)  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

c)  $\vec{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

d)  $\vec{x} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

e)  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

6. Gegeben sind die Punkte  $A(2 | 2 | 2)$  und  $B(3 | 4 | 5)$ .

- Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden durch  $A$  und  $B$ .
- Bestimmen Sie eine Gleichung des Strahls  $\overrightarrow{AB}$ .
- Bestimmen Sie eine Gleichung der Strecke  $\overline{AB}$ .

7. Gegeben sind die Punkte  $P(-7 | 12 | 18)$  und  $Q(3 | -8 | 8)$ .

Welcher der Punkte  $A(4 | -10 | 7)$ ,  $B(1 | -4 | 10)$ ,  $C(-1 | 0 | 12)$ ,  $D(-9 | 16 | 20)$  oder  $E(-6 | 10 | 17)$  liegt

- auf der Geraden  $PQ$
- auf der Strecke  $\overline{PQ}$ ?

8. Gegeben ist eine Gerade durch den Punkt  $P(2 | 3 | -1)$  und den Richtungsvektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

- a) Zeichnen Sie die Gerade und geben Sie eine Parametergleichung an.  
 b) Zeichnen Sie die Punkte zu den Parameterwerten 2; -3; 0,5.
9. Gegeben sind die Punkte  $A(2 | 3)$ ,  $B(5 | 7)$  und  $C(1 | 4)$ .
- a) Ergänzen Sie einen weiteren Punkt  $D$  so, dass mit  $ABCD$  ein Parallelogramm entsteht.  
 b) Beschreiben Sie ein Verfahren zur Berechnung des Abstandes des Punktes  $D$  von der Diagonalen  $AC$ .  
 c) Beschreiben Sie ein Verfahren zur Berechnung des Winkels, unter dem sich die Diagonalen schneiden.

10. Gegeben ist die Gerade  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

- a) Geben Sie die Gleichung der Geraden  $h$  an, die parallel zu  $g$  durch  $P(3 | 1)$  verläuft.  
 b) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden  $k$ , die durch  $Q(1 | 2)$  verläuft und orthogonal zu  $g$  ist.
11. Gegeben sei ein Dreieck mit den Punkten  $A(2 | 1)$ ,  $B(5 | 4)$  und  $C(2 | 7)$ .
- a) Das Dreieck wird an der  $x$ -Achse ( $y$ -Achse) gespiegelt. Geben Sie die Koordinaten des Bilddreiecks an.  
 b) Weisen Sie nach, dass das Dreieck  $ABC$  ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck ist.  
 c) Wie lautet die Gleichung einer Geraden  $g$ , die für das Dreieck Symmetrieachse ist?  
 d) Ermitteln Sie auf möglichst einfache Weise den Abstand des Punktes  $B$  von der Seite  $\overline{AC}$  (den Abstand des Punktes  $A$  von der Seite  $\overline{BC}$ ).

12. Gegeben seien die Punkte der Dreiecke  $ABC_k$  mit  $A(5 | 7 | 3)$ ,  $B(2 | 1 | 1)$  und  $C_k(3 | k | 2)$ .
- a) Zeigen Sie, dass für jedes  $k \in \mathbb{R}$  ein Dreieck entsteht, d.h. nicht alle drei Punkte auf einer Geraden liegen.  
 b) Untersuchen Sie, für welche Werte  $k$  der Innenwinkel  $\beta$  ein spitzer (rechter, stumpfer) Winkel ist.

### Aufgaben zu Ebenen

13. Gegeben sind die Punkte  $A(2 | 0 | 3)$ ,  $B(1 | -1 | 5)$  und  $C(3 | -2 | 0)$ .  
 Geben sie drei verschiedene Parametergleichungen der Ebene  $\varepsilon(ABC)$  an.
14. Geben Sie für die Koordinatenebenen jeweils eine Gleichung in Parameter-, Koordinaten- und Normalenform an.
15. Ermitteln Sie verschiedene Normalenvektoren der Ebene  $\varepsilon: 2x - 3y + z - 7 = 0$ .  
 Geben Sie drei Punkte dieser Ebene  $\varepsilon$  an und ermitteln Sie eine Parametergleichung für diese Ebene.

16. a) Begründen Sie, dass die Ebenen  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  parallel zu einander liegen, aber nicht identisch sind.

$$\varepsilon_1: x - 3y + 2z - 9 = 0$$

$$\varepsilon_2: 4x - 12y + 8z - 9 = 0$$

- b) Ändern Sie eine der Ebenengleichungen so ab, dass die beiden Ebenen  
 (1) identisch sind;  
 (2) einander schneiden.

17. Weisen Sie nach, dass der Punkt A  $(-7 \mid -2 \mid 6)$  ein Punkt der Ebene  $\varepsilon$  mit

$$\varepsilon: -x + 3y - z + 5 = 0 \text{ ist.}$$

Ermitteln Sie die x-Koordinate des Punktes B  $(x \mid 0 \mid 5)$ , so dass er ebenfalls in der Ebene  $\varepsilon$  liegt.

18. Geben Sie die Gleichung einer Ebene  $\varepsilon_1$  an, in der die Gerade  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

liegt und einer Ebene  $\varepsilon_2$  an, die parallel zur Geraden  $g$  ist, aber  $g$  nicht enthält.

19. Die Punkte A  $(9 \mid -4 \mid 7)$ , B  $(3 \mid 8 \mid 1)$  und C  $(9 \mid 2 \mid 1)$  bestimmen eine Ebene  $\varepsilon$ .

Die Gerade  $g$  verläuft durch die Punkte P  $(1 \mid 1 \mid 2)$  und Q  $(3 \mid 0 \mid 5)$ .

- a) Beschreiben Sie ein Verfahren zur Prüfung der Lagebeziehung von  $\varepsilon$  und  $g$ .  
 b) Beschreiben Sie ein Verfahren zur Berechnung eines möglichen Schnittpunktes.
20. Die Gerade  $g$  verläuft durch die Punkte P  $(3 \mid 4 \mid 9)$  und Q  $(5 \mid 7 \mid 16)$ . Ermitteln Sie eine Gleichung für die Ebene  $\varepsilon$ , die durch den Punkt A  $(1 \mid -2 \mid 3)$  und senkrecht zur Geraden  $g$  verläuft.
21. Gegeben ist ein Punkt A  $(x \mid y \mid z)$  und eine Ebene  $\varepsilon$ . Beschreiben Sie anhand einer Skizze ein mögliches Verfahren zur Berechnung des Abstandes des Punktes A von der Ebene  $\varepsilon$ .

## Reaktivierbares Wissen und Können

### Aufgaben zu Geraden

22. Welche Punkte der Geraden  $y = 2x + 1$  haben vom Punkt P  $(1 \mid 2)$  den Abstand 1 LE?

23. Gegeben ist die Gerade  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

- a) Welchen Abstand hat der Koordinatenursprung zur Geraden  $g$ ?  
 b) Welchen Winkel schließt die Gerade  $g$  mit der x- bzw. y-Achse ein?

24. Gegeben sind die Punkte A  $(3 \mid -2 \mid 2)$ , B  $(6 \mid -3 \mid -1)$  und C  $(4 \mid 2 \mid 3)$ .

- a) Ergänzen Sie einen Punkt D so, dass die vier Punkte ABCD ein Parallelogramm ergeben.  
 b) Berechnen Sie den Umfang des Parallelogramms.  
 c) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Diagonalen.  
 d) Liegt der Punkt P  $(7,5 \mid 1,6 \mid 5,5)$  auf der Seite  $\overline{AC}$ ?



