

## 2 Ziele und Aufgaben Klasse 11

### 2.1 Planungsvorschlag für die Klasse 11

Std.	Inhalte / Schwerpunkte	Bemerkungen
<b>13</b>	<b>Zahlenfolgen</b>	
3	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Begriff der Zahlenfolge (allgemein)</li> <li>- Darstellung</li> <li>- explizite und rekursive Zuordnungsvorschrift</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- arithmetische und geometrische Zahlenfolgen nur als Beispiele</li> <li>- in überschaubaren Fällen auch ohne CAS</li> <li>- Untersuchung rekursiv definierter Folgen mit CAS zur Leistungsdifferenzierung</li> </ul>
2	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Monotonienachweise (wachsende, fallende bzw. konstante Folgen)</li> <li>- Folgen mit wechselnder Monotonie</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Inhaltliche Bezüge zum Änderungsverhalten einer Funktion herstellen</li> <li>- Deutung der Ergebnisse der Differenzbildung</li> </ul>
5	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Grenzwerte, Grenzwertuntersuchungen, Grenzwertsätze</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Nutzung des CAS (grafisch und numerisch)</li> <li>- Definition und inhaltliches Verständnis</li> </ul>
3	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Begriff der Partialsumme und der Partialsummenfolge (Reihe)</li> <li>- Umgang mit dem Summenzeichen</li> <li>- Berechnungen mit CAS</li> <li>- Anwendungsaufgaben</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Grenzwertbetrachtungen zu ausgewählten Partialsummen</li> </ul>
<b>8</b>	<b>Grenzwerte und Stetigkeit</b>	
2	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Grenzwerte von Funktionen an einer Stelle bzw. im Unendlichen</li> <li>- Übertragung der Grenzwertsätze von Folgen auf Funktionen</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- inhaltlich- anschaulicher Grenzwertbegriff</li> <li>- Grundprinzip: Untersuchung mit Hilfe von Testfolgen</li> <li>- komplizierte Funktionsgleichungen mit CAS</li> </ul>
6	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Untersuchung von gebrochen-rationalen und abschnittsweise definierten Funktionen auf Grenzwerte</li> <li>- Begriff der Stetigkeit von Funktionen</li> <li>- Untersuchung von Funktionen auf Stetigkeit unter Nutzung der Definition</li> <li>- Definitionslücken (Polstellen, stetig behebbare Definitionslücken) und Sprungstellen mit Nachweis</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Einführung der Begriffe der gebrochen-rationalen Funktionen und der abschnittsweise definierten Funktionen (einfache Beispiele)</li> <li>- CAS als Hilfsmittel zur Visualisierung, zur Annäherung mit Testfolgen und zur Gewinnung von Einsichten</li> </ul>

Std.	Inhalte / Schwerpunkte	Bemerkungen
<b>14</b>	<b>Differenzierbarkeit</b>	
4	<ul style="list-style-type: none"> <li>- lokale, globale Differenzierbarkeit</li> <li>- Differenzenquotient und Differenzialquotient</li> <li>- Tangentenproblematik</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Anstiege, geometrische Deutung</li> <li>- Tangenten -und Normalengleichungen, ständiger Praxisbezug</li> </ul>
8	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Zusammenhang von Stetigkeit und Differenzierbarkeit</li> <li>- Ableitungsregeln</li> <li>- Zusammenhang von Monotonie und erster Ableitung</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Produkt- und Quotientenregel, Kettenregel</li> <li>- inhaltliche Deutung des Änderungsverhaltens</li> <li>- Modellieren von Anwendungssituationen durch ganzrationale und gebrochenrationale Funktionen</li> <li>- Zusammenhang zur Monotonie von Zahlenfolgen herstellen</li> </ul>
2	<ul style="list-style-type: none"> <li>- geometrische Zusammenhänge zwischen dem Graphen von <math>f(x)</math> und dem Graphen von <math>f'(x)</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Untersuchung mit und ohne CAS mit Interpretation durch den Schüler</li> </ul>
<b>12</b>	<b>Kurvenuntersuchungen</b>	
8	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Geometrische Zusammenhänge zwischen den Graphen von <math>f</math>, <math>f'</math>, <math>f''</math>, <math>f'''</math></li> <li>- notwendige und hinreichende Bedingungen für Extrempunkte</li> <li>- notwendige und hinreichende Bedingungen für Wendepunkte</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- inhaltliches Verständnis</li> <li>- Art des Extremums mit Nachweis</li> <li>- Art des Wendepunktes mit Nachweis</li> <li>- Konzentration auf ganzrationale und gebrochen-rationale Funktionen</li> </ul>
4	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Kurvendiskussionen mit und ohne CAS</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Anwenden von Regeln und Verfahren ohne CAS auf übersichtliche Beispiele und wenige Übungsaufgaben beschränken</li> </ul>
<b>23</b>	<b>Anwendungen der Differenzialrechnung</b>	
23	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Erzeugung funktionaler Zusammenhänge, die durch Verknüpfung, Verkettung und abschnittsweise Definition entstehen</li> <li>- Lösen verschiedenster Extremwertprobleme auch mit komplizierteren Funktionen möglich (CAS)</li> <li>- Modellieren von Anwendungssituationen durch Funktionen und durch Auffinden geeigneter Parameter</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- ganzrationale und gebrochenrationale Funktionen</li> <li>- Erweiterung der Differenzierungsregeln auf die Wurzelfunktion und <math>y = \sin x</math> und <math>y = \cos x</math></li> <li>- Nutzung des CAS</li> <li>- Rekonstruktion von Funktionen</li> <li>- Kurvenscharen</li> <li>- inhaltliches Verständnis des Newtonverfahrens</li> </ul>

Std.	Inhalte / Schwerpunkte	Bemerkungen
<b>10</b>	<b>Stammfunktion</b>	
2	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Umkehrung des Differenzierungsprozesses</li> <li>- Ermitteln von Stammfunktionen</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- einfache Funktionen ohne CAS</li> </ul>
2	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Flächeninhalt der Punktmenge, die vom Graphen von <math>f</math>, der <math>x</math>-Achse und den Geraden <math>x = a</math> und <math>x = b</math> begrenzt wird (Grenzwert der Ober- und Untersumme)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Der Wechsel zwischen numerischer Berechnung und grafischer Darstellung mit CAS ermöglicht ein vertieftes Verständnis mathematischer Zusammenhänge.</li> </ul>
6	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Das bestimmte Integral</li> <li>- Eigenschaften und Berechnung bestimmter Integrale</li> <li>- Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung</li> <li>- uneigentliche Integrale</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Abgrenzung vom Flächeninhalt der Punktmenge</li> <li>- inhaltliches Verständnis</li> </ul>
<b>10</b>	<b>Anwendungen der Integralrechnung</b>	
6	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Flächenberechnungen</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Flächen unter und zwischen Funktionsgraphen (praxisnahe Zusammenhänge)</li> </ul>
4	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Volumen von Rotationskörpern</li> <li>- Bogenlänge</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Berechnungen mit CAS</li> </ul>
<b>20</b>	<b>Die e-Funktion – weiterer Ausbau der Differenzial- und Integralrechnung</b>	
4	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Zusammenführen von Differenziation und Integration bei vielfältigen Aufgaben</li> </ul>	
12	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Wiederholung und Anwendung des bisherigen Wissens und Könnens auf e-Funktionen</li> <li>- Herleitung und Bedeutung von <math>e</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Betrachtung der <math>\ln</math>-Funktion nur als Umkehrfunktion der <math>e</math>-Funktion und zur Integration gebrochenrationaler Funktionen</li> </ul>
4	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Kurvenscharen</li> </ul>	
<b>(10)</b>	<b>Gesamtwiederholung an differenzierten Komplexaufgaben, integratives Thema</b>	

Hinweis:

Für einige Aufgaben der Klasse 11, die mit einem CAS lösbar sind, wurden ausführliche Lösungen erstellt. Entsprechende Aufgaben sind mit (L) gekennzeichnet. Die Lösungen befinden sich unter [www.mathe-mv.de](http://www.mathe-mv.de) (Lösungen von Aufgaben der Klasse 11).

Weiterhin existiert unter [www.mathe-mv.de](http://www.mathe-mv.de) (Zusätzliche Aufgaben zum Exemplarischen Lernen in Klasse 11) eine Datei mit Aufgaben und Hinweisen zum Exemplarischen Lernen in der Klasse 11.

## 2.2 Zahlenfolgen

### Vorhandenes Wissen:

- Funktionen: beschreiben Zusammenhänge, Begriffe: Argument, Funktionswert, Definitionsbereich, Wertebereich, Darstellung im Koordinatensystem, in Tabellen, verbal, mit Funktionsgleichungen, Schreibweise z.B.  $y = f(x) = m \cdot x + n$ ,
- Folgen: Umgangssprachliche Vorstellung einer Folge als Aneinanderreihung von endlich vielen Dingen mit einer bestimmten Ordnung (Malfolge, Ziffernfolge bei Dezimalzahlen), Fortsetzen von Zahlenfolgen,
- Index: bezeichnet einzelne Lösungen mit besonderen Eigenschaften, fest, hebt etwas Besonderes hervor ( $x_{1/2}$  oder  $x_0$ ).
- natürliche Zahlen: Null ist die kleinste natürliche Zahl. Es werden für die Null stets besondere Betrachtungen angestellt. Die Folge der natürlichen Zahlen ist unendlich.
- Wachstum : lineares und exponentielles, verbale Beschreibung, Darstellung im Koordinatensystem, mit Tabellen und Gleichungen,
- Terme: Termwertberechnungen, Belegung von Variablen in Termen.

Voraussetzungen aus Klasse 10 für das Arbeiten mit dem Voyage200 zum Thema Folgen:

- Arithmetische Operationen
- Eingabe von Termen (Struktur von Termen erkennen und Klammern richtig setzen)
- Termumformungen, insbesondere: Entwick; gemNenn; PzlBruch; im Algebramenü des Hauptbildschirms
- Lösen und Interpretieren von Gleichungen in unterschiedlichen Zahlenbereichen
- graphische Darstellung von Funktionen, Erstellen von Wertetabellen

## Ziele

### Sicheres Wissen und Können

Die Schülerinnen und Schüler

- haben inhaltliche Vorstellungen zu Zahlenfolgen und wissen, dass Folgen besondere Funktionen mit einem Definitionsbereich aus den natürlichen Zahlen und dem Wertebereich  $\mathbb{R}$  sind und kennen die besonderen Bezeichnungen,
- haben inhaltliche Vorstellungen zum Grenzwert einer Zahlenfolge und wissen, dass sich die Folgeglieder einer konvergenten Zahlenfolge einem Grenzwert mit wachsendem  $n$  beliebig nahe annähern,
- wissen, dass Partialsummen und Partialsummenfolgen entstehen, wenn man die Glieder einer Folge systematisch addiert und dass eine unendliche Partialsummenfolge Reihe genannt wird.

Die Schülerinnen und Schüler können

- arithmetische, geometrische und einfache Folgen erkennen oder fortführen, wenn konkrete aufeinander folgende Glieder gegeben sind,
- Zahlenfolgen grafisch darstellen und das Monotonieverhalten an Graphen beschreiben,

- die Schreibweise  $\lim_{n \rightarrow \infty}$  sicher verwenden,
- zu einer gegebenen expliziten oder rekursiven Vorschrift Glieder der Zahlenfolge berechnen und Vermutungen über den Grenzwert bzw. das Konvergenzverhalten anstellen,
- erklären, wie aus einer Folge die entsprechende Partialsummenfolge entsteht.

### Reaktivierbares Wissen und Können:

Die Schülerinnen und Schüler wissen:

- Die Folgen mit  $a_n = 1/n$  und  $a_n = q^n$  mit  $|q| < 1$  sind Nullfolgen.

Die Schülerinnen und Schüler können

- Folgen durch Aufzählen der ersten Glieder, verbal und in Tabellen darstellen,
- praktische Anwendungen geometrischer Folgen mit CAS bearbeiten,
- ein CAS für die Darstellung von Folgen und zur Berechnung von Gliedern nutzen,
- die Differenz  $a_{n+1} - a_n$  für überschaubare Folgen bilden, berechnen und deuten,
- Vermutungen für den Grenzwert aus grafischen und tabellarischen Darstellungen bilden und Sätze über konstante Folgen, Nullfolgen, Summen, Differenzen und Produkten von Folgen nutzen,
- die Begriffe konvergente und divergente Folge unter Nutzung grafischer Veranschaulichungen erklären,
- aus einfachen Folgen entsprechende Partialsummenfolgen bilden,
- Grenzwertbetrachtungen zu ausgewählten Reihen durchführen,
- in überschaubaren Fällen eine gegebene ausführliche Summe mithilfe des Summenzeichens schreiben,
- die Verwendung des Summenzeichens zur Beschreibung einer Summe und zur Bestimmung des Grenzwertes einer Reihe unterscheiden.

### Exemplarisches

Die Schülerinnen und Schüler haben an einprägsamen Beispielen erste Vorstellungen und Einsichten zu folgenden Sachverhalten gewonnen.

- Es gibt endliche und unendliche Folgen.
- Unter bestimmten Bedingungen ist es sinnvoll,  $n = 0$  im Definitionsbereich zuzulassen.
- Die Glieder der Zahlenfolgen können auch als Punkte auf der Zahlengerade veranschaulicht werden. Damit wird der Grenzwert von Funktionen, das Verhalten an Polstellen und die Einführung der 1. Ableitung vorbereitet.
- Zwischen arithmetischen Folgen, linearen Funktionen, linearen Wachstumsprozessen bzw. geometrischen Folgen und Exponentialfunktionen und exponentiellen Wachstumsprozessen gibt es enge Zusammenhänge.
- Die Monotonie geometrischer Folgen ist auch durch die Differenzbildung unter Anwendung der Potenzgesetze berechenbar.
- Manchmal ist es sinnvoll, zwischen streng monoton und monoton zu unterscheiden.
- Bei Anwendung der Grenzwertdefinition auf eine Zahl, die nicht der Grenzwert ist, ergibt sich ein Widerspruch.