25. Gegeben ist das Dreieck ABC mit A (3 | 4), B (-1 | 5) und C (-4 | -3). Die Verbindungsstrecke der Seitenmittelpunkte mit den gegenüberliegenden Eckpunkten heißt **Seitenhalbierende**.
- Bestimmen Sie Gleichungen der Geraden, auf denen die 3 Seitenhalbierenden liegen.
  - Der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden heißt Schwerpunkt des Dreiecks.
  - Zeigen Sie, dass der Schwerpunkt die Seitenhalbierenden jeweils im Verhältnis 2:1 teilt.
26. Gegeben ist das Dreieck ABC mit A (3 | 4), B (-1 | 5) und C (-4 | -3).
- Bestimmen Sie Gleichungen der Geraden, auf denen die Höhen und die Mittelsenkrechten liegen.
  - Weisen Sie nach, dass sich die Höhen in einem Punkt schneiden.
  - Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten.
  - Berechnen Sie die Innenwinkel des Dreiecks.
27. Die Gleichung  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$  wird als Achsenabschnittsform einer Geradengleichung bezeichnet.  
Begründen Sie dies.
28. Gegeben ist das Dreieck ABC durch die Punkte A (-1 | 4 | 3), B (-4 | 2 | 1) und C (6 | -2 | 7). Auf der Geraden  $\underline{g}$ , die durch die Punkte A und B verläuft, liegt ein Punkt D so, dass die Strecken  $\overline{CB}$  und  $\overline{CD}$  die gleiche Länge haben. Bestimmen Sie D.

### Aufgaben zu Ebenen

29. Die Geraden  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$  und der Punkt A (2 | 3 | -1) bestimmen eine Ebene  $\varepsilon$ . Geben Sie für diese Ebene jeweils eine Gleichung in Parameter- und Koordinatenform an.
30. Die Punkte A (-1 | 2 | 5), B (3 | 0 | -4) und C (-2 | 3 | -1) bestimmen eine Ebene  $\varepsilon$ . Bestimmen Sie für  $\varepsilon$  eine Koordinatengleichung.
31. Die parallelen Geraden  $g$  und  $h$  spannen eine Ebene  $\varepsilon$  auf. Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Ebene  $\varepsilon$ .
- $$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{17}{3} \\ 3 \\ -\frac{2}{3} \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3,5 \\ 2,5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$
32. Die Ebene  $\varepsilon_1$  verläuft durch die Punkte  $A_1(0 | 0 | 0)$ ,  $B_1(3 | -3 | 0)$  und  $C_1(1 | 2 | 1)$ . Eine weitere Ebene  $\varepsilon_2$  wird durch  $A_2(1 | 1 | 1)$ ,  $B_2(4 | -2 | 1)$  und  $C_2(2 | 2 | 3)$  gegeben. Untersuchen Sie, ob  $\varepsilon_1$  parallel zu  $\varepsilon_2$  verläuft.

- 33.** Die Ebene  $\varepsilon_1$  verläuft durch die Punkte  $A_1(0|0|0)$ ,  $B_1(3|-3|0)$  und  $C_1(1|2|1)$ .  
Eine weitere Ebene  $\varepsilon_2$  wird durch  $A_2(1|1|1)$ ,  $B_2(4|-2|1)$  und  $C_2(2|y|z)$  gegeben.  
Geben Sie mögliche Koordinaten des Punktes  $C_2$  an, so dass  $\varepsilon_1$  parallel zu  $\varepsilon_2$  verläuft.
- 34.** Die Punkte  $A(9|-4|7)$ ,  $B(3|8|1)$  und  $C(9|2|1)$  bestimmen eine Ebene  $\varepsilon$ .  
Die Gerade  $g$  verläuft durch die Punkte  $P(1|1|2)$  und  $Q(3|0|5)$ .  
Weisen Sie nach, dass sich  $\varepsilon$  und  $g$  schneiden. Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes und den Schnittwinkel.
- 35.** Die drei Punkte  $A(4|0|3)$ ,  $B(10|6|0)$  und  $C(8|7|7)$  bestimmen eine Ebene  $\varepsilon$ .  
Zeigen Sie, dass die Gerade durch die Punkte  $R(0|2|9,5)$  und  $T(5|4|6)$  nicht in  $\varepsilon$  liegt.
- 36.** Eine Ebene  $\varepsilon$  wird durch die Punkte  $A(-2|1|3)$ ,  $B(5|1|-4)$  und  $C(1|0|-3)$  gegeben.  
Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von  $\varepsilon$  mit den Koordinatenachsen.
- 37.** Gegeben sind die Punkte  $P(2|1|1)$ ;  $Q(3|2|2)$ ;  $R(2|7|-2)$  und  $S(4|5|-2)$ .
- Geben Sie eine Parametergleichung für die Ebene  $\varepsilon$  durch die Punkte  $P$ ,  $Q$  und  $R$  an.
  - Untersuchen Sie die Lage der Geraden  $g$  durch  $O$  und  $S$  zur Ebene  $\varepsilon$ .
  - Geben Sie eine Gleichung einer zu  $\varepsilon$  parallelen Ebene  $\varepsilon_1$  durch den Punkt  $S$  an.
  - Geben Sie eine Gleichung einer auf  $\varepsilon$  senkrecht stehenden Ebene  $\varepsilon_2$  durch den Punkt  $S$  an.
- e) Begründen Sie, dass die Ebene  $\varepsilon^*$ : 
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$
 die Ebene  $\varepsilon$  schneidet
- f) Berechnen Sie den Schnittwinkel von  $\varepsilon$  und  $\varepsilon^*$ .
- 38.** Durch die Gleichung  $(t+1)x + y + (t-1)z + t + 3 = 0$  ist für jedes  $t \in \mathbb{R}$  eine Ebene  $E_t$  gegeben.
- Weisen Sie nach, dass für jedes  $t$  die Gerade  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ;  $s \in \mathbb{R}$  in der Ebene  $E_t$  liegt!
  - Welche Bedingungen müssen die Parameter  $t_1$  und  $t_2$  erfüllen, damit die Ebenen  $E_{t_1}$  und  $E_{t_2}$  aufeinander senkrecht stehen?
- 39.** Die Punkte  $A(9|-4|7)$ ,  $B(9|2|1)$  und  $C(3|8|1)$  bestimmen eine Ebene  $\varepsilon$ .  
Berechnen Sie den Abstand des Punktes  $P(-1|-2|3)$  von der Ebene  $\varepsilon$ .
- 40.** Gegeben sind die drei Punkte  $A(14|10|7)$ ,  $B(8|16|3)$  und  $C(-1|2|5)$ .  
Zeigen Sie, dass  $A$ ,  $B$  und  $C$  die Eckpunkte eines Dreiecks sind.  
Das Dreieck  $ABC$  ist senkrecht auf die  $x$ - $y$ -Ebene und auf die  $y$ - $z$ -Ebene zu projizieren.  
Berechnen Sie die Koordinaten der Eckpunkte der projizierten Dreiecke  $A'B'C'$  bzw.  $A''B''C''$ .

41. Die Punkte  $B(6 | 6 | 0)$  und  $B'(-2 | 8 | 2)$  liegen spiegelbildlich bezüglich der Ebene  $\varepsilon$ . Gesucht sind
- eine Gleichung für  $\varepsilon$
  - eine Gleichung für die Gerade  $g$ , die durch  $P(5 | 1 | 1)$  und senkrecht zu  $\varepsilon$  verläuft
  - die Koordinaten des von  $P$  auf die Ebene  $\varepsilon$  gefällten Lotes
  - eine Gleichung für die Ebene  $\varepsilon_1$ , die parallel zu  $\varepsilon$  und durch  $P$  verläuft
  - die Schnittpunkte der Ebene  $\varepsilon$  mit den Koordinatenachsen.
42. Ein Würfel  $ABCDEFGH$  besitzt die Eckpunkte  $A(0 | 0 | 0)$ ,  $C(1 | 1 | 0)$ ,  $E(1 | 0 | 1)$  und  $G(0 | 1 | 1)$ .
- Zeichnen Sie den Würfel.
  - Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte  $B$ ,  $D$ ,  $F$ ,  $H$ .
  - Wo durchstößt die Gerade  $g_{DE}$  die Ebene  $\varepsilon_{ACG}$ ? Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes.
43. Gegeben sind die 5 Punkte  $A(1 | 0 | 0)$ ,  $B(13 | 4 | -6)$ ,  $C(15 | 7 | 0)$ ,  $D(3 | 3 | 6)$  und  $S(11 | -2,5 | 2)$ .
- Zeigen Sie: Die Punkte  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$  bilden ein Rechteck.
  - Weisen Sie nach:  $S$  liegt nicht in der Ebene, in der das Rechteck  $ABCD$  liegt.
  - Prüfen Sie, ob die durch die 5 Punkte gebildete Pyramide  $ABCDS$  gerade ist.
  - Berechnen Sie das Volumen und den Oberflächeninhalt der Pyramide  $ABCDS$ .
44. Welche besondere Lage im kartesischen Koordinatensystem hat jeweils die Ebene  $\varepsilon$ ?
- $\varepsilon: x = 5$
  - $\varepsilon: z = 0$
  - $\varepsilon: x + y = 2$
  - $\varepsilon: x + y + z = 3$
45. Eine Pyramide  $ABCDS$  besitzt die Grundfläche  $ABCD$  mit  $A(2 | 0 | 1)$ ,  $B(4 | -6 | 10)$ ,  $C(-2 | 1 | 16)$ ,  $D(-4 | 7 | 7)$  und die Spitze  $S(9 | 6,5 | 10,5)$ . Ein ebener Schnitt verläuft parallel zur Grundfläche  $ABCD$  und zertrennt die Pyramide  $ABCDS$  auf halber Höhe. Es entstehen zwei Teilkörper  $K_1$  und  $K_2$ .
- Geben Sie eine Gleichung für die Schnittebene an.
  - Bestimmen Sie das Verhältnis der Volumina  $V_1:V_2$  der beiden Teilkörper  $K_1$  und  $K_2$ .
46. Die Gerade  $g$  verläuft durch die Punkte  $P(3 | 4 | 9)$  und  $Q(5 | 7 | 16)$ .
- Ermitteln Sie eine Gleichung für die Ebene  $\varepsilon$ , die durch den Punkt  $A(1 | -2 | 3)$  und senkrecht zur Geraden  $g$  verläuft.
  - Berechnen Sie den Abstand des Koordinatenursprungs von der Ebene  $\varepsilon$ .
47. Gegeben sind die Punkte  $A(0 | 2 | 3)$ ,  $B(1 | -2 | 6)$  und  $C(-4 | 2 | 15)$ . Diese drei Punkte bestimmen die Ebene  $\varepsilon$ .
- Die Ebene  $\varepsilon$  schneidet die Koordinatenachsen in den Punkten  $S_x$ ,  $S_y$  und  $S_z$ .  $S_x$ ,  $S_y$ ,  $S_z$  und der Koordinatenursprung  $O$  sind die Eckpunkte einer Pyramide. Berechnen Sie das Volumen dieser Pyramide.
  - Der Punkt  $M(6 | 5 | 5)$  ist der Mittelpunkt eines kugelförmigen Luftballons. Bis zu welchem Radius  $r$  kann man diesen Luftballon höchstens aufblasen, bis er die Ebene  $\varepsilon$  berührt? Geben Sie auch die Koordinaten des Punktes  $T$  an, in dem der Luftballon dann die Ebene  $\varepsilon$  berührt.



53. Wie ist der Radius des Kreises  $k$  mit dem Mittelpunkt  $M(-4 | 5)$  zu wählen, damit die Gerade  $g: y = \frac{5}{7}x - \frac{3}{7}$  Sekante, Tangente oder Passante von  $k$  ist?

### Exemplarisches

54. Welche der folgenden Gleichungen beschreiben die gleichen Kreise?

a)  $k_1: \left[ \vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right]^2 = 9$

b)  $k_2: (x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$

c)  $k_3: \left| \vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = 3$

d)  $k_4: x^2 - 4x + y^2 - 6y + 4 = 0$

e)  $k_5: (x+2)^2 + (y+3)^2 = 9$

f)  $k_6: (x-2)^2 + (y-3)^2 - 25 = 0$

g)  $k_7: \left| \vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = 5$

h)  $k_8: x^2 - 4x + y^2 - 6y - 12 = 0$

i)  $k_9: (x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$

### 3.4 Stochastik

#### Planungsvorschlag

##### Vorbemerkungen:

Der Vorschlag setzt voraus, dass die Ziele und Inhalte zur Stochastik in den Klassen 5 bis 9 dem Rahmenplan entsprechend realisiert wurden. In der Klasse 10 sollten die Schüler im Zusammenhang mit der Behandlung der Binomialverteilung mit Betrachtungs- und Schlussweisen der beurteilenden Statistik anhand von exemplarischen Beispielen bereits vertraut gemacht worden sein.

Std.	Inhalte / Schwerpunkte	Bemerkungen
<b>6</b>	<b>Rückblick</b>	Wiederholung Klasse 7 bis 9
	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Auswertung von statistischen Erhebungen und Zufallsexperimenten mit Kenngrößen der beschreibenden Statistik (Mittelwert, Zentralwert, Spannweite, Standardabweichung)</li> <li>– Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mit kombinatorischen Hilfsmitteln, mit Baumdiagrammen und aus Vierfeldertafeln,</li> <li>– Zufallsgrößen und deren Wahrscheinlichkeitsverteilung (Erwartungswert, Standardabweichung)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– reale Daten nutzen</li> <li>– Vergleich Mittelwert und Zentralwert</li> <li>– Darstellung von Daten und Berechnungen mit CAS</li> <li>– Verwenden der Produktregel und des Binomialkoeffizienten (Ziehen auf einen Griff)</li> </ul>
<b>4</b>	<b>Die Binomialverteilung</b>	Wiederholung aus Klasse 10
	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Bernoulli-Vorgänge und -ketten</li> <li>– Kenngrößen der Binomialverteilung (Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung)</li> <li>– Bestimmung von binomialen und summierten Wahrscheinlichkeiten unter Nutzung von Formeln, Tafeln und CAS</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Bevorzugter Einsatz des CAS</li> <li>– Lösen praktisch relevanter Aufgaben, reale Daten können genutzt werden</li> </ul>
<b>10</b>	<b>Elemente der beurteilenden Statistik</b>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Hypothese als Aussage über unbekanntem Zustand</li> <li>– Signifikante Abweichung vom Erwartungswert, Irrtumswahrscheinlichkeit (Signifikanzniveau)</li> <li>– Schluss von einer Stichprobe auf die Grundgesamtheit, Probleme der Stichprobenziehung</li> <li>– Überprüfen einer Hypothese zu einer Erfolgswahrscheinlichkeiten durch einen einseitigen Signifikanztest, Annahme- und Ablehnungsbereich, Interpretieren des Testergebnisses und des möglichen Fehlers 1. Art</li> <li>– exemplarische Beispiele zu Betrachtungsweisen bei 2 Hypothesen (Nullhypothese und Alternativhypothese), Interpretieren des Testergebnisses und der möglichen Fehler 1. und 2. Art</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Wiederholung aus Klasse 10</li> <li>– s. Hinweise</li> </ul>