- 
- Für kleine  $n$  kann der Grenzwert beliebig oft überschritten werden, erst im Unendlichen geschieht die Annäherung.
  - Man muss zwischen der Annäherung an den Grenzwert von oben oder unten unterscheiden.
  - Die Bezeichnung uneigentlicher Grenzwert für die Schreibweise  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  ist widersprüchlich.
  - Die beliebig genaue Annäherung an einen Wert ist ein mathematisches Modell für Grenzprozesse. In der Praxis gibt es immer einen kleinsten Wert der Annäherung, der nicht unterschritten werden kann.
  - Mit dem Grenzwertbegriff wird der Begriff des unendlich Kleinen und der beliebig genauen Annäherung mathematisch korrekt erfasst und auf das Arbeiten mit Ungleichungen zurückgeführt.
  - Die Begründung und Anwendung der Summenformel für geometrische Reihen wird an einem einprägsamen Beispiel erlebt.

## Aufgaben

### Sicheres Wissen und Können

- Vergleichen Sie: (1)  $f(x) = -3x + 7$  mit (2)  $a_n = 4 + (n - 1) \cdot 3$
- Vergleichen Sie die Bedeutung der Klammer in den folgenden Ausdrücken:  
A:  $(a + n)(a - n)$       B:  $(a_n)$       C:  $(a_n + 1)^2$
- Geben Sie je ein Beispiel für Zahlenfolgen an, die die gegebenen Bedingungen erfüllen:
  - Die Folge wird durch eine rekursive Bildungsvorschrift beschrieben.
  - Die Folge wird durch eine explizite Bildungsvorschrift beschrieben. Die Glieder der Folge werden immer größer.
- Finden Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede bei dem Gebrauch des Wortes „Grenze“ in der Umgangssprache und in der Mathematik.
- Paul bewirbt sich um einen Ferienjob und versucht, den Personalchef zu überzeugen, ihn einzustellen, weil er für wenig Lohn zu arbeiten anfangen möchte. Paul schlägt vor, am 1. Tag für nur 50 Cent zu arbeiten und an jedem weiteren Tag den doppelten Lohn des Vortages zu erhalten. Würden Sie als Personalchef auf das Angebot eingehen, wenn Paul 3 Wochen á 5 Tage arbeiten möchte? Begründen Sie.
- Nennen Sie Beispiele für monoton wachsende (alternierende; fallende mit rekursiver Bildungsvorschrift) Zahlenfolgen.
- Skizzieren Sie eine monoton wachsende (fallende, alternierende, konstante) Folge in ein Koordinatensystem.
- Finden Sie Zahlenfolgen mit folgenden Eigenschaften:
  - $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = 1$ ;  $a_n > 1$  für  $n > 0$
  - $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = 1$ ;  $a_n < 1$  für  $n > 0$
- Es sind drei Zahlenfolgen gegeben:
 

(1)  $a_n = 1 + \frac{1}{n}$       (2)  $a_n = 1 + n$       (3)  $a_n = \frac{n-1}{2n}$

  - Stellen Sie die ersten zehn Glieder folgender Zahlenfolgen auf je einem Zahlenstrahl dar. Geben Sie eine Vermutung über die Konvergenz der Folgen an.
  - Finden Sie alle Folgenglieder, für die gilt:  
 $a_n > 1$        $a_n < 1$        $a_n = 1$        $a_n < 1,1$        $a_n < 1,01$        $a_n < 1,001$
- Setzen Sie die Folgen fort.
  - 0; 2; 4; 6; .....
  - $\frac{1}{2}$ ;  $\frac{1}{4}$ ;  $\frac{1}{8}$ ; .....
  - 25; 27; 24; .....
- Schreiben oder zeichnen Sie auf, was Sie sich unter folgenden Formulierungen vorstellen.
  - die Folge der natürlichen Zahlen von 1 bis 10
  - die Folge der Zweierpotenzen
  - die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis 10
  - die Summe der Zweierpotenzen
- Nennen Sie Beispiele für Partialsummen und Partialsummenfolgen.

**Reaktivierbares Wissen und Können:**

13. Geben Sie für jeden Begriff eine Beispielfolge an! Stellen Sie sie mit dem Voyage200 dar und übernehmen Sie eine Skizze der Folge in die Tabelle!

Begriff	Bildungsvorschrift	Skizze
Nullfolge		
konvergente Folge		
divergente Folge		
konstante Folge		

14. Gegeben sind die Zahlenfolgen  $(a_n)$  und  $(b_n)$  mit  $a_n = 2 + \frac{1}{n}$ ;  $b_n = 5 - \frac{4}{n}$

a) Speichern Sie die Bildungsvorschriften für beide Folgen im CAS und stellen sie die Folgen grafisch dar!

b) Ermitteln Sie den Grenzwert der Folge  $(a_n)$  bzw.  $(b_n)$ ,

c) Ermitteln Sie die Folgen

$$c_n = a_n + b_n \quad d_n = a_n - b_n \quad e_n = a_n \cdot b_n \quad f_n = \frac{a_n}{b_n}$$

d) Welchen Grenzwert vermuten Sie für die Folgen aus Aufgabe c)?

Überprüfen Sie Ihre Vermutung an Hand der Grafik und der Tabellen.

15. Entscheiden Sie, bei welcher der Folgen es sich um eine Nullfolge handelt.

a)  $a_n = \frac{-2}{n^3}$ ; b)  $a_n = \frac{5}{2^n}$ ; c)  $a_n = \frac{n-1}{n^3}$ ; d)  $a_n = 5 \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^n$

16. Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge mit Hilfe der Grenzwertsätze und vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit denen, die mit einem CAS ermittelt wurden.

a)  $a_n = \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}$     b)  $a_n = \frac{2n-4}{5+n}$     c)  $a_n = \frac{5n-7}{n^2-3n}$

17. Untersuchen Sie die Aussagen auf ihren Wahrheitsgehalt. Widerlegen Sie die falschen Aussagen durch ein Gegenbeispiel und erläutern Sie die richtigen an einem Beispiel.

a) Jede geometrische Folge mit  $q < 0$  ist konvergent.

b) Jede geometrische Folge mit  $|q| > 1$  ist divergent.

c) Wenn eine Folge alternierend ist, dann kann sie nur konvergent sein.

d) Wenn eine arithmetische Folge monoton wachsend ist, dann ist sie divergent.

e) Wenn eine Folge monoton wachsend ist, dann ist sie divergent.

f) Es gibt Folgen, die gleichzeitig divergent und konstant sind.

g) Eine monoton fallende Folge kann sich nur von oben einem Grenzwert nähern.



18. Ermitteln Sie die Anzahl der Summanden der gegebenen Summen. Bestimmen Sie jeweils die ersten 3 Summanden jeder Aufgabe.

$$a) \sum_{k=1}^{45} (2k-1)$$

$$b) \sum_{k=5}^{18} (3k+2)$$

$$c) \sum_{i=1}^8 80 \cdot 0,5^i$$

19. Berechnen Sie die nachfolgenden Partialsummen mit Hilfe des CAS.

$$a) \sum_{k=1}^{45} (2k-1)$$

$$b) \sum_{k=1}^{18} (3k+2)$$

$$c) \sum_{i=1}^8 80 \cdot 0,5^i$$

$$d) \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1)$$

20. Geben Sie an, ob die gegebene geometrische Reihe konvergiert. Berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert der Reihe.

$$a) \sum_{k=1}^n 0,7^{k-1}$$

$$b) \sum_{k=1}^n 1,01^{k-1}$$

$$c) 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots$$

21. Schreiben Sie mithilfe eines Summenzeichens.

$$a) 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{2187}$$

$$b) 101 + 105 + 109 + \dots + 177 + 181$$

$$c) 1 + 4 + 9 + 16 + \dots$$

### Exemplarisches:

22. Finden Sie Zusammenhänge zwischen dem Anstieg einer linearen Funktion und der Monotonie arithmetischer Folgen.

23. Vergleichen Sie miteinander:

$$a) y = 0,4 \cdot x - 7,4 \text{ und } a_n = -7 + (n-1) \cdot 0,4$$

$$b) b_n = 32 \cdot 0,5^{n-1} \text{ und } y = 64 \cdot 0,5^x$$

$$c) c_n = n^2 \text{ und } y = x^2$$

24. Untersuchen Sie, ob das Verfahren zur Monotonieuntersuchung von Folgen auf die Funktion  $y = 3x - 5$  zu übertragen ist.

25. Überlegen Sie, ob es möglich ist, eine lineare Funktion rekursiv zu beschreiben. Geben Sie gegebenenfalls ein Beispiel an.

26. Entwickeln Sie einen Vorschlag, wie das Verfahren zur Monotonieuntersuchung von Folgen auf Funktionen zu übertragen wäre. Erläutern Sie ihn an Beispielen.

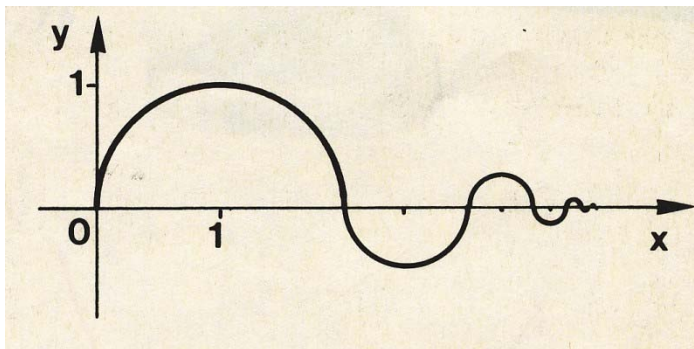
27. Untersuchen Sie, ob das Verfahren zur Bestimmung des Grenzwertes der Folge

$$a_n = \frac{5n-4}{n} \text{ auf die Funktion } y = \frac{5x-4}{x} \text{ zu übertragen ist.}$$

28. Vervollständigen Sie die Übersicht über die Monotonie geometrischer Folgen und überlegen Sie, welche Teile auf Exponentialfunktionen übertragbar sind.

	$a_1 > 0$	$a_1 < 0$	$a_1 = 0$
$q > 0$			
$q < 0$			
$q = 0$			

29. Anne geht jeden Tag einen 2 km langen Weg zur Schule. An einem Morgen überlegt sie: „Ich könnte meinen Schulweg auch so in Etappen zerlegen, dass meine erste Etappe einen Kilometer beträgt. Die zweite Etappe ist die Hälfte der ersten Etappe, die dritte die Hälfte der zweiten Etappe usw.“ Nehmen Sie zu diesen Gedanken Stellung.
30. Herr Buddel möchte ein Haus bauen und nimmt einen Kredit von 100 000€ zu einem Zinssatz von  $x$  % auf. Er weiß, dass er maximal jährlich 12000 € zurückzahlen kann. Er beginnt mit der Rückzahlung am Ende des ersten Jahres. Die Zinsbindung endet nach 10 Jahren. Erkundigen Sie sich bei einer Bank nach den aktuellen Zinssätzen für ein Darlehen von 100 000 € und einer Laufzeit von 10 Jahren (ohne Bearbeitungsgebühren). Vereinfachen Sie Ihre Rechnungen gegebenenfalls durch die Annahme einer jährlichen Zahlungsweise. Beraten Sie Herrn Buddel ausführlich!
31. Untersuchen Sie folgende Aussage: Die Partialsummenfolge der ungeraden natürlichen Zahlen entspricht der Folge der Quadratzahlen.
32. Die untenstehend abgebildete Figur ist durch das Aneinanderfügen von Halbkreisen entstanden, wobei jeder neue Durchmesser das 0,6fache des vorherigen Durchmessers ist. Der erste Durchmesser beträgt 2 cm. Wie lang ist die Linie, wenn man sich das Aneinanderfügen der Halbkreise beliebig oft fortgesetzt denkt?



## 2.3 Grenzwert von Funktionen

### Vorhandenes Wissen

*Aus dem Mathematikunterricht:*

- Verhalten von Funktionen im Unendlichen: Wenn  $x$  sehr groß oder sehr klein wird, sagt man: „ $x$  strebt gegen  $+\infty$  bzw.  $-\infty$ “. Die Funktionswerte können dann auch gegen  $+\infty$  bzw.  $-\infty$  streben oder aber sich einer Geraden (meist parallel zur  $x$ -Achse) annähern, wie z. B. bei  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Die Geraden heißen Asymptoten.
- Verhalten von Funktionen an bestimmten Stellen (Polstellen): Man sagt: „ $x$  strebt gegen den Wert  $a$ “, wenn sich die Werte von  $x$  der Stelle  $a$  immer weiter annähern und der Abstand von  $x$  zu  $a$  immer geringer wird. Funktionswerte streben gegen  $+\infty$  bzw.  $-\infty$ , wenn sich die  $x$ -Werte einer Stelle auf der  $x$ -Achse immer weiter annähern, wie z. B. bei  $f(x) = \frac{1}{x}$ , wenn  $x$  sich der Stelle  $0$  immer weiter annähert.
- Grenzwert einer Zahlenfolge: inhaltliche Vorstellung vom Grenzwert der Folge für  $n \rightarrow \infty$ , Definition mit der  $\varepsilon$ -Umgebung, Grenzwertsätze, Konvergenz, Divergenz

*umgangssprachlich:*

- Grenze: als Ende einer Straße, die aber unter gewissen Bedingungen zu überschreiten ist, Landesgrenze, Grenzen setzen, Vorrat ist begrenzt, Grenzwert als Wert, der nicht überschritten werden darf (Grenzwert der Belastung)
- Konvergieren (sich einander annähern), Divergieren (sich voneinander entfernen)

### Ziele

#### Sicheres Wissen und Können:

Die Schülerinnen und Schüler wissen, dass

- die Schreibweise  $x \rightarrow \pm\infty$  bedeutet, dass  $x$  beliebig groß/klein wird,
- die Schreibweise  $x \rightarrow a$  bedeutet, dass  $x$  sich von rechts bzw. links einer Stelle  $a$  annähert,
- es bei Funktionen Grenzwerte für  $x \rightarrow \pm\infty$  und für  $x \rightarrow a$  gibt. Das ergibt sich aus dem erweiterten Definitionsbereich von Funktionen gegenüber Folgen.
- das Grundprinzip zur Bestimmung von Grenzwerten von Funktionen die Nutzung von Testfolgen ist. Diese nähern sich der zu untersuchenden Stelle  $a$  auf der  $x$ -Achse oder den Grenzen des Definitionsbereiches an. Gleichzeitig muss das Verhalten der zugehörigen Funktionswerte untersucht werden.

Die Schülerinnen und Schüler können:

- die limes -Schreibweise für  $x \rightarrow a$  und  $x \rightarrow \pm\infty$  sicher verwenden,
- Prototypen für Testfolgen sicher zuordnen (z.B.: Die Folgen  $a + \frac{1}{n}$  und  $a - \frac{1}{n}$  nähern sich von rechts bzw. links dem Grenzwert  $a$ )

**Reaktivierbares Wissen und Können**

Die Schülerinnen und Schüler können

- ein CAS zur Grenzwertberechnung (x durch Testfolgen ersetzen) nutzen,
- Vermutungen für Grenzwerte aus grafischen und tabellarischen Darstellungen bilden,
- Sätze über konstante Folgen, Nullfolgen, Summen, Differenzen und Produkten von Folgen auf Grenzwertberechnungen bei Funktionen übertragen,

**Exemplarisches**

Die Schüler haben an einprägsamen Beispielen erste Vorstellungen und Einsichten zu folgenden Sachverhalten gewonnen:

- Der rechtsseitige und linksseitige Grenzwert an einer Stelle (Polstelle bei bekannten Potenzfunktionen mit negativen Exponenten wie z.B.:  $x = 0$  bei  $f(x) = x^{-n}$ ) können gleich oder unterschiedlich sein.
- Rechtsseitige und linksseitige Grenzwerte an einer Stelle können Zahlen oder uneigentliche Grenzwerte (Unendlich) sein.
- Die Grenzwerte für  $x \rightarrow +\infty$  und  $x \rightarrow -\infty$  sind häufig unterschiedlich.
- Im Definitionsbereich können die Grenzwerte beliebig oft über- oder unterschritten werden.

## Aufgaben

### Sicheres Wissen und Können

1. Geben Sie je eine Testfolge an, die sich für  $n \rightarrow \infty$  dem gegebenen Grenzwert nähert.

Grenzwert	Bildungsvorschrift	Skizze (Zahlenstrahl)
3		
-2		
$-\infty$		
0		
$\infty$		

- Stellen Sie eine Übersicht auf, in der mindestens die Begriffe Grenzwert, Stelle, im Unendlichen, konvergent und divergent vorkommen.
- Vergleichen Sie das Grenzwertverhalten von Folgen und Funktionen.
- Beschreiben Sie die Unterschiede zwischen  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 2) = \infty$  und  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 3}{x} = 2$ .
- Vergleichen Sie:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 3}{x}$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - 3}{n}$ .
- Bringen Sie die Kenntnisse über umgekehrte Proportionalität in Zusammenhang mit dem Grenzwertverhalten von Funktionen.
- Bei einigen Fahrzeugen gibt es eine Automatik – Stellung für die Scheibenwischer. In der Beschreibung steht, dass die Scheibenwischer automatisch angehen, wenn der Regen einen bestimmten Grenzwert erreicht hat. Vergleichen Sie den Grenzwert – Begriff in diesem Zusammenhang mit seiner mathematischen Bedeutung.

### Reaktivierbares Wissen und Können

- Ersetzen Sie bei folgenden Funktionen die Argumente jeweils durch eine Folge, die gegen  $+\infty$  und eine Folge, die gegen  $-\infty$  divergiert. Bestimmen und vergleichen Sie die entsprechenden Grenzwerte der Funktionswerte.
 

a)  $f(x) = \frac{3}{2x+1}$       b)  $f(x) = \frac{2x+4}{x-1}$       c)  $f(x) = \frac{x^2-3}{x+1}$       d)  $f(x) = 2^x$
- Vergleichen Sie das Verhalten der Funktionen im Unendlichen.
 

a)  $f(x) = \frac{3}{x}$       b)  $f(x) = 3^x$       c)  $f(x) = -5x + 2$       d)  $f(x) = x^{-1} + 2$ .
- Geben Sie eine Funktion mit folgender Eigenschaft an,
  - Sie hat den Grenzwert 3.
  - Ihr Graph nähert sich einer Geraden an.
  - Sie ist divergent.
  - Sie hat eine Polstelle bei  $x = 4$ .

## 2.4 Stetigkeit von Funktionen

### Vorhandenes Wissen

*Aus dem Mathematikunterricht:*

- Polstellen: treten bei Potenzfunktionen mit negativen Exponenten auf, gehören nicht zum Definitionsbereich. Sie entstehen häufig dort, wo die Funktion nicht definiert ist (z.B. durch die Division durch 0). Es gibt unterschiedliche Schreibweisen für den Ausschluss einer Zahl aus dem Definitionsbereich. (senkrechte Asymptoten mit Gleichungen beschreiben)
- Grenzwerte von Funktionen: Behandlung unmittelbar vorher: Systematisierung der Grenzwerte für  $x \rightarrow \pm\infty$  und für  $x \rightarrow a$

*umgangssprachlich:*

- „stetig“ wird mit einer gleichmäßigen Entwicklung ohne Höhen und Tiefen gleichgesetzt.
- „stetig“ heißt: „ohne Unterbrechung“.

### Ziele

#### Sicheres Wissen und Können:

Die Schülerinnen und Schüler wissen, dass

- die Graphen stetiger Funktionen in einem abgeschlossenen Intervall in einem Zug „durchgezeichnet“ werden können,
- die bis Klasse 10 behandelten Funktionsklassen in ihrem Definitionsbereich stetig sind.
- die Funktionsklassen durch die gebrochenrationalen Funktionen und abschnittsweise definierten Funktionen erweitert werden,
- gebrochenrationale Funktionen Polstellen oder stetig behebbare Definitionslücken besitzen können,
- abschnittsweise definierte Funktionen Sprungstellen aufweisen können,
- auf dem Voyage200 Definitionslücken kaum zu erkennen sind.

Die Schülerinnen und Schüler können

- stetige/unstetige Funktionen und Unstetigkeitsstellen am Graphen erkennen,
- Prototypen für stetige und unstetige Funktionen nennen oder ihre Graphen skizzieren,
- die Schreibweise für abschnittsweise definierte Funktionen lesen,
- die Betragsfunktion abschnittsweise schreiben.

#### Reaktivierbares Wissen und Können:

Die Schülerinnen und Schüler

- kennen die Definition der Stetigkeit an einer Stelle  $a$ ,
- verbinden die Vorstellung von Stetigkeit in einem abgeschlossenen Intervall mit dem „Durchzeichnen“ des Graphen in diesem Intervall.
- wissen, dass gebrochenrationale Funktionen in ihrem Definitionsbereich stetig sind, obwohl man den Graphen an den Polstellen nicht „durchzeichnen“ kann.

- Wissen, dass es verschiedene Schreibweisen für abgeschlossene und offene Intervalle und für eingeschränkte Definitionsbereiche gibt.

Die Schülerinnen und Schüler können

- Vermutungen für Unstetigkeitsstellen aus grafischen und tabellarischen Darstellungen bilden,
- die Definition der Stetigkeit an einer Stelle  $a$  auf einfache Beispiele/Gegenbeispiele anwenden,
- den rechts- und linksseitigen Grenzwert an Unstetigkeitsstellen mithilfe von Testfolgen ermitteln,
- ein CAS zur Grenzwertbestimmung an Unstetigkeitsstellen nutzen,
- Unstetigkeitsstellen und die zugehörigen Punkte im Graphen durch entsprechende Klammern und Kreise kennzeichnen,
- die mathematisch exakte Schreibweise für abschnittsweise definierte Funktionen benutzen,
- das asymptotische Verhalten gebrochenrationaler Funktionen im Unendlichen untersuchen, wenn sie sich einer Asymptote (= Gerade) nähert.

### **Exemplarisches**

Die Schüler haben an einprägsamen Beispielen erste Vorstellungen und Einsichten zu folgenden Sachverhalten gewonnen:

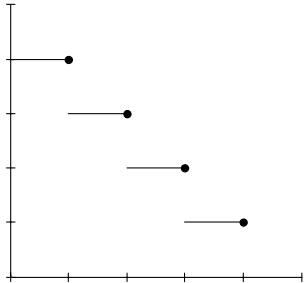
- Aus den Grenzwertsätzen für Funktionen (konstante, Summen, Differenzen, Produkte, Quotienten) folgen die Sätze über stetige Funktionen an einer Stelle  $a$ .
- Es gibt Funktionen, die sich asymptotisch einer Funktion annähern, die nicht konstant oder linear ist (asymptotische Funktion = Funktion, der sich eine Funktion im Unendlichen annähert).
- Es kann nicht nur eine Unterteilung in „stetig“ und „unstetig“, sondern auch in „stetig“ und „diskret“ vorgenommen werden. Zahlenfolgen sind Beispiele für diskrete Funktionen. Durch Erweiterung des Definitionsbereiches können aus ihnen stetige Funktionen entstehen.

## Aufgaben

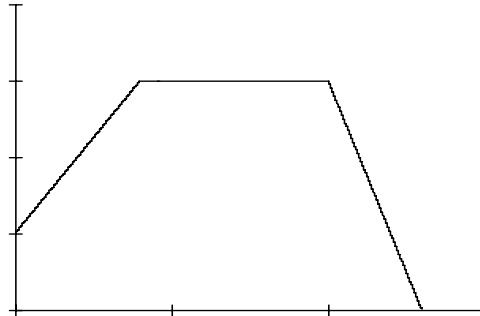
### Sicheres Wissen und Können

1. Beschreiben Sie passende Vorgänge zu den Graphen

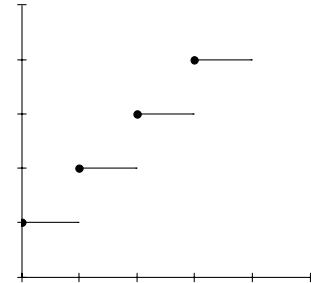
a)



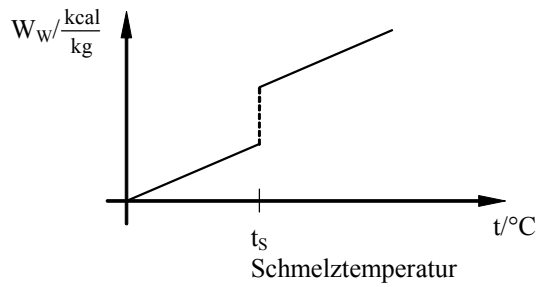
b)



c)

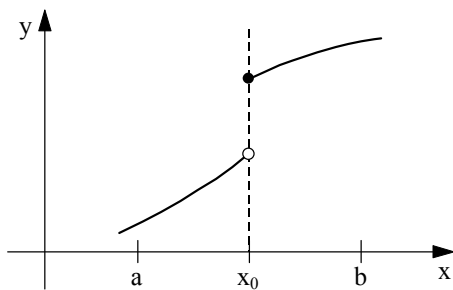


2. Interpretieren Sie das folgende Diagramm.

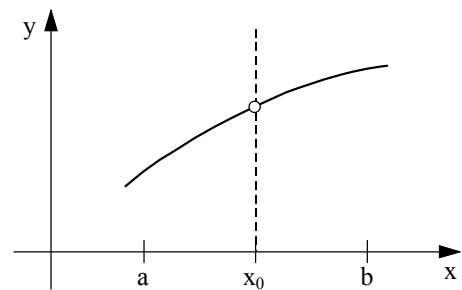


3. Beschreiben Sie das Verhalten der folgenden Graphen an der Stelle  $x_0$ .

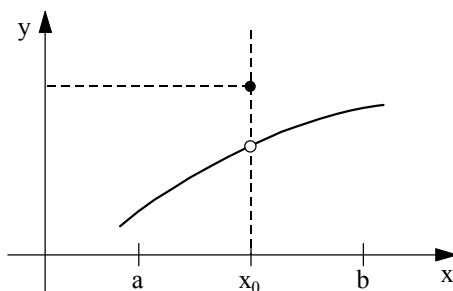
a)



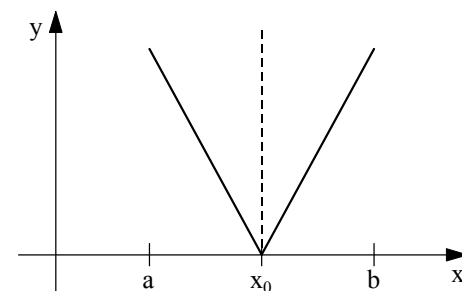
b)



c)



d)





4. Vergleichen Sie das Verhalten von Funktionen bei Annäherung an eine Polstelle und an eine stetig behebbare Definitionslücke.

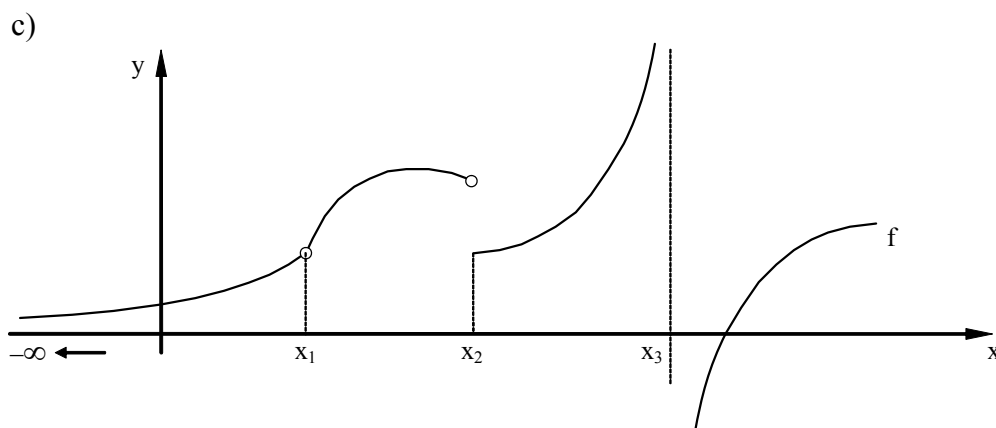
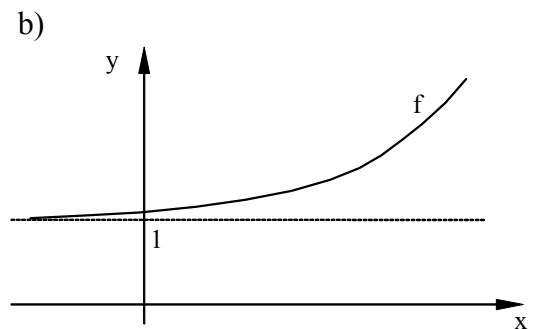
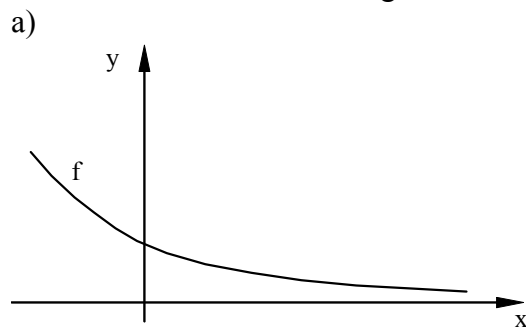
5. Geben Sie Beispiele für Funktionen an.