## Hinweise zu ausgewählten Problemen

### *Zu den Begriffen signifikant, Signifikanzniveau und Irrtumswahrscheinlichkeit*

Die Bewertung von Ereignissen mit kleiner Wahrscheinlichkeit ist die Grundlage für die Bewertung von Behauptungen oder Vermutungen (Hypothesen) über eine unbekannte Erfolgswahrscheinlichkeit  $p$ . Solche Vermutungen kann man in bestimmten Fällen durch Experimente mit Bernoulli-Ketten der Länge  $n$  untersuchen. Wenn bei einem solchen Experiment eine sehr große Abweichung vom Erwartungswert  $E = n \cdot p$  festgestellt wird, spricht man von einer **signifikanten** (nicht mehr zufälligen) Abweichung vom Erwartungswert, bzw. von einem **signifikanten** Ergebnis. Zur Beurteilung der Größe der Abweichung vom Erwartungswert wird die Summe der Wahrscheinlichkeiten für das ermittelte Ergebnis und alle weiteren noch weiter abweichenden Ergebnisse berechnet, unter der Voraussetzung, dass die Erfolgswahrscheinlichkeit den vermuteten Wert hat. Die Grenze für diese summierte Wahrscheinlichkeit, ab der man von einer signifikanten Abweichung spricht, wird als **Signifikanzniveau**  $\alpha$  bezeichnet. Bei Qualitätskontrollen wird oft als Signifikanzniveau der Wert  $\alpha = 0,05$  verwendet, bei der Entwicklung neuer Medikamente wählt man meist  $\alpha = 0,01$ .

Der Begriff **Irrtumswahrscheinlichkeit** wird in zwei Bedeutungen verwendet. Zum einen wird er synonym zum Begriff Signifikanzniveau gebraucht und auch mit  $\alpha$  bezeichnet. Zum anderen ist damit der Wert der summierten Wahrscheinlichkeiten gemeint, der kleiner oder in Ausnahmefällen auch gleich dem Signifikanzniveau  $\alpha$  ist. Dieser Wert wird bei einem Signifikanztest als **Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art** bezeichnet.

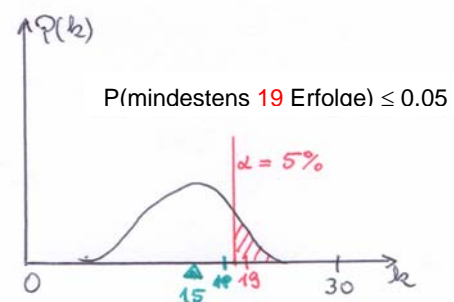
Die Schüler müssen beide Sachverhalte unterscheiden können, da sie bei der Ermittlung des Ablehnungsbereiches bei einem Signifikanztest die einzelnen Wahrscheinlichkeiten solange zu summieren haben, bis die Summe kleiner oder gleich  $\alpha$  ist. Der dabei ermittelte Wert der summierten Wahrscheinlichkeiten ist die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art. Um diesen Unterschied auch begrifflich verdeutlichen zu können, schlagen wir vor, den Begriff Irrtumswahrscheinlichkeit vor allem für die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art zu verwenden.

### **Zur Planung eines Signifikanztestes zur Überprüfung einer angenommenen Erfolgswahrscheinlichkeit**

Um einen solchen Test zu planen, müssen folgende Fragen beantwortet bzw. Festlegungen getroffen werden.

- (1) Lässt sich zu der Vermutung ein *Bernoulli-Vorgang* mit einer entsprechenden *Erfolgswahrscheinlichkeit*  $p$  finden, der unter gleichen Bedingungen wiederholt werden kann?
- (2) Welche Länge  $n$  soll die Bernoulli-Kette haben? Wie groß ist der Erwartungswert?
- (3) Welches Signifikanzniveau  $\alpha$  soll ausgehend vom Sachverhalt verwendet werden?
- (4) Liegt der Bereich zur Ablehnung der Vermutung rechts oder links vom Erwartungswert?
- (5) Zwischen welchen beiden Anzahlen liegt die Grenze zwischen einer signifikanten und einer nicht signifikanten Abweichung?

Es ist stets sinnvoll, eine Skizze anzufertigen. Auf den Achsen ist keine Einteilung erforderlich. Es reicht, nur die im nebenstehenden Beispiel angegebenen Werte zu markieren. Diese Werte sollten in der Reihenfolge ihrer Ermittlung eingetragen werden, zuerst  $n$  und  $E$  dann an einem senkrechten Strich  $\alpha$  und schließlich die beiden  $k$ -Werte. Die markierte Fläche entspricht der Irrtumswahrscheinlichkeit.



## Generelle Probleme eines Signifikanztestes

Mit einem Signifikanztest auf der Grundlage einer Binomialverteilung sollen Aussagen über eine *unbekannte* Erfolgswahrscheinlichkeit  $p$  gewonnen werden.

Die Hypothesen  $H_0$  (Nullhypothese) und  $H_1$  (Alternativhypothese) sind in der Praxis nicht gleichwertig. Als Nullhypothese (kein signifikanter Unterschied zur Vermutung, zur Behauptung bzw. zum bisherigen Erkenntnisstand) wird die vermutete Erfolgswahrscheinlichkeit, der bisherige Stand der Erkenntnis, die bisherige Erfolgswahrscheinlichkeit, eine Behauptung eines Herstellers u. ä. bezeichnet. Die Alternativhypothese beinhaltet die Behauptung einer anderen Erfolgswahrscheinlichkeit, die Zweifel eines Kunden, die zu überprüfenden neuen Forschungsergebnisse, u. ä. Daraus ergeben sich inhaltliche Betrachtungen zu den Fehlern 1. und 2. Art.