- mit einer Polstelle,
- ohne Polstellen,
- mit einer Definitionslücke,
- ohne Definitionslücken.

6. Woran denken Sie, wenn Sie sich eine Funktion vorstellen, die folgende Eigenschaft hat?

Die Funktion...	Vorstellung
ist stetig	
hat eine Polstelle	
hat eine stetig behebbare Definitionslücke	
Hat eine Sprungstelle	

7. Diskutieren Sie das mögliche Verhalten von Funktionen im Unendlichen und an einer Stelle. Nutzen Sie dazu die folgenden Darstellungen.



**Reaktivierbares Wissen und Können**

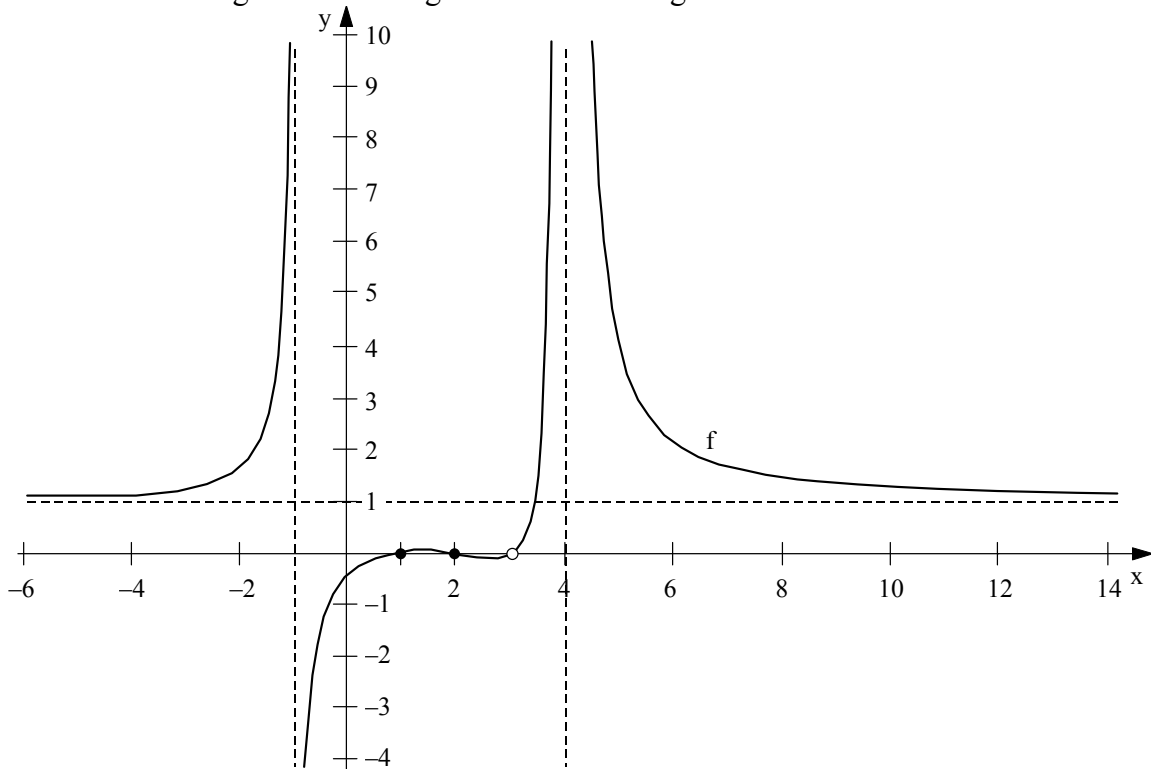
8. Geben Sie eine Funktion mit folgender Eigenschaft an.
- Sie hat eine Polstelle bei  $x = 5$ .
  - Sie hat an der Stelle  $x = 2$  eine Definitionslücke.
  - Sie weist an der Stelle  $x = 1$  einen endlichen Sprung auf.
9. Konstruieren Sie eine Funktion, die an der Stelle  $x = 2$  nicht definiert und dort auch nicht stetig ist.
10. Vergleichen Sie das Verhalten der Funktionen an der Stelle 2. Nutzen Sie ein CAS zur grafischen Darstellung.

(1)  $f(x) = \frac{3}{x-2}$                       (2)  $f(x) = 2^x$                       (3)  $f(x) = -4x + 2$

(4)  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{für } x \leq 2 \\ x + 2 & \text{für } x > 2 \end{cases}$

11. Beschreiben Sie die Unterschiede zwischen  $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 2) = -2$  und  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x-3}{x} = \pm \infty$

12. Ermitteln Sie möglichst viele Eigenschaften der folgenden Funktion.



13. Geben Sie eine Funktion mit folgender Eigenschaft an.
- Sie ist an der Stelle  $-1$  unstetig.
  - Sie ist an den Stellen  $-2$  und  $2$  unstetig.
  - Sie ist in ihrem Definitionsbereich stetig ist, der Graph kann an der Stelle  $0$  aber nicht durchgezeichnet werden.
  - Sie ist in ihrem Definitionsbereich stetig ist, besitzt aber unendlich viele Sprungstellen.

14. Geben Sie Bedingungen an, unter denen die Vorgänge stetig bzw. unstetig verlaufen könnten.

- die Entwicklung des Gewichtes eines Menschen innerhalb von 10 Jahren
- die Parkgebühren für ein Fahrzeug
- der Preis pro Liter für ein Getränk
- die Benzinpreise an der Tankstelle

15. Ordnen Sie die folgenden Funktionsgleichungen einem Graphen zu. Begründen Sie Ihre Zuordnung anhand einer markanten Stelle.

$$a) f(x) = \sqrt{\frac{1}{9}(x+2)^2(x-4)(x-6)}$$

$$b) f(x) = \sqrt{\frac{1}{9}(x+2)(x-4)(x-5)}$$

$$c) f(x) = \sqrt{\frac{(x-2)(x+1)}{(x+2)}}$$

$$d) f(x) = |x| \cdot (|x+4| - 2)$$

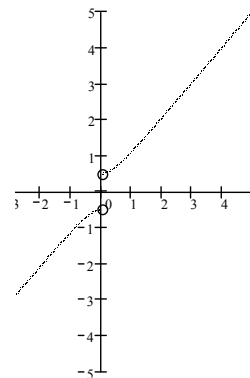
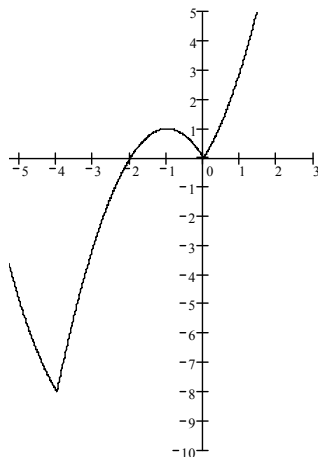
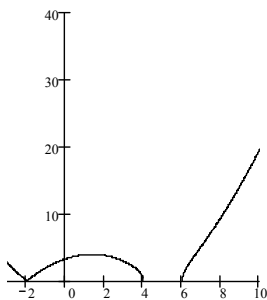
$$e) f(x) = \frac{\sqrt{x^2(4x^2+1)}}{2x}$$

$$f) f(x) = \frac{2x^3 - 10x^2 + 13x + |x-2| - 2}{4-2x}$$

I

II

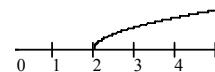
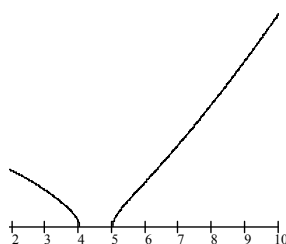
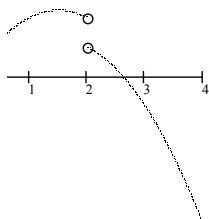
III



IV

V

VI



16. Interpretieren Sie die folgende Einkommenssteuerfunktion:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x < 5617 \\ 0,19x - 1067 & \text{für } 5617 \leq x < 8154 \\ 151,94((x-8100):10000)^2 + 1900((x-8100):10000) + 472 & \text{für } 8154 \leq x < 120042 \\ 0,53x - 22842 & \text{für } x \geq 120042 \end{cases}$$

17. Ermitteln Sie den rechts- und linksseitigen Grenzwert an den Unstetigkeitsstellen mithilfe von Testfolgen.

a)  $f(x) = \frac{1}{x}$

b)  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$

c)  $f(x) = \frac{2x}{x - 2}$

d)  $f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x + 3}$

e)  $f(x) = \frac{5}{x^2 - 1}$

f)  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{(x - 1)^2}$

18. Ermitteln Sie alle Unstetigkeitsstellen der folgenden Funktionen und begründen Sie deren Art.

a)  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{(x - 2)^2}$

b)  $f(x) = \frac{(x - 3)}{x^2 - 9}$

c)  $f(x) = \frac{2x}{x - 2}$

d)  $f(x) = \frac{5}{x^2 - 1}$

### Exemplarisches

19. Informieren Sie sich mithilfe eines CAS über die Eigenschaften folgender Funktionen:

a) Heaviside-Funktion:

$$H(x) = 1 \text{ für } x > 0$$

$$H(x) = 0 \text{ für } x \leq 0$$

b) Signum-Funktion (Eingabe in CAS: sign(x))

$$1 \text{ für } x > 0$$

$$\text{sgn}(x) = 0 \text{ für } x = 0$$

$$-1 \text{ für } x < 0$$

## 2.5 Differenzierbarkeit von Funktionen

### Vorhandenes Wissen

*Aus dem Mathematikunterricht:*

- Sekante und Tangente am Kreis
- Anstiegsdreieck und Gleichung zur Berechnung des Anstiegs linearer Funktionen
- Tangens eines Winkels
- Grenzwertbegriff für Folgen und Funktionen
- Monotonie von Funktionen beschreiben, Monotonieuntersuchungen von Folgen

*umgangssprachlich:*

- ableiten: in eine andere Richtung leiten, etwas auf seinen Ursprung zurückführen
- differenzieren: genau, bis ins Einzelne unterscheiden
- steigen: im Niveau höher werden, zunehmend an Bedeutung gewinnen, stattfinden
- Anstieg: Steigung, Erhöhung oder Zunahme
- Wachsen: als lebender Organismus an Größe, Länge, Umfang zunehmen, an Größe, Ausmaß, Zahl, Menge, Stärke, Intensität zu nehmen, sich ausbreiten, sich ausdehnen
- Fallen: seine Höhe vermindern, im Wert geringer werden, sinken
- Rate: vereinbarter Geldbetrag der in regelmäßigen Zeitabständen zu zahlen ist oder meist in Prozent ausgedrücktes Verhältnis zwischen zwei Größen, das das Tempo einer bestimmten Entwicklung angibt
- Durchschnittsgeschwindigkeit und Momentangeschwindigkeit:  $v = s/t$  als Formel der Durchschnittsgeschwindigkeit (gilt nur bei geradlinig gleichförmiger Bewegung auch für die Momentangeschwindigkeit), Momentangeschwindigkeit kann man vom Tachometer ablesen, entspricht im Allgemeinen nicht der Durchschnittsgeschwindigkeit
- Mittleres Wachstum: Wachstumsraten sind bezogen auf gleiche Zeiteinheiten

### Ziele

#### Sicheres Wissen und Können:

Die Schülerinnen und Schüler wissen, dass

- der Differenzenquotient einer Funktion  $f$  für das Intervall  $[a ; b]$  definiert ist als:
 
$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$
- der Differenzenquotient geometrisch als Anstieg einer Sekante und inhaltlich als mittlere Änderungsrate gedeutet werden kann,
- der Differenzialquotient geometrisch als Anstieg der Tangente an den Graphen der Funktion in einem Punkt gedeutet werden kann,
- der Differenzialquotient inhaltlich als lokale Änderungsrate gedeutet werden kann, 1. Ableitung an einer Stelle  $a$  genannt und mit  $f'(x)$  bezeichnet wird,

- die Ableitungsfunktion jedem Argument genau die Ableitung der Ausgangsfunktion an dieser Stelle zuordnet,

Die Schülerinnen und Schüler können

- das Änderungsverhalten von Funktionen an außer- und innermathematischen Beispielen beschreiben,
- den Differenzenquotienten auch in Anwendungssituationen berechnen,
- die Potenz-, Summen-, Faktor- und Konstantenregel anwenden.

### **Reaktivierbares Wissen und Können:**

Die Schülerinnen und Schüler wissen

- unter welchen Bedingungen eine Funktion differenzierbar ist,
- die Definition des Differentialquotienten als Grenzwert des Differenzenquotienten im Intervall  $[a;b]$  für  $b \rightarrow a$ ,
- dass es unterschiedliche Schreibweisen für die Ableitungsfunktion ( $f'(x)$  und  $\frac{dy}{dx}$ ) gibt

Die Schülerinnen und Schüler können:

- das Wachstumsverhalten von Graphen qualitativ beschreiben (z.B. der Graph ist steigend, aber das Wachstum wird immer geringer..),
- bei Funktionen an gegebenen Stellen die Nichtdifferenzierbarkeit begründen,
- in einfachen Fällen (möglichst ohne Monotoniewechsel) zu einem Intervall eines Funktionsgraphen einen möglichen Verlauf eines Graphen einer Ableitungsfunktion skizzieren,
- für ein Intervall eines Graphen einer linearen Ableitungsfunktion einen möglichen Verlauf eines Graphen einer Funktion skizzieren,
- die Produkt-, Quotienten- und Kettenregel anwenden,
- die Tangenten- und Normalengleichung an einen Graphen in einem Punkt aufstellen,
- die Zusammenhänge zwischen dem Differenzenquotienten, dem Differenzialquotienten, der Ableitung, dem Anstieg von Sekante bzw. Tangente und der mittleren bzw. lokalen Änderungsrate für das Intervall  $[a;b]$  bzw. an der Stelle  $a$  beschreiben,
- die Zusammenhänge zwischen der Ableitung an einer Stelle und der Ableitungsfunktion beschreiben,
- Zusammenhänge zwischen Monotonie und der Ableitungsfunktion herstellen:  
 $f'(x) > 0$ , dann ist  $f(x)$  monoton steigend bzw.  $f'(x) < 0$ , dann ist  $f(x)$  monoton fallend.

**Exemplarisches**

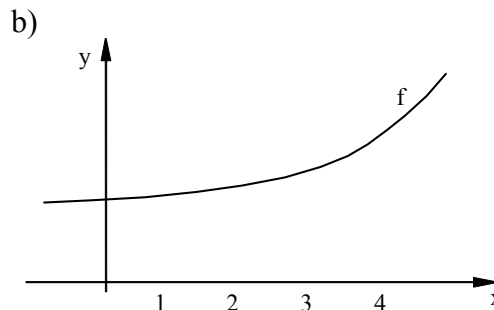
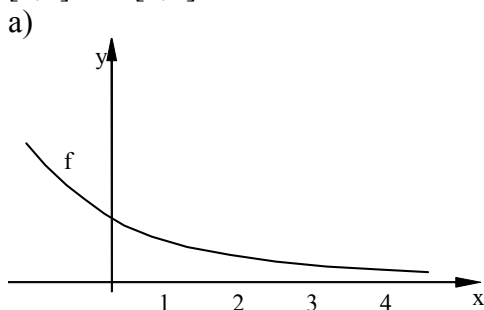
Die Schüler haben an einprägsamen Beispielen erste Vorstellungen und Einsichten zu folgenden Sachverhalten gewonnen:

- Die mittlere Änderungsrate hat in großen Intervallen eine beschränkte Aussagekraft, die Aussagekraft wird größer durch Betrachtung der mittleren Änderungsrate für immer kürzer werdende Intervalle,
- Der Differenzialquotient geht als Grenzwert aus dem Differenzenquotienten hervor. Der Differenzialquotient als Grenzwert ist ein mathematisches Modell. In der Realität kann dieser Grenzwert nicht dadurch bestimmt werden, dass die Intervalle beliebig verkleinert werden, da jede Messgröße letztendlich diskret ist. (z.B.: Momentangeschwindigkeit eines Fahrzeugs kann nicht durch die Durchschnittsgeschwindigkeit bestimmt werden, indem die Intervalle für die Zeitmessung gegen 0 gehen, sondern durch andere Methoden wie Tachometer, Dopplereffekt.
- Ein Graph kann für kleine Intervalle durch Geraden approximiert werden. Mit einem CAS wird ein Graph in sehr kleinen Intervallen geradlinig, was an seiner Auflösung liegt. Diese Besonderheit kann genutzt werden, um den Anstieg des Graphen an einer Stelle zu verdeutlichen.
- Zusammenhang zwischen Wachstumsverhalten und der Ableitungsfunktion,
- Wenn eine Funktion an einer Stelle  $a$  differenzierbar ist, so ist sie dort stetig, aber die Umkehrung muss nicht gelten (Betragsfunktion),
- Es gibt beim Einsatz eines CAS aufgrund des numerischen Näherungsverfahrens, das es nutzt, Situationen bei denen konkrete Zahlen für die Ableitung angegeben werden, obwohl die Funktion an der gegebenen Stelle nicht differenzierbar ist.

### Aufgaben

**Sicheres Wissen und Können:**

1. Vergleichen Sie das Wachstumsverhalten folgender Graphen jeweils für die Intervalle  $[1;2]$  und  $[3;4]$ .



2. Woran denken Sie, wenn Sie sich eine Funktion vorstellen, die folgende Eigenschaft hat?

Die Funktion ist an der Stelle a...	Vorstellung / Skizze
stetig.	
differenzierbar.	
stetig, aber nicht differenzierbar.	
weder stetig noch differenzierbar.	

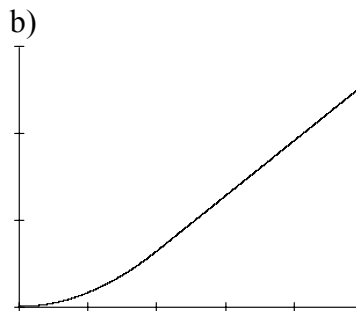
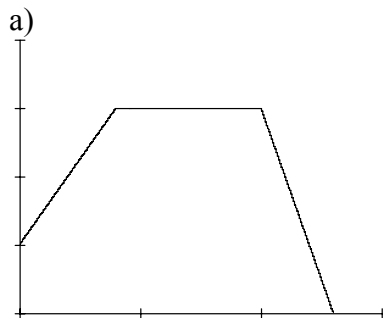
- Beschreiben Sie Beispiele für Vorgänge, bei denen Sie sowohl die mittlere als auch die lokale Wachstumsrate berechnen oder messen können.
- Stellen Sie einen möglichen Temperaturverlauf im Laufe eines Tages als Funktion dar und beschreiben Sie die Temperaturänderung in Intervallen.
- Die Bevölkerung einer Stadt wächst mit der Zeit. Führen Sie eine Funktion ein, die das Wachstum beschreibt. Präzisieren Sie den Begriff Wachstumsgeschwindigkeit zum Zeitpunkt  $t$ .
- Vergleichen Sie die Bedeutung des Verbs „ableiten“ (wachsen, fallen, steigen, differenzieren) in der Mathematik und in der Umgangssprache.
- Skizzieren Sie mindestens 3 Graphen, deren Funktionen für das Intervall  $[2;6]$  einen Differenzenquotienten von 0,5 haben.
- Geben Sie einen Funktionsgraphen an, der an der Stelle  $x = 2$  nicht differenzierbar ist.
- Zeichnen Sie einen Funktionsgraphen, für den beim Durchlaufen von links nach rechts gilt: Die Steigung ist immer positiv (negativ), wird aber immer größer.



10. Skizzieren Sie einen Funktionsgraphen und legen Sie einen Punkt P fest, so dass folgendes gilt: Die Steigung in P ist 1, und der Graph verläuft oberhalb der Tangente in P.

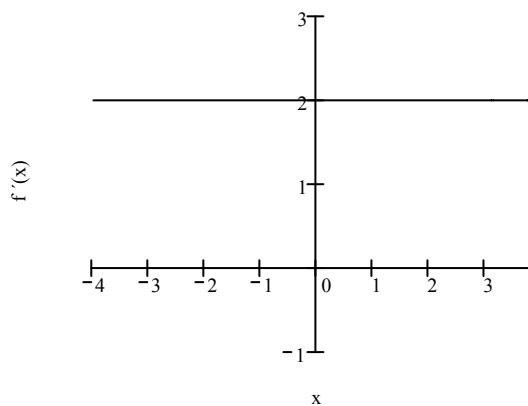
11. Vergleichen Sie „Ableitung an einer Stelle“ und „Ableitungsfunktion“ miteinander.

12. Skizzieren Sie zu den folgenden Graphen den möglichen Verlauf eines Graphen der Ableitungsfunktion in dem gegebenen Intervall.

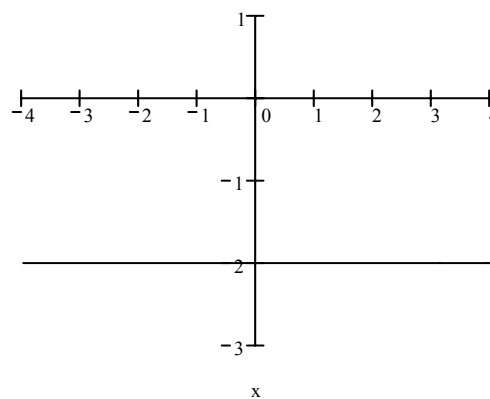


13. Skizzieren Sie zu den folgenden Graphen  $f'(x)$  der ersten Ableitungsfunktion den möglichen Verlauf der Ausgangsfunktion  $f(x)$ . Machen Sie Aussagen zur Monotonie der Ausgangsfunktion.

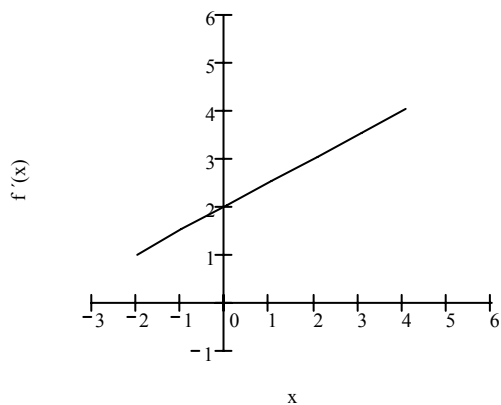
a)



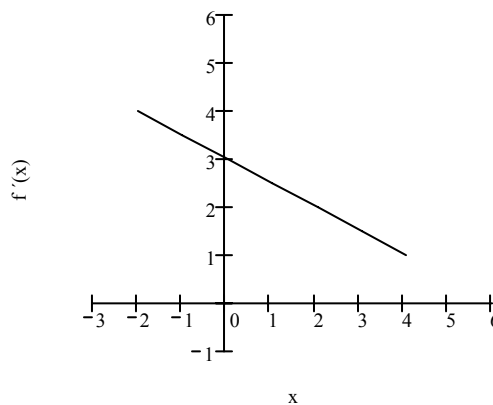
b)



c)



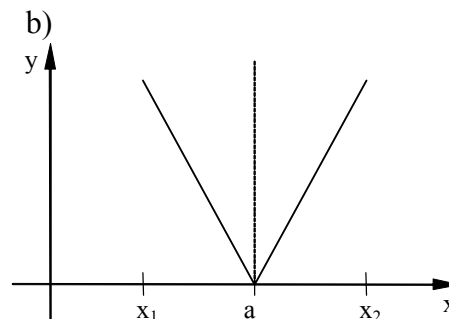
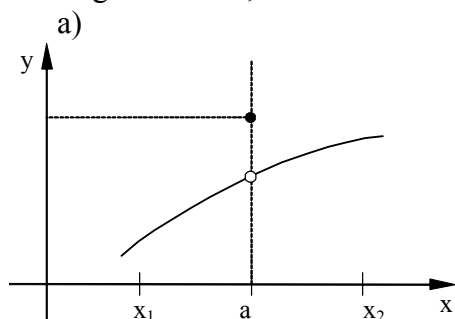
d)



**Reaktivierbares Wissen und Können**

14. Stellen Sie die Funktionen  $f(x) = x^2$ ,  $f(x) = x^3$ ,  $f(x) = x^4$  mit dem CAS im Bereich  $0 \leq x \leq 2$  und im Bereich  $0,95 \leq x \leq 1,05$  dar! Vergleichen Sie die Graphen in den unterschiedlichen Intervallen.

15. Begründen Sie, ob die Funktion an der Stelle  $a$  differenzierbar ist.



16. Stellen Sie eine Übersicht auf, in der mindestens die Begriffe Differenzenquotient, Differenzialquotient, Ableitung, Anstieg einer Sekante bzw. Tangente und mittlere bzw. lokale Änderungsrate vorkommen.

17. Vergleichen Sie die Anstiege der Graphen folgender Funktionen, nachdem Sie sie mit einem CAS dargestellt haben.

a)  $y_1 = x^2$       b)  $y_2 = 2x - 1$       c)  $y_3 = 4x - 4$

18. Gegeben seien ganzrationale Funktionen:  $f(x) = 2$ ;  $g(x) = x - 2$ ;  $h(x) = x^2 - 4$ ;  $j(x) = x^3 + x$ .

Bilden Sie aus ihnen beliebige gebrochenrationale Funktionen und bestimmen Sie ihre Ableitungsfunktionen.

**Exemplarisches**

19. Suchen Sie im Internet Entwicklungskurven. Berechnen Sie die durchschnittliche Entwicklung für bestimmte Intervalle. Ist es möglich, Aussagen über momentane Entwicklungen zu treffen?

20. Bringen Sie die Kenntnisse über die Monotonie von Funktionen in Zusammenhang mit der Ableitungsfunktion.

21. Vergleichen Sie das Verfahren zur Monotonieuntersuchung von Folgen mit der Bildung der Ableitungsfunktion einer Funktion mithilfe des Differenzialquotienten.

22. Beschreiben Sie eine praktische Situation, in der die mittlere Änderungsrate einer Größe Bedeutung hat. Interpretieren Sie in diesem Zusammenhang die lokale Änderungsrate als Grenzwert.