Mit einem Signifikanztest kann nicht die Richtigkeit der Nullhypothese bewiesen werden, sondern man kann lediglich zeigen, dass die Daten nicht gegen die Nullhypothese sprechen. Tritt keine signifikante Abweichung auf, so kann man nur feststellen, dass die Versuchsergebnisse *nicht gegen die Vermutung* sprechen, d. h. die Vermutung kann auf Grundlage dieser Ergebnisse *nicht abgelehnt* werden. Deshalb sollte auch nicht von der Annahme der Nullhypothese sondern von der *Nichtablehnung* der Nullhypothese gesprochen werden. Die Wahrscheinlichkeiten für die Fehler 1. und 2. Art erlauben keine Aussagen über die Wahrscheinlichkeit der beiden Hypothesen. Den Hypothesen wird keine Wahrscheinlichkeit zuerkannt. Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art ist die Wahrscheinlichkeit, die Nullhypothese fälschlicherweise abzulehnen unter der Voraussetzung, dass die Erfolgswahrscheinlichkeit tatsächlich den vermuteten Wert hat.

## Ziele für Klasse 12

### Sicheres Wissen und Können

Die Schülerinnen und Schüler

- kennen den Unterschied von Grundgesamtheit und Stichprobe,
- wissen, dass bei der Auswahl einer Stichprobe, darauf geachtet werden muss, dass diese möglichst repräsentativ für die Grundgesamtheit ist,
- wissen, dass es in vielen Fällen nicht möglich ist, eine repräsentative Stichprobe zu ziehen und man in diesen Fällen die Bedingungen in der ausgewählten Stichprobe möglichst genau erfassen muss,
- wissen, dass es vom Sachverhalt abhängt, wie groß der Stichprobenumfang sein kann,
- wissen, dass man von einer Stichprobe auf eine Gesamtheit schließen und dabei Fehler machen kann,
- wissen, dass zur Vermeidung von Fehlern der Stichprobenumfang  $n$  möglichst groß sein sollte,
- wissen, dass bei einem Signifikanztest aus den Ergebnissen einer Untersuchung in einer Stichprobe begründete Schlussfolgerungen über die angenommene Erfolgswahrscheinlichkeit in der Gesamtheit gezogen werden können,
- kennen die Bezeichnungen „Annahmehbereich“ und „Ablehnungsbereich“,
- wissen, dass bei einem Testergebnis, das im Annahmehbereich liegt, die Hypothese nicht abgelehnt werden kann, d.h. dass das Ergebnis *nicht gegen* die angenommene Erfolgswahrscheinlichkeit spricht,
- wissen, dass das Ergebnis aus einer Stichprobe *gegen* die angenommene Erfolgswahrscheinlichkeit spricht, wenn die Wahrscheinlichkeit für größere Abweichungen vom Erwartungswert geringer als das Signifikanzniveau ist,



- dass die Größe des Signifikanzniveaus vom Sachverhalt abhängt,
- wissen, dass der Begriff „Irrtumswahrscheinlichkeit“ manchmal als Synonym für „Signifikanzniveau“ und manchmal als Synonym für „Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art“ benutzt wird.

Die Schülerinnen und Schüler können

- zu einer gegebenen Testsituation die damit überprüften zufälligen Vorgänge, ihre möglichen Ergebnisse und die sie beeinflussenden Bedingungen angeben,
- den Zusammenhang zwischen den Begriffen „Signifikanzniveau“ und „signifikante Abweichung vom Erwartungswert“ an Beispielen erläutern,
- Annahme- und Ablehnungsbereiche oder eine Entscheidungsregel formulieren, wenn dafür notwendige Werte gegeben sind,
- können an Beispielen erläutern, welche Konsequenzen sich bei einem Signifikanztest aus einem Fehler 1. Art für die beteiligten Personen ergeben,
- können beurteilen, ob Formulierungen zum Fehler 1. Art zutreffend sind,
- können zu einer gegebenen Testsituation die Fehler 1. und 2. Art inhaltlich beschreiben und Konsequenzen angeben, die ein solcher Fehler nach sich ziehen könnte.

### Reaktivierbares Wissen und Können

Die Schülerinnen und Schüler können

- die Anzahl der Erfolge bestimmen, so dass die Summe der Einzelwahrscheinlichkeit kleiner als ein vorgegebenes Signifikanzniveau  $\alpha$  ist, wenn  $n$ ,  $p$  und  $\alpha$  gegeben sind,
- die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art in konkreten Anwendungssituationen angeben, wenn eine Entscheidungsregel bekannt ist,
- einen einseitigen Signifikanztest zu einer unbekanntem Erfolgswahrscheinlichkeit planen, wenn  $n$ ,  $p$  und  $\alpha$  gegeben sind und dazu eine Entscheidungsregel angeben.

### Exemplarisches

Die Schülerinnen und Schüler haben an einprägsamen Beispielen grundlegende Probleme stochastischer Schlussweisen kennen gelernt und folgende Einsichten mithilfe der Binomialverteilung gewonnen:

- Mit einem Signifikanztest kann auch untersucht werden, ob ein neues Produkt oder ein neues Vorgehen zu signifikant besseren Ergebnissen führt. Dazu wird eine Nullhypothese  $H_0$  und eine Alternativhypothese  $H_1$  über eine unbekanntem Wahrscheinlichkeit aufgestellt. Als Nullhypothese wird meist der bisherige Stand der Erkenntnis und als Alternativhypothese die vermutete Verbesserung angenommen
- Bei wachsendem Umfang der Stichprobe liegt der Annahmehereich prozentual immer dichter am Erwartungswert, d. h. bei großen Stichprobenumfängen führen bereits kleine prozentuale Abweichung zu einem signifikanten Ergebnis.
- Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art ist nur zu berechnen, wenn neben der unbekanntem Erfolgswahrscheinlichkeit  $p_0$  eine alternative Wahrscheinlichkeit  $p_1$  gegeben ist bzw. angenommen wird.
- Wenn man bei einem Test den Ablehnungsbereich so verändert, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art kleiner wird, vergrößert sich die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art.
- Wenn man bei einem Sachverhalt die Hypothese „genau  $p_0$  trifft zu“ testen will, führt man einen zweiseitigen Signifikanztest durch, bei dem das Signifikanzniveau je zur Hälfte auf zwei Ablehnungsbereiche aufgeteilt wird.