## 2.6 Kurvenuntersuchungen

### Vorwissen

*Aus dem Mathematikunterricht:*

- inhaltliche Vorstellungen von Extrempunkten (Hochpunkten, Tiefpunkten) eines Graphen
- kleinste und größte Funktionswerte (Maxima, Minima) bei quadratischen Funktionen Potenzfunktionen ( $y = a \cdot x^n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ) und Winkelfunktionen
- verbale Beschreibung des Trends bei Entwicklungskurven
- Symmetrie von Funktionen bei quadratischen und Potenzfunktionen
- Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Nullstelle
- Verbale Beschreibung Monotonie von Funktionen (Wachstum, Zunahme, Abnahme)
- Verhalten im Unendlichen und an einer Stelle
- Definitionslücken und deren Art
- Stetigkeit von Funktionen

*umgangssprachlich:*

- maximal, minimal, Maximum, Minimum: gleiche Bedeutungsinhalte wie in der Mathematik
- lokal: örtlich, für einen bestimmten Ort oder Bereich geltend
- global: weltumspannend; umfassend; allgemein (globale Vorstellungen)
- hinreichend: für einen bestimmten Zweck ausreichend, genügend (hinreichendes Einkommen, Die Fakten sind hinreichend bekannt.)
- notwendig: unbedingt erforderlich, unerlässlich; in der Natur einer Sache liegend, zwangsläufig (notwendige Folge)
- Rechtskurve bzw. Linkskurve: rechtsherum (im Uhrzeigersinn) bzw. linksherum fahren

### Ziele

#### 1. Sicheres Wissen und Können:

Die Schülerinnen und Schüler wissen, dass

- man beliebig viele Ableitungen formal bilden kann,
- die Ableitungen mit  $f'(x)$ ,  $f''(x)$ ,  $f^{(n)}(x)$  bezeichnet werden,
- die zweiten Ableitung als Änderung des Wachstums- bzw. Abnahmeverhaltens interpretiert werden kann,
- eine notwendige Bedingung für das Vorhandensein eines Extrempunktes „ $f'(x_E) = 0$ “ ist, aber diese Bedingung nicht hinreichend (ausreichend) ist,
- bei einer Kurvenuntersuchung folgende Aspekte betrachtet werden **können**, ohne dass stets alle Punkte „abgearbeitet“ werden müssen:

Definitionsbereich, Wertebereich, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Symmetrie zum Koordinatenursprung bzw. zur y-Achse, Extrem- und Wendepunkte, Monotonie, Verhalten im Unendlichen, Krümmungsverhalten, Verhalten bei Annäherung an Definitionslücken und im Unendlichen, Asymptotengleichungen

Die Schülerinnen und Schüler können

- folgende Begriffe unterscheiden: Extremstelle  $x_E$ , Extremum  $f(x_E)$  (Maximum, bzw. Minimum) und Extrempunkt  $P(x_E | f(x_E))$  (Hochpunkt, bzw. Tiefpunkt),
- aus dem Graphen einer Funktion auf den Verlauf der Graphen der Funktionen der ersten und zweiten Ableitungen schrittweise schließen und umgekehrt,
- die Ergebnisse einer Kurvendiskussion graphisch in einer Skizze darstellen,
- das Vorgehen zur Bestimmung der Nullstellen, der Monotonieeigenschaften, der Extrem- und Wendepunkte einer Funktion erläutern.

### **Reaktivierbares Wissen und Können:**

Die Schülerinnen und Schüler kennen

- notwendige und hinreichende Kriterien bei Extrem- und Wendepunkten,
- die Wendestelle als Stelle der Änderung des Krümmungsverhaltens des Graphen,
- den Sattelpunkt als besonderen Wendepunkt,
- die Zusammenhänge zwischen der ersten Ableitung und der Monotonie (Monotoniesatz), der zweiten Ableitung und dem Krümmungsverhalten eines Graphen.

Die Schülerinnen und Schüler können

- das notwendige Kriterium für das Vorhandensein einer Extremstelle nutzen,
- die Extremstelle mithilfe eines hinreichenden Kriteriums nachweisen und auf die Art des Extremums schließen,
- Rückschlüsse aus dem Vorzeichen der 1. Ableitung in einem Intervall auf das Monotonieverhalten einer Funktion in diesem Intervall ziehen,
- das notwendige Kriterium für das Vorhandensein einer Wendestelle nutzen,
- die Wendestelle mithilfe eines hinreichenden Kriteriums nachweisen,
- Gleichungen für senkrechte und waagerechte Asymptoten aufstellen.

### **Exemplarisches**

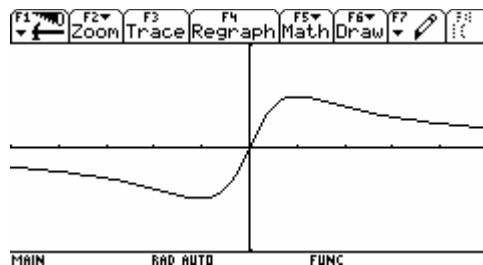
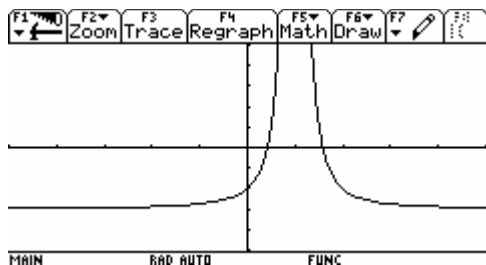
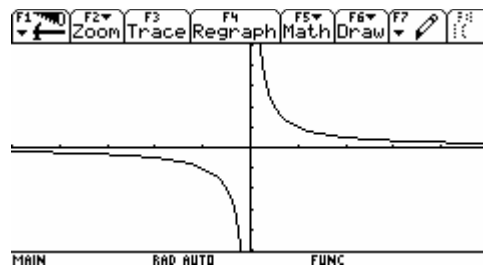
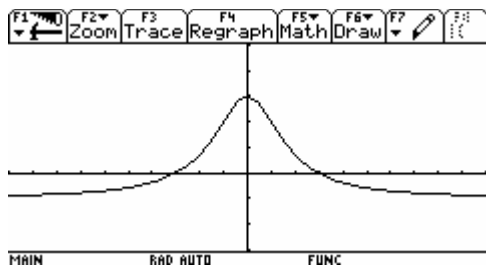
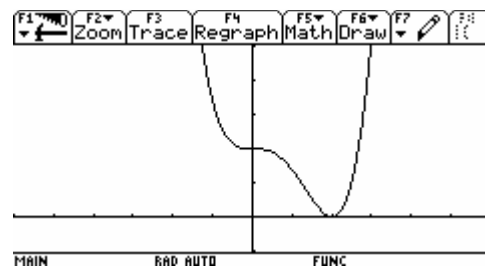
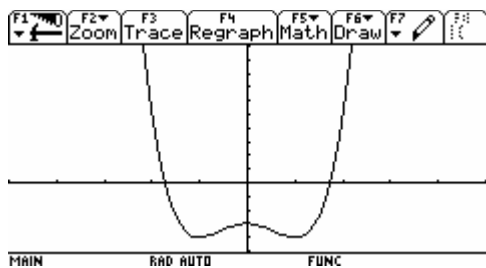
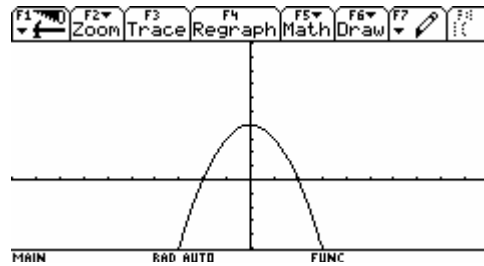
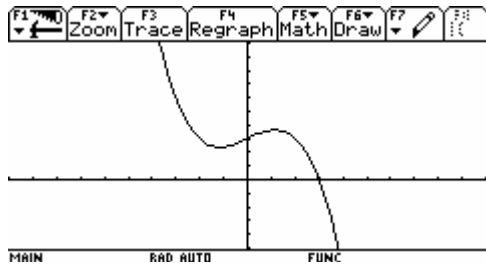
Die Schüler haben an einprägsamen Beispielen erste Vorstellungen und Einsichten zu folgenden Sachverhalten gewonnen:

- Das Verhalten im Unendlichen kann bei gebrochenrationalen Funktionen in besonderen Fällen durch eine schräge Asymptote angenähert werden.
- Man kann beim Vorhandensein mehrerer Extrema unterscheiden zwischen lokalen (relativen) und globalen (absoluten) Extrema.
- Anhand fachübergreifender Beispiele werden inhaltliche Bedeutungen der ersten und zweiten Ableitung erschlossen (z. B. Geschwindigkeit, Beschleunigung oder Wirtschaftswachstum und deren Änderung).
- Die Durchführung einer vollständigen Kurvendiskussion wird an einem übersichtlichen Beispiel erlebbar.

## Aufgaben

### Sicheres Wissen und Können

1. Die folgenden Graphen sind für vielseitige Aufgabenstellungen zu verwenden, z.B.:
  - a) Lesen Sie prägnante Merkmale der Funktion aus dem Graphen ab.
  - b) Kennzeichnen Sie in den Graphen verschiedenfarbig die Extremstellen, die Extrema und die Extrempunkte.
  - c) Wählen Sie geeignete Intervalle und beschreiben Sie das Wachstumsverhalten sowie die Änderung des Wachstumsverhaltens der Funktionen in diesen Intervallen.



2. Bilden Sie jeweils die ersten drei Ableitungen der Funktionen:

a)  $f(x) = x^5 - 4x^3 + 6x^2 + 9$

b)  $f(x) = 5x(x^2 + 3)$

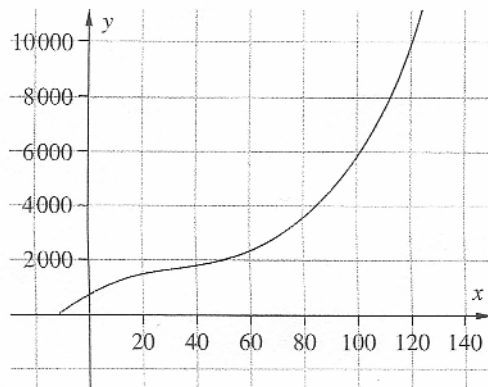
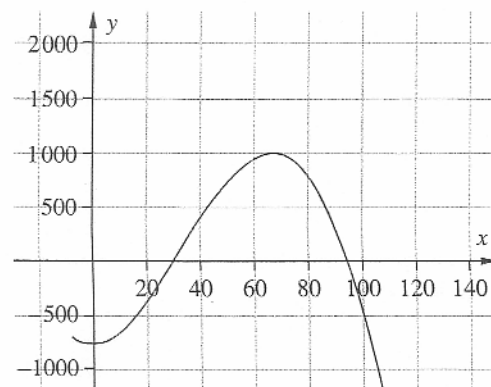
c)  $f(x) = 3x^{-3}$

d)  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

e)  $f(x) = \frac{x^3 + 5x^2}{x}$

f)  $f(x) = \frac{15}{x^6}$

3. Wie viele von Null verschiedene Ableitungen besitzt die Funktion  $f(x) = 7x^5 + 4x^2 + 2$ ?
4. Bei welcher Ableitung ergibt sich erstmals derselbe Funktionsterm für  $f(x) = 3x^6 - x^2$  und  $g(x) = 3x^6 - 4x^2 + 7x - 1$ ?
5. In den Graphen sind die Kosten und der Gewinn (in Euro) bei einer Produktion eines speziellen elektronischen Gerätes in Abhängigkeit von den Stückzahlen dargestellt. Beschreiben Sie den Verlauf der Funktionen.

Kostenfunktion  $K(x)$ Gewinnfunktion  $G(x)$ 

6. Skizzieren Sie jeweils 2 verschiedene Funktionsgraphen, für die folgende Bedingungen gelten:
  - (1)  $f(x)$  besitzt genau 2 Nullstellen bei  $x_{01} = -1$  und  $x_{02} = 2$ .
  - (2)  $g(x)$  besitzt eine waagerechte Asymptote sowie genau ein Maximum und ein Minimum.
  - (3)  $h(x)$  ist symmetrisch zum Koordinatenursprung und besitzt genau eine Polstelle.
  - (4)  $r(x)$  besitzt die lokale Maximumstelle  $x_{E1} = 2$  und das lokale Minimum  $x_{E2} = -3$ .
  - (5)  $s(x)$  hat den Tiefpunkt  $T(-2 | 1)$  und einen Hochpunkt an der Stelle  $x_E = 1$ .
7. Geben Sie eine mögliche Funktionsgleichung für eine gebrochenrationale Funktion mit folgenden Eigenschaften an.
  - (1) Sie hat eine Polstelle bei  $x_P = 4$  und eine Nullstelle bei  $x_0 = 2$ .
  - (2) Sie hat die Gerade  $y = 5$  als waagerechte Asymptote.
8. Die 1. Ableitung der Funktionen  $f(x) = x^5$  und  $g(x) = x^6$  an der Stelle  $x = 0$  hat jeweils den Wert Null. Erläutern Sie, warum  $f(x)$  im Unterschied zu  $g(x)$  an dieser Stelle kein Extremum besitzt.
9. Begründen Sie, warum jede Funktion 3. Grades mindestens eine Nullstelle hat.
10. Eine Funktion  $f(x)$  hat an der Stelle  $x = 2$  eine waagerechte Tangente, und die Funktion bildet im Intervall  $-1 < x < 5$  eine Rechtskurve. Welche besondere Stelle ist  $x = 2$ ?
11. Begründen Sie: Funktionen, die sich nur durch eine additive Konstante unterscheiden, haben die gleiche Ableitungsfunktion.

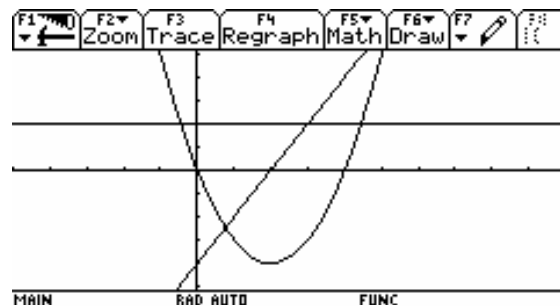
12. Von einer für alle reellen Zahlen definierten Funktion  $f$  ist bekannt:

- (1) Der Graph ihrer zweiten Ableitung  $f''$  ist eine konstante Funktion mit der Gleichung  $y = -1$ .
- (2)  $f'(0) = 0$ .

Skizzieren Sie mögliche Graphen von  $f''$ ,  $f'$  und  $f$ .

13. Die Skizze zeigt die Graphen von  $f''$ ,  $f'$  und  $f$  einer ganzrationalen Funktion  $f$ .

Beschriften Sie die Graphen mit  $G$ ,  $G'$  und  $G''$  und begründen Sie Ihre Zuordnung.

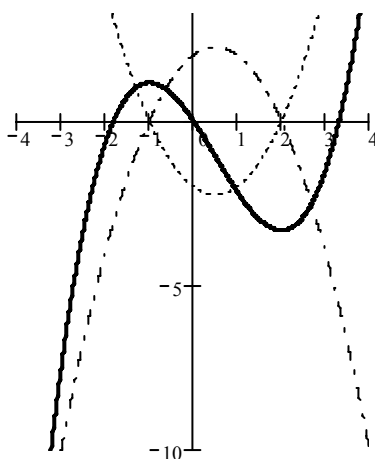


14. Zeichnen Sie Graphen von zeitlichen Entwicklungen, die zu folgenden Aussagen passen.

Beschreiben Sie den Verlauf der Graphen umgangssprachlich und mit mathematischen Fachbegriffen.

- a) Die Zuwachsraten sinken.
- b) Der Aufschwung erlahmt.
- c) Die Talfahrt ist gebremst.

15. Ordnen Sie der folgenden Funktion deren richtige Ableitungsfunktion zu. Nennen Sie mindestens einen Grund für Ihre Zuordnung.



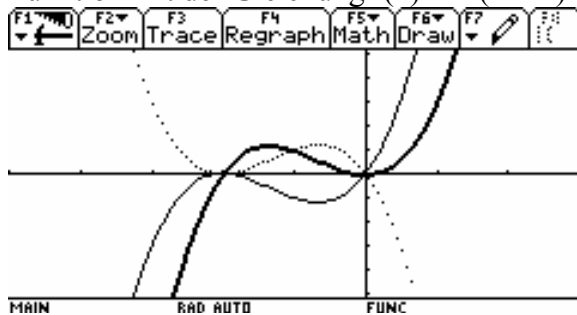
Ausgangsfunktion: \_\_\_\_\_

Ableitungsfunktion a) : .....  
 .....  
 .....

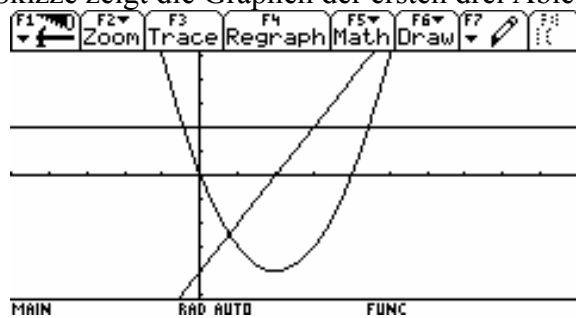
Ableitungsfunktion b) : - . - . - . - .  
 - . - . - . - .  
 - . - . - . - .

Reaktivierbares Wissen und Können

16. In dem untenstehenden Bild sind mehrere Graphen abgebildet. Welcher Graph gehört zur Funktion mit der Gleichung  $f(x) = x(x + 2)^2$ ?

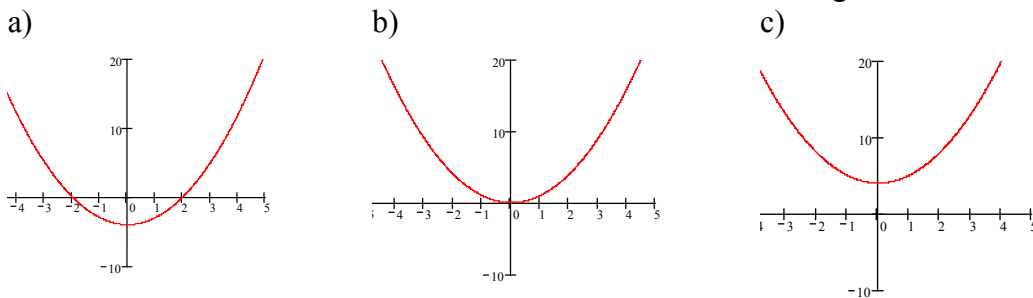


17. Die Skizze zeigt die Graphen der ersten drei Ableitungen einer ganzrationalen Funktion  $f$ .

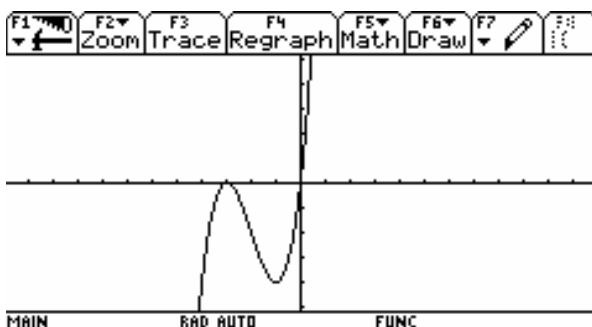


- Beschreiben Sie das Monotonieverhalten der unbekanntes Funktion  $f$  sowie die Krümmung ihres Graphen.
- Skizzieren Sie einen möglichen Verlauf des Graphen von  $f$ .

18. Skizzieren Sie jeweils eine Ausgangsfunktion für folgende Ableitungsfunktionen. Gehen Sie auf wesentliche Unterschiede und Gemeinsamkeiten Ihrer Ergebnisse ein.



19. Untersuchen Sie die Veränderung des Anstieges der Funktion  $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$  zwischen den beiden Extrempunkten  $H(-3/0)$  und  $T(-1/-4)$ . Begründen Sie, dass im Wendepunkt  $W(-2/-2)$  der kleinste Anstieg über den gesamten Definitionsbereich vorliegt.





20. Beweisen Sie: Der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades besitzt genau einen Wendepunkt.
21. Weisen Sie anhand einer Skizze nach, dass eine Funktion mit genau 3 Wendestellen keine ganzrationale Funktion 6. Grades sein kann.
22. Der Erfolg eines Unternehmens wird durch eine Funktion Erf beschrieben, die jeder produzierten Menge  $x$  den erzielten Erfolg  $\text{Erf}(x)$  zuordnet.  $\text{Erf}(x) > 0$  weist auf einen Gewinn hin,  $\text{Erf}(x) < 0$  auf einen Verlust, bei  $\text{Erf}(x) = 0$  arbeitet das Unternehmen kostendeckend. Für ein Unternehmen ist  $\text{Erf}(x) = -0,5x^2 + 10x - 5$ .
- Geben Sie einen sinnvollen Definitionsbereich für die Funktion  $\text{Erf}(x)$  an.
  - Entnehmen Sie der Grafik, in welchen Intervallen  $\text{Erf}(x)$  monoton steigt bzw. monoton fällt. Interpretieren Sie das Verhalten der Funktion aus Sicht des Unternehmens.
  - Bei wie vielen Mengeneinheiten arbeitet das Unternehmen kostendeckend?
  - Für wie viele Mengeneinheiten ist der Erfolg maximal?
  - Ermitteln Sie die Ableitungsfunktion  $\text{Erf}'(x)$  und skizzieren Sie diese im Definitionsbereich der Funktion  $\text{Erf}(x)$ . Was gibt  $\text{Erf}'(x)$  an?
  - Was bedeutet  $\text{Erf}'(x) = 0$ ? Wie verhält sich die Funktion  $\text{Erf}(x)$  an dieser Stelle?

### Exemplarisches

Eine Aufgabe, in der alle Elemente einer vollständigen Kurvendiskussion mit CAS beschrieben sind, befindet sich unter [www.mathe-mv.de](http://www.mathe-mv.de). (Zusätzliche Aufgaben zum Exemplarischen Lernen in Klasse 11). Wir gehen davon aus, dass im Unterricht nur einmal exemplarisch eine vollständige Diskussion durchgeführt wird, da sich ihr Sinn beim Arbeiten mit CAS nahezu erübrigt.

23. (L) Ein Unternehmen stellt Monitore her. Bei der Herstellung von  $x$  Monitoren entstehen die Kosten  $K(x)$  in €. Die Kosten  $K(x)$  werden aus der Summe der festen Kosten  $F(x) = k$  und der variablen Kosten  $V(x) = 0,001x^3 - 1,29x^2 + 600x$  gebildet ( $x > 0$ ;  $k \in \mathbb{R}^+$ ). Der Verkauf der Monitore an die Händler erfolgt zurzeit zum Stückpreis von 300 € und bildet den Umsatz des Unternehmens, der durch die Umsatzfunktion  $U(x)$  beschrieben wird. Der Gewinn des Betriebes  $G(x)$  ergibt sich aus der Differenz von Umsatz und Kosten  $G(x) = U(x) - K(x)$ .
- Zurzeit betragen die festen Kosten  $F(x) = 1200$  €. Geben Sie  $K(x)$  und  $U(x)$  an. Stellen Sie mithilfe einer Wertetabelle ( $0 \leq x \leq 1000$ , Schrittweite 200, Betrag auf 1000 € gerundet) beide Funktionen in demselben Koordinatensystem dar.
  - Untersuchen Sie die Funktion  $K(x) = 0,001x^3 - 1,29x^2 + 600x + 12000$  ( $x \in \mathbb{R}^+$ ) auf Existenz von Wendepunkten und geben Sie die Monotonieintervalle des Graphen an. Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse aus der Sicht des Unternehmens.
  - Berechnen Sie die Schnittstellen zwischen den Funktionen  $K(x) = 0,001x^3 - 1,29x^2 + 600x + 12000$  und  $U(x) = 300x$ . Interpretieren Sie das Intervall zwischen den beiden Schnittstellen hinsichtlich Gewinn und Verlust des Unternehmens. Berechnen Sie den maximalen Gewinn.
  - Der Verkaufspreis für die Monitore ist durch den Konkurrenzdruck um 12 % gesunken. Deshalb werden die Kosten  $K(x) = 0,001x^3 - 1,29x^2 + 600x + 12000$  durch Rationalisierungsmaßnahmen um 10 % reduziert. Berechnen Sie die Anzahl der Monitore, die verkauft werden müssen, um den optimalen Gewinn zu erzielen. Vergleichen Sie mit den Ergebnissen aus c).
  - Die positive Entwicklung kann folgendermaßen beschrieben werden: Im Jahre 1 ist der Gesamtgewinn 82 500 €. In den folgenden Jahren stieg der Gewinn jährlich um 1,25 %. Fassen Sie die Gewinnentwicklung als eine geometrische Folge auf und geben die explizite und rekursive Bildungsvorschrift an. Berechnen Sie den Gewinn für das 9. Geschäftsjahr, wenn sich die Gewinnentwicklung wie beschrieben fortsetzt.

## 2.7 Anwendung der Differenzialrechnung

### Vorhandenes Wissen

Aus dem Mathematikunterricht:

- Verständnis für Extremwertprobleme (bei quadratischen Funktionen)
- Kenntnisse über die Sinus- und die Wurzelfunktion
- Können im Lösen linearer Gleichungssysteme (2 Gleichungen mit 2 Variablen)
- Kenntnis des Einflusses von Parametern auf den Funktionsverlauf bei bisher untersuchten Funktionen, (Streckung, Stauchung oder Verschiebung von Graphen)

Umgangssprachliche Betrachtungen:

- **Optimum:** unter den gegebenen Voraussetzungen, im Hinblick auf ein zu erreichendes Ziel die bestmögliche Lösung, das höchste erreichbare Maß,
- **Extrem:** bis an die äußerste Grenze, (extreme Temperaturen, extreme Ansichten)
- **Schar:** größere Anzahl von zusammen auftretenden Menschen od. Tieren (*Kurvenschar* ist also eine größere Anzahl von zusammen auftretenden Kurven),
- **Parameter:** veränderliche kennzeichnende Größe

### Ziele

#### Sicheres Wissen und Können:

Die Schülerinnen und Schüler wissen, dass

- Extremwertaufgaben nicht algorithmisch gelöst werden können, sondern ein Spezialfall von Problem- oder Sachaufgaben sind (heuristische Vorgehensweisen),
- bei jeder Extremwertaufgabe zum Erfassen und Analysieren des Sachverhalts zunächst die Hauptinformation erfasst, eine Skizze angefertigt, unbekannte Begriffe geklärt werden sollten und sie sich die Veränderung der Zielgröße vorstellen müssen,
- es bei Extremwertproblemen meist sinnvoll ist, von der Zielgröße auszugehen und nach Formeln oder Gleichungen mit der Zielgröße zu suchen (Rückwärtsarbeiten),
- Parameter einer Funktion den Verlauf des Graphen beeinflussen,
- der Begriff Kurvenschar für eine Menge von Graphen einer Funktion mit einem Parameter benutzt wird.

Die Schülerinnen und Schüler können

- die Ableitungsregeln auf einfache ganzrationale, gebrochenrationale sowie  $f(x) = \sin x$  und  $f(x) = \sqrt{x}$  und deren Verknüpfungen und Verkettungen in überschaubaren Fällen anwenden.

#### Reaktivierbares Wissen und Können:

Die Schülerinnen und Schüler kennen

- die Vorgehensweise bei der Lösung von Extremwertaufgaben,
- eine Strategie zum Auffinden von Funktionstermen aus gegebenen Bedingungen.

Die Schülerinnen und Schüler können

- mittels abschnittsweise definierter, verknüpfter bzw. verketteter Funktionen funktionale Zusammenhänge beschreiben und darstellen,
- aus Anwendungsaufgaben Informationen entnehmen und mathematische Zusammenhänge formulieren,
- sich die Veränderung der Zielgröße vorstellen und in Skizzen darstellen,
- Nebenbedingungen erkennen und diese bei der Veränderung der Zielgröße berücksichtigen,
- Ganzrationale Funktionen zur Modellierung inner- und außermathematischer Sachverhalte auffinden, dafür lineare Gleichungssysteme mit CAS rationell lösen,
- mit CAS Kurvenscharen und Regressionsfunktionen darstellen,
- aus Funktionsgleichungen für Kurvenscharen unter vorgegebener Bedingung den konkreten Parameter ermitteln.

### **Exemplarisches**

Die Schüler haben an einprägsamen Beispielen erste Vorstellungen und Einsichten zu folgenden Sachverhalten gewonnen:

- Bei einer Regressionsanalyse wird bei gegebener „Punktwolke“ eine Regressionsfunktion mit CAS erzeugt, evtl. unter Nutzung den Schülern bekannter Zusammenhänge aus anderen Fächern (z. B. Auswertung gewonnener Daten aus Experimenten des naturwissenschaftlichen Unterrichts Ph/Geo/Bio/Ch und der Technik),
- Die Bestimmung einer Ortskurve der Extrem- bzw. Wendepunkte einer Kurvenschar ist ohne umfassende Untersuchung der Kurvenschar möglich.
- Das Newton-Verfahren ist ein Näherungsverfahren zur Nullstellenbestimmung und gewährt Einblick in Verfahren der numerischen Mathematik und in Arbeitsweisen von Rechenprogrammen.