## Aufgaben

### Sicheres Wissen und Können

1. Es sollen folgende Testsituationen betrachtet werden.
  - A: Auf einem im Hafen angekommenen Frachtschiff aus Übersee wird die Qualität der eingeführten Bananen geprüft.
  - B: In einer Konservenfabrik werden Dosen auf eine Mindesteinwaage überprüft.
  - C: Ein Hersteller von PKW will bei einer neuen Fahrzeugserie die Sicherheit der Insassen in einem Crashtest testen lassen.
  - D: Eine Mathematiklehrerin will in einer mündlichen Abiturprüfung das mathematische Wissen und Können eines Schülers prüfen.
  - E: Ein Fußballtrainer will die Trefferwahrscheinlichkeit seiner Spieler beim Torwandschießen überprüfen.
  - a) Geben Sie für die Situationen A bis E jeweils eine Grundgesamtheit und eine mögliche Stichprobe an.
  - b) Diskutieren Sie für die Situationen A bis E, wie groß eine Stichprobe sein könnte und was man bei der Auswahl einer repräsentativen Stichprobe beachten müsste.
  - c) Geben Sie für die Situationen A bis E jeweils an, was es bedeutet, von der Stichprobe auf die Grundgesamtheit zu schließen und welche Fehler man dabei machen könnte.
2. Geben Sie eine Testsituation an, bei der man aufgrund der Bedingungen nur eine sehr kleine Stichprobe ziehen kann.
3. Im Folgenden ist jeweils ein Einzelvorgang beschrieben. Nennen Sie ein Merkmal mit zwei Ausprägungen, das bei diesem Vorgang untersucht werden könnte. Geben Sie eine mögliche Menge von  $n$  Vorgängen an, die als Bernoullikette der Länge  $n$  bzw. als Stichprobe für einen Test angesehen werden könnte. Nennen Sie jeweils zwei Bedingungen, die dabei konstant bleiben müssen.
  - a) In einer Apfelplantage reift ein Apfel an einem Baum.
  - b) In einer Bäckerei wird ein Brötchen gebacken.
  - c) In einer Getränkefabrik wird eine Flasche automatisch gefüllt.
  - d) Ein Schüler liegt mit einer Grippe im Bett und bekommt ein Antibiotikum.
  - e) Ein Fahrschüler lernt bei einem Fahrlehrer Auto fahren.
4. In folgenden Fällen ist es nicht möglich, für einen Signifikanztest aus der Grundgesamtheit aller Deutschen durch eine Zufallsauswahl eine Stichprobe zu ziehen, weil die untersuchten Menschen gewisse Voraussetzungen erfüllen müssen. In diesen Fällen müssen zwei Stichproben gebildet werden, in denen die Menschen sich in einem bestimmten Merkmal unterscheiden, während die anderen Merkmale möglichst konstant gehalten werden.
  - a) Geben Sie an, welche Voraussetzungen die untersuchten Menschen in den folgenden Situationen erfüllen müssen.
  - b) Nennen Sie jeweils das wesentliche Merkmal, durch das sich die Menschen in den beiden Stichproben unterscheiden müssen.
  - c) Nennen Sie jeweils andere Merkmale, die in den Stichproben konstant gehalten werden müssen.
    - A: Ein pharmazeutisches Unternehmen will ein neues Medikament zur Heilung einer bestimmten Krankheit testen.
    - B: Ein Forscherteam möchte eine neue Methode zur Behandlung der Bruchrechnung erproben.
    - C: Ein Zahnarzt will nachweisen, dass zum Ziehen eines Zahnes eine Hypnose des Patienten besser geeignet ist als eine örtliche Betäubung.

5. Bei der Produktion von Glühlampen dürfen höchstens 10 % einer bestimmten Sorte eine Brenndauer von weniger als 1500 Stunden haben. Der laufenden Produktion werden in einer Firma 100 Glühlampen entnommen. In einem Langzeittest wird ihre Brenndauer geprüft. Man weiß, dass bei einer angenommenen Erfolgswahrscheinlichkeit von 10 % die Wahrscheinlichkeit, dass 16 oder mehr Glühlampen weniger als 1500 Stunden brennen, kleiner als 5 % ist.

Beschreiben Sie anhand dieses Beispiels den Zusammenhang zwischen den Begriffen „Signifikanzniveau“ und „signifikante Abweichung vom Erwartungswert“.

6. Eine Firma beziffert ihren Ausschussanteil auf höchstens 5 %. Ein Abnehmer, der diese Waren verkaufen will, prüft 20 Artikel.
- Wie viele Ausschussartikel kann der Abnehmer in seiner Stichprobe erwarten?
  - Der Abnehmer hat in seiner Stichprobe keinen Ausschuss gefunden. Welche der folgenden Schlussfolgerungen kann er aus diesem Resultat ziehen?  
A: Die Firma produziert keinen Ausschuss.  
B: Die Firma hat ihren Ausschussanteil richtig beziffert.  
C: Das Resultat der Stichprobe spricht nicht gegen die Angabe der Firma.

7. Nadine ärgert sich, weil sie beim Lernen von Englischvokabeln am kommenden Tag immer nur etwa die Hälfte der Vokabeln behalten hat. Eine Freundin erklärt ihr eine neue Lernmethode, die Nadine bei der nächsten Lektion sofort anwendet. Beide Mädchen sehen die neue Methode als besser an, weil Nadine durch sie am nächsten Tag von 20 Vokabeln noch 12 richtig wiedergeben kann. Diskutieren Sie die Schlussweise der Mädchen mithilfe der angegebenen Werte aus der Tabelle einer summierten Binomialverteilung.

k	Summe der Wahrscheinlichkeiten von 0 bis k für $n = 20$ und $p = 0,5$
11	0,74828
12	0,86841
13	0,94234
14	0,97931

8. Eine Arzneimittelfirma bietet zur Behandlung einer bestimmten Tierkrankheit ein Präparat an, das angeblich bei mindestens 70 % der behandelten Tiere zur Heilung führt. Bei einer Überprüfung werden von 20 behandelten Tieren nur 10 geheilt. Lässt sich daraus auf einem Signifikanzniveau von 5 % ein Widerspruch gegen die Behauptung der Firma herleiten? Begründen Sie dies unter Verwendung der angegebenen Werte aus der Tabelle einer summierten Binomialverteilung.

k	Summe der Wahrscheinlichkeiten von 0 bis k für $n = 20$ und $p = 0,7$
10	0,04796
11	0,11333
12	0,22773
13	0,39199

9. Will man testen, ob ein neues Produkt besser als ein herkömmliches ist, muss man neben dem Stichprobenumfang auch ein Signifikanzniveau  $\alpha$  festlegen. Es hat sich eingebürgert, für  $\alpha$  die Werte 1 % oder 5 % zu verwenden.

Die Wirksamkeit der folgenden neuen Produkte soll gegen herkömmliche getestet werden. Diskutieren Sie, warum es sinnvoll ist, von den folgenden Paaren jeweils eins auf dem Signifikanzniveau von 1 % und das andere auf dem 5 % - Niveau zu testen.

- Vitaminpräparat - Gripeschutzimpfstoff
- Navigationsgerät - Energiesparlampe
- Kopfschmerztablette - Methode zum Erlernen einer Fremdsprache.

10. Ein Sportlehrer behauptet, er könne beim Anlauf eines Schülers schon vier Meter vor dem Erreichen des Absprungbalkens in mindestens 90 % aller Fälle voraussagen, ob der Schüler übertritt oder nicht. Die Hypothese des Sportlehrers wollen die Schüler bei einem Sportfest bei 50 Sprüngen testen. Als Ablehnungsbereich wird der Bereich  $\{0; 1; \dots; 39; 40\}$  festgelegt. Formulieren Sie eine entsprechende Entscheidungsregel.
11. Bei der Produktion von Farbmonitoren sollen nach den Qualitätsstandards einer Firma höchstens 5 % aller ausgelieferten Farbmonitore Fehler haben. Zur Überprüfung der Hypothese  $H_0: p \leq 0,05$  zieht ein Kontrolleur aus der Tagesproduktion des Betriebes eine Zufallsstichprobe von 20 Farbmonitoren. Der Ablehnungsbereich für die Hypothese  $H_0$  ist  $\{2; 3; 4, \dots; 20\}$ . Geben Sie jeweils eine mögliche Konsequenz für den Betrieb an, wenn der Kontrolleur im Ergebnis seiner Kontrolle folgende Anzahl fehlerhafte Monitore findet.
- einen fehlerhaften Farbmonitor
  - 3 fehlerhafte Farbmonitore.
12. Eine Firma, die mit elektronischen Bauteilen handelt, hat den Verdacht, dass die Ausfallquote eines bestimmten Bauteils höher als die vom Hersteller angegebene Wahrscheinlichkeit von höchstens 1 % ist. In einem Test wird dieser Verdacht überprüft. Dazu werden 100 Teile untersucht. Der Ablehnungsbereich für die Hypothese  $H_0: p \leq 0,01$  ist auf dem Signifikanzniveau von 5 % die Menge  $\{4; 5; \dots; 100\}$ . Es stellt sich heraus, dass in der Stichprobe 4 defekte Bauteile sind. Die Handelsfirma lehnt nach diesem Testergebnis die Annahme der Sendung ab und schickt sie wieder an den Hersteller zurück. Sie bemüht sich, einen neuen Lieferanten für das Produkt zu finden.
- Formulieren Sie den möglichen Fehler bei dieser Entscheidung
  - Geben Sie je eine Konsequenz für die Herstellerfirma und für den Handelsfirma an, die sich bei einer Fehlentscheidung ergibt.
13. Es wird ein Signifikanztest zur Hypothese  $H_0$  auf dem Signifikanzniveau von  $\alpha = 5\%$  durchgeführt. Welche der folgenden Aussagen sind bei dem jeweiligen Testergebnis zutreffend?
- Das Testergebnis liegt im Annahmehereich.
    - Die Hypothese  $H_0$  ist richtig.
    - Die Hypothese  $H_0$  ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % richtig.
    - Die Hypothese  $H_0$  kann aufgrund des Testergebnisses nicht abgelehnt werden.
    - Die Wahrscheinlichkeit, dass  $H_0$  falsch ist, beträgt 5 %.
    - Wenn  $H_0$  richtig ist, handelt es bei dem Testergebnis um eine nicht signifikante Abweichung vom erwarteten Ergebnis.
    - Wenn  $H_0$  richtig ist und wenn es möglich wäre, den Test unter den gleichen Bedingungen mehrfach zu wiederholen, so liegt das Ergebnis bei etwa 95 % der Tests ebenfalls im Annahmehereich.
  - Das Testergebnis liegt im Ablehnungsbereich.
    - Die Hypothese  $H_0$  ist falsch.
    - Die Hypothese  $H_0$  ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % falsch.
    - Die Hypothese  $H_0$  muss aufgrund des Testergebnisses abgelehnt werden.
    - Die Wahrscheinlichkeit, dass  $H_0$  richtig ist, beträgt nur 5 %.
    - Wenn  $H_0$  richtig wäre, würde es sich bei dem Testergebnis um eine signifikante Abweichung vom erwarteten Ergebnis handeln.
    - Wenn  $H_0$  richtig ist und wenn es möglich wäre, den Test unter den gleichen Bedingungen mehrfach zu wiederholen, so liegt das Ergebnis bei etwa 5 % der Tests ebenfalls im Ablehnungsbereich.

14. Es sollen folgende Testsituationen betrachtet werden.

- A: Ein Pilzsammler möchte überprüfen, ob ein gefundener Pilz giftig ist. Er stellt vor der weiteren Untersuchung die These auf „Der Pilz ist giftig.“
- B: Eine Firma möchte die Qualität eines ihrer Produkte verbessern. Dazu sind erhebliche Investitionen nötig, die mit einer Erhöhung des Preises verbunden sind. Um das erwartete Käuferverhalten zu testen, befragt die Firma 1000 ihrer Kunden, ob sie eine Preiserhöhung bei wesentlich verbesserter Qualität akzeptieren würden. Für den Test wird folgende Hypothese aufgestellt: „Die Verbraucher akzeptieren keine Preiserhöhung.“
- C: Ein junges Forscherteam hat mit erheblichen Projektmitteln einen neuen Impfstoff für eine gefährliche Tierseuche entwickelt, der den bisher verwendeten Impfstoff ablösen soll. Für einen Test wird die Hypothese aufgestellt: „Der neue Impfstoff ist nicht besser als der bisherige.“
- Geben Sie eine Konsequenz für das Handeln der Firmen bzw. Personen bei einer Ablehnung der Hypothese an.
  - Geben Sie eine Konsequenz für das Handeln der Firmen bzw. Personen bei einer Nichtablehnung der Hypothese an.
  - Geben Sie an, was es jeweils bedeutet, bei der Entscheidung einen Fehler 1. Art (Ablehnung einer richtigen Hypothese) zu machen.
  - Nennen Sie jeweils eine mögliche Folge für die Firmen bzw. Personen, die sich aus einem Fehler 1. Art ergeben.
  - Geben Sie an, was es jeweils bedeutet, bei der Entscheidung einen Fehler 2. Art (Nichtablehnung einer falschen Hypothese) zu machen.
  - Nennen Sie jeweils eine mögliche Folge für die Firmen bzw. Personen, die sich aus einem Fehler 2. Art ergeben.

### Reaktivierbares Wissen und Können

15. Eine Arzneimittelfirma bietet zur Behandlung einer bestimmten Tierkrankheit ein Präparat an, das bei mindestens 70 % der behandelten Tiere zur Heilung führen soll. In einer Untersuchung werden 100 erkrankte Tiere, die mit dem Präparat behandelt werden, beobachtet. Für welche Anzahlen von Tieren, die bei der Behandlung nicht geheilt werden, kann man die Angabe der Firma auf einem Signifikanzniveau von 5 % ablehnen?
16. Der Mathematiklehrer Ypsilon behauptet, dass höchstens 30 % der Schüler der Abiturstufe die Quadratzahlen von 11 bis 19 auswendig kennen. Seine Kollegen halten diese Zahl für zu gering. Bei einem Test soll die Behauptung des Mathematiklehrers abgelehnt werden, falls von 50 zufällig ausgewählten Schülern der Abiturstufe mindestens 20 das Quadrat von 17 auf Anhieb angeben können.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei diesem Test die Behauptung von Herrn Ypsilon fälschlicherweise abgelehnt wird?
  - Wie müsste der Ablehnungsbereich verändert werden, wenn das Signifikanzniveau 5 % betragen soll?
17. Der Hersteller von Glühlampen muss garantieren, dass höchstens 3 % einer bestimmten Sorte von Glühlampen eine Brenndauer von weniger als 1500 Stunden haben. Der laufenden Produktion werden 100 Glühlampen entnommen. Planen Sie einen Signifikanztest, mit dessen Hilfe die Firma die Einhaltung der Norm auf einem Signifikanzniveau von 5 % überprüfen kann.

18. Die Englischlehrerin Frau Zimmermann schätzt ihren Schüler Karl als sehr schwach ein. Karl beteuert lautstark, dass er die neuen Vokabeln zu Hause gut gelernt und beim Üben immer mehr 80 % der Vokabeln gewusst hat.
- Die Behauptung von Karl soll mit einem Test aus 20 Vokabeln überprüft werden. Stellen Sie einen Testplan auf.
  - Diskutieren Sie die möglichen Fehlentscheidungen und ihre Konsequenzen für Karl und die Lehrerin Frau Zimmermann.
19. Eine Weinkellerei lädt 200 Kunden zu einer Weinprobe ein. Erfahrungsgemäß kommt es mit 60 % der Anwesenden zu Verkaufsabschlüssen. Einem Verkäufer gelingt es, 130 Kunden zu neuen Abschlüssen zu überreden. Weitere Kunden sind noch unschlüssig. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Erfolg auf das Geschick des Verkäufers zurückzuführen ist und nicht auf zufällige Einflüsse?
20. In einer Schule mit 450 Schülern können sich die Schüler in den großen Pausen in der Schulkantine an Automaten selbst mit Getränken oder Snacks bedienen oder bei einer Verkäuferin Baguetten oder warme Mahlzeiten kaufen. Erfahrungsgemäß schaffen es in einer großen Pause 90 Schüler, etwas aus den Automaten zu kaufen, wovon 80 % ein Getränk wählen. Von den 50 Schülern, die sich von der Verkäuferin etwas zu essen holen, nehmen  $\frac{2}{5}$  ein Baguette. Es wird davon ausgegangen, dass ein Schüler in der Pause nur einen Kauf vornimmt
- Stellen Sie die Angaben in einem Baumdiagramm mit allen Wahrscheinlichkeiten dar.
  - Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass ein beliebiger Schüler dieser Schule in der großen Pause ein Getränk aus dem Automaten kauft.
  - Welchen wöchentlichen Gewinn kann der Betreiber der Automaten durch den Getränkeverkauf erwarten, wenn er zwei große Pausen an 5 Schultagen zugrunde legt und davon ausgegangen werden kann, dass der Betreiber durch den Verkauf eines Getränkes 0,15 € Gewinn hat.
- Die Schulmensa bietet zur Mittagszeit regelmäßig zwei Wahlessen an, ein Fischgericht und ein Fleischgericht. Das Fischgericht wird in der Regel von etwa 20 % der Essensteilnehmer gewählt.
- Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der von 100 Essenteilnehmern folgende Anzahlen das Fischgericht wählen  
(1) genau 18 (2) mindestens 10 (3) höchstens 20 (4) zwischen 16 und 22.
  - Unter wie vielen Essenteilnehmern ist mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95% mindestens einer dabei, der das Fischgericht wählt?
  - Der Küchenchef hat die Anweisung erhalten, stets so viele Portionen von jedem Gericht zuzubereiten, dass er der Nachfrage nach diesem Gericht mit einer Sicherheit von mindestens 90 % entsprechen kann. Wie viele Portionen des Fischgerichtes und des Fleischgerichtes muss er bereithalten, wenn er mit 250 Essenteilnehmern rechnet?
  - Ein Schüler kommt an einem Tag als einer der letzten zum Essen und muss feststellen, dass es kein Fischgericht mehr gibt. Er beschwert sich beim Küchenchef und verlangt, dass er in Zukunft mit 99 % Sicherheit stets beide Gerichte zur Auswahl hat. Wie viele Essensportionen würden an jedem Tag übrig bleiben, wenn der Küchenchef sich auf diese Forderung einlassen würde?

### Exemplarisches

21. Eine Firma, die Kugelschreiber herstellt, muss garantieren, dass mindestens 95 % ihrer Produktion fehlerfreie Schreibgeräte sind. Ein neuer Mitarbeiter in der Abteilung für Qualitätskontrolle ist der Meinung, dass ein Eingriff in den Produktionsablauf nur erfolgen

muss, wenn in einer Stichprobe, die der laufenden Produktion entnommen wird, weniger als 90 % fehlerfreie Schreibgeräte sind.

Diskutiere die Ansicht des Mitarbeiters für die folgenden Stichprobenumfänge:

A: 10 Kugelschreiber                      B: 100 Kugelschreiber                      C: 1000 Kugelschreiber

Bestimme dazu für jeden Stichprobenumfang

a) die Größe des Fehlers 1. Art

b) die maximal mögliche prozentuale Abweichung vom Erwartungswert bei einem Signifikanzniveau von 5 %.

- 22.** Aufgrund langjähriger Erfahrungen weiß man, dass die bisher verwendete Therapiemethode zur Heilung einer bestimmten Krankheit nur eine Erfolgsquote von 50 % hat. Ein Forscherteam hat eine neue Methode entwickelt und vermutet nach ersten Erprobungen, dass die Erfolgsquote ihrer Methode weit höher liegt. Zur Versuchsplanung überlegen sie, dass die Anwendung der Methode bei einem erkrankten Patienten als Bernoulli-Vorgang aufgefasst werden kann. Als Wahrscheinlichkeit für den Erfolg „Der Patient wird geheilt“ wählen sie die bisherige Heilungsquote von 50 %. Es sollen 30 Patienten, die alle an der Krankheit leiden, behandelt werden. Die Forscher wählen als Signifikanzniveau  $\alpha = 1\%$ .
- Formulieren Sie eine Nullhypothese und eine Alternativhypothese für die Erprobung des neuen Medikamentes.
  - Stellen Sie einen Versuchsplan zur Überprüfung der Vermutung der Forscher auf.
  - Diskutieren Sie die Folgen möglicher Fehlentscheidungen.
- 23.** Bei Kacheln für Kamine wird es im allgemeinen akzeptiert, wenn bis zu 10 % der Kacheln kleinere farbliche Abweichungen aufweisen. Ein Ofensetzer will dies bei einer Lieferung von Kacheln überprüfen und öffnet dazu einen zufällig ausgewählten Karton mit 25 Kacheln. Wenn unter diesen 25 Kacheln bei vier oder mehr Kacheln farbliche Abweichungen auftreten, will er die Lieferung ablehnen. Die Nullhypothese  $H_0$  bei diesem Test des Ofensetzers soll lauten, dass der tatsächliche Anteil fehlerhafter Kacheln höchstens 10 % beträgt.
- Geben Sie die Alternativhypothese  $H_1$ , den Ablehnungsbereich für  $H_0$  und die Entscheidungen an, die der Ofensetzer nach Beendigung des Testes treffen kann.
  - Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art und erläutern Sie, was eine solche Fehlentscheidung für den Ofensetzer und für den Hersteller der Kacheln bedeutet.
  - Geben Sie an, worin eine Fehler 2. Art bei diesem Test besteht und welche Konsequenzen sich bei einer solchen Fehlentscheidung für den Ofensetzer und für den Hersteller der Kacheln ergeben. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art, wenn der wahre Anteil fehlerhafter Kacheln in der Lieferung 15 %, 20 %, 25 % oder 30 % beträgt.
  - Vergleichen Sie die Bedeutung eines Fehlers 1. Art und eines Fehlers 2. Art für den Hersteller der Kacheln sowie für den Ofensetzer.
  - Wie müsste der Ablehnungsbereich des Testes verändert werden, damit das Risiko für den Hersteller, dass eine einwandfreie Sendung irrtümlich durch den Ofensetzer abgelehnt wird, kleiner als 5 % ist? Geben Sie für diesen veränderten Test die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art, wenn der tatsächliche Anteil fehlerhafter Kacheln 15 %, 20 %, 25 % oder 30 % beträgt. Was würde dies für den Ofensetzer bedeuten?
  - Wie müsste der Ablehnungsbereich des Testes verändert werden, damit das Risiko für den Ofensetzer kleiner wird, irrtümlich eine Sendung anzunehmen, bei der der Anteil fehlerhafter Kacheln größer als 10 % ist. Berechnen Sie für den so veränderten Ablehnungsbereich die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. sowie die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art, wenn der tatsächliche Anteil fehlerhafter Kacheln 15 %, 20 %, 25 % oder 30 % beträgt. Was würde dies für den Hersteller bedeuten?