## Aufgaben

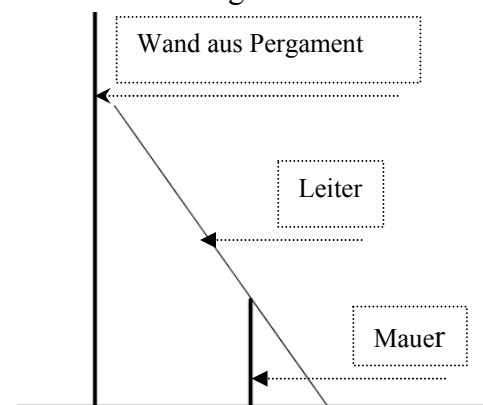
### Sicheres Wissen und Können

1. Der Stützbogen einer Brücke hat die Form einer Parabel. Seine höchste Stelle liegt 40 m über der Bezugslinie. Er hat eine Spannweite von 120 m.  
Zeichnen Sie drei gleiche Koordinatensysteme. Skizzieren Sie den beschriebenen Stützbogen in drei unterschiedlichen Lagen in die Koordinatensysteme.  
Stellen Sie jeweils eine Funktionsgleichung für den Parabelbogen auf.
2. Es ist ein Rechteck gesucht, das einen Flächeninhalt von  $24 \text{ cm}^2$  und einen möglichst kleinen Umfang hat. Stellen Sie sich verschiedene Rechtecke mit dieser Bedingung vor und skizzieren Sie alle Rechtecke mit ganzzahligen Seitenlängen (in Zentimetern).  
Ermitteln Sie unter diesen das Rechteck mit dem kleinsten Umfang.
3. Es ist ein Rechteck gesucht, das einen Umfang von 24 cm und einen möglichst großen Flächeninhalt hat. Veranschaulichen Sie sich das Problem mithilfe eines Bindfadens und skizzieren Sie alle Rechtecke mit ganzzahligen Seitenlängen (in Zentimetern).  
Ermitteln Sie unter diesen das Rechteck mit dem größten Flächeninhalt.
4. Ein Punkt  $Q(a/ f(a))$  wandert im 1. Quadranten auf dem Graphen der Funktion  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$ . Die Tangente an den Graphen im Punkt Q und die zugehörige Normale schließen mit der x-Achse ein Dreieck ein.  
Fertigen Sie Skizzen für mindestens 3 verschiedene Punkte Q an. Beschreiben Sie die Veränderung der Flächeninhalte der Dreiecke.
5. Bestimmen Sie für folgende Aufgabenstellungen jeweils die veränderliche Zielgröße und die konstante Nebenbedingung.
  - a) Für einen Abwasserkanal, der die Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis hat und einen Querschnitt von  $2,5 \text{ m}^2$  hat, soll möglichst wenig Material verbraucht werden.
  - b) Von allen Dosen mit einem Volumen von 850 ml wird diejenige mit dem geringsten Materialverbrauch gesucht.
  - c) Unter einem gleichschenkligen Spitzdach mit einer Neigung von  $45^\circ$  und einer Höhe von 4,10 m soll ein möglichst großer Raum mit geraden Wänden abgetrennt werden.
6. Geben Sie Merkmale von linearen bzw. einer quadratischen Funktionen an, die durch einen Parameter erfasst werden können.
7. Welche der Variablen in den folgenden Gleichungen sind als Parameter im Sinne der üblichen Konventionen für Bezeichnungen in der Mathematik aufzufassen?
  - a)  $mx + n = 0$
  - b)  $x^2 + 2px + q = 0$
  - c)  $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$
  - d)  $y = a^{\lambda x}$
8. Geben Sie eine Funktionsgleichung mit einem (2; 3; 4) Parameter(n) an.

### Reaktivierbares Wissen und Können

9. Zylindrische Konservendosen mit einem Inhalt von 550 ml haben unterschiedliche Formen. Eine Würstchendose hat eine Höhe von 14 cm, eine runde Fischdose hingegen nur 3 cm. Bei einer Ananasdose wurde ein Durchmesser von 10 cm, bei einer Spargeldose einer von nur 3 cm gemessen. Skizzieren Sie die Dosen und ermitteln Sie die Maße einer Dose, die bei einem Volumen von 550 ml den geringsten Materialverbrauch hat.
10. (L) Der Schanzentisch einer Skisprunganlage ist parabelförmig gebogen und verläuft durch die Punkte  $(0 / 0)$ ;  $(1 / 0,1)$  und  $(6 / 3,6)$ . Ermitteln Sie die Gleichung der Funktion, die den Schanzentisch beschreibt. Wie ist die gerade Anlaufspur nach oben weiter zu bauen, damit es an der Anschlussstelle keinen Knick gibt? Begründen Sie Ihre Vorgehensweise.
11. (L) Durch ihre kartesischen Koordinaten sind die Orte A, B, C, D und E gegeben:  $A(0 | 0)$ ,  $B(2 | -1)$ ,  $C(5 | 2)$ ,  $D(8 | 5)$ ,  $E(10 | 4)$  (Einheit 1 km). Die Orte A und B sowie D und E sind geradlinig miteinander verbunden. Der Verkehrsweg von B über C nach D befindet sich in der Planungsphase. Neben den Kosten müssen verkehrstechnische Überlegungen berücksichtigt werden. Insbesondere dürfen in den Anschlusspunkten B und D keine Lücken oder Knicke auftreten. Geben Sie für die Strecken  $\overline{AB}$  und  $\overline{DE}$  je eine Funktionsgleichung und den zugehörigen Definitionsbereich an. Bestimmen Sie die Gleichung einer Funktion  $g$  sowie deren Definitionsbereich für die kürzeste Verbindung  $V_1$  von B nach D. Prüfen Sie, ob C auf diesem Verbindungsweg liegt. Begründen Sie, dass  $V_1$  verkehrstechnisch abzulehnen ist. Berechnen Sie eine Polynomfunktion  $h$  maximal 6. Grades für die knickfreie Verbindung  $V_2$  von B über C nach D, so dass in den Randpunkten B und D die zweite Ableitung von  $h$  den Wert null annimmt. Ermitteln Sie den prozentualen Mehraufwand der Materialkosten beim Bau von  $V_2$  gegenüber  $V_1$ , wenn die Kosten proportional zur Länge des Verkehrsweges sind.

12. (L) Ein Bühnenbild besteht aus einer 1,60 m hohen Mauer, an der eine 5 m lange Leiter lehnt, die am Boden befestigt ist und in einer Schiene läuft. Hinter der Mauer befindet sich eine Landschaft, die auf Pergamentpapier gezeichnet wurde. Die Mauer ist 2 m von der Wand aus Pergamentpapier entfernt. Was passiert, wenn die Leiter sich in der Schiene am Boden bewegt? Kann die Leiter die Wand aus Pergament zerstören?



13. (L) Eine Gemeinde hat einen Überschuss erwirtschaftet und möchte eine Sportanlage bauen. Der Laufverein wünscht sich eine 400 m Laufbahn (Innenabmessung). Im Innern der Laufbahn soll ein Spielfeld zur vielfältigen Nutzung rechteckig angelegt werden. Die Laufbahn soll 5 m breit sein, parallel zur Länge des Spielfeldes verlaufen und halbkreisförmig um dessen Breite führen. Das Gelände lässt aber nur eine Breite der Sportanlage von höchstens 60 m zu. Wie ist die Sportanlage anzulegen, wenn das Spielfeld einen möglichst großen Flächeninhalt haben soll? Wie groß ist dann die Fläche, die zu Verfügung steht?

## Exemplarisches

## Das Newton-Verfahren

Da die Schüler mit dem CAS-Rechner problemlos Gleichungen lösen und somit Nullstellen berechnen können, sollte das Newton-Verfahren lediglich exemplarisch als eine weitere Anwendung der Differenzialrechnung demonstriert werden. Die wäre etwa auch in Form eines Schülervortrages möglich.

Eine Möglichkeit, das Newton-Verfahren zuerst graphisch zu veranschaulichen, um dann der Herleitung der Formel stärkere Beachtung gegenüber der eigentlichen Ausführung der Rechenschritte zu schenken, ist unter [www.mathe-mv.de](http://www.mathe-mv.de). (Zusätzliche Aufgaben zum Exemplarischen Lernen in Klasse 11) vorgestellt.

14. (L) Bei 12 Schülern bestimmte man ihre Größe und ihre Masse.

Größe in cm	170	163	172	160	166	170	174	165	162	167	165	168
Masse in kg	67,5	65	80	57,5	68	74	79	70	56	62,5	59,5	66

- Stellen Sie den Zusammenhang beider Größen in einem Diagramm dar. Bestimmen Sie die Regressionsgerade.
- Welche Masse wird man für einen Schüler schätzen (voraussagen), wenn man nur seine Größe von 160 cm kennt?

15. (L) Folgende Messwerte ergaben sich bei der Messung der Periodendauer eines Fadenpendels: l...Länge des Pendels T... Periodendauer der Schwingung

l in m	T in s
0.2	0.9
0.3	1
0.4	1.3
0.5	1.4
0.6	1.5
0.7	1.7
0.8	1.8
0.9	1.9
1	2

Stellen Sie die Daten als Punktwolke dar! Führen Sie eine Potenzregression aus und vermuten Sie daraus einen allgemeinen Zusammenhang der Größen!

16. Bei einem sportlichen Wettkampf haben die Teilnehmer an verschiedenen Punkten mit unterschiedlichen Abständen einer geraden Strecke verschiedene Aufgaben zu erfüllen. Die Ergebnisse werden dann von einem Helfer zur Jury gebracht.

Wo ist der günstigste Standort für die Jury?

Zusatz: Wie sieht die Lösung der Aufgabe aus, wenn die Läuferstrecke nicht geradlinig ist sondern als Steckenzug gestaltet wird?

17. (L) Gegeben sei eine Funktionenschar mit  $f_k(x) = \frac{-1}{4k}x^3 + \frac{3}{4}k \cdot x$ ,  $k \neq 0$

Zunächst soll  $k > 0$  betrachtet werden.

Zeichnen Sie die Funktionen  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$ ,  $f_3(x)$  und  $f_4(x)$  in einem geeigneten Intervall mit Ihrem CAS und beschreiben Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Graphen!

(1) Berechnen Sie die Nullstellen von  $f_k(x)$  und beschreiben Sie den Einfluss des Parameters  $k$  auf deren Lage.

- (2) Berechnen Sie die Hochpunkte von  $f_k(x)$  und beschreiben Sie den Einfluss des Parameters  $k$  auf deren Lage.
- (3) Zeichnen Sie die Ortskurve der Hochpunkte in Ihre Darstellung mit ein.

Es soll jetzt  $k < 0$  betrachtet werden.

- (1) Zeichnen Sie die Funktionen  $f_{-1}(x)$ ,  $f_{-2}(x)$ ,  $f_{-3}(x)$  und  $f_{-4}(x)$  in einem geeigneten Intervall mit Ihrem CAS und beschreiben Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Graphen!
- (2) Berechnen Sie die Nullstellen von  $f_k(x)$  und beschreiben Sie den Einfluss des Parameters  $k$  auf deren Lage.
- (3) Berechnen Sie die Hochpunkte von  $f_k(x)$  und beschreiben Sie den Einfluss des Parameters  $k$  auf deren Lage.
- (4) Zeichnen Sie die Ortskurve der Hochpunkte in Ihre Darstellung mit ein.

Zeichnen Sie in ein neues Koordinatensystem  $f_2(x)$  und  $f_2(x)$ . Vergleichen Sie!

**18. (L)** Finden von Funktionen mit besonderen Eigenschaften - ein Weihnachtsspaß:

Der Weihnachtsmann ist außer sich. Rudi, das rotnasige Rentier, hat vom Weihnachtspunsch genascht und ist danach einfach ausgerissen. Er faselte etwas von „Nur der Himmel ist frei“ und „Endlich Urlaub!“, dann flog er davon. Kaum war die Wirkung des Punsch verfliegen, kam er auch schon reumütig zurück. Nur leider hatte er völlig vergessen, wo er überall war. War er gar auf der Erde aufgekommen? Er erinnerte sich nur an Bruchstücke seiner Flugbahn. Er weiß noch, dass sein Höhenmesser auf der  $y$ -Achse 5 Längeneinheiten anzeigte, als er den Koordinatenursprung überflog. Außerdem erinnerte er sich daran, dass seine Bahn an der Stelle  $x = 2$  gerade eine Steigung von 16 hatte.

Es fiel ihm noch ein, dass er an der Stelle  $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$  von Linkskurve auf Rechtskurve wechselte.

Der Weihnachtsmann war ratlos. „Daraus kann ich beim besten Willen deine Flugbahn nicht errechnen.“ Da meldete sich einer der Weihnachtsengel zu Wort. „Ich habe beobachtet, dass seine Flugbahn einer ganzrationalen Funktion 4. Grades gleich- so schön symmetrisch zur  $y$ -Achse!“

„Dann ist alles klar“ meinte der Weihnachtsmann erleichtert. „Wir können der Presse sagen, dass Rudi nur einen Buchstaben zur Erinnerung an unser großes Fest in den Himmel schreiben wollte - in meinem Auftrag natürlich“

Finden Sie möglichst viele Fragen zum Text und beantworten Sie diese.

## 2.8 Integralrechnung

### Vorhandenes Wissen

*Aus dem Mathematikunterricht:*

*Sekundarstufe I:*

- Flächenberechnungen (Dreiecke, Vierecke, zusammengesetzte Flächen)
- Volumenberechnung Prisma, Kegel, Pyramide und Kugel mit Formeln
- Zerlegen und Zusammensetzen von Flächen und Körpern
- Zylinder, Kegel und Kugel als Rotationskörper

*Sekundarstufe II:*

- Grenzwertbegriff
- Umgang mit dem Summenzeichen
- Intervallbegriff und Intervallgrenzen
- Ermitteln der Ableitungsfunktion
- Finden von Funktionsgleichungen bzw. -graphen zu gegebenen Gleichungen bzw. Graphen von Ableitungsfunktionen

### Ziele

#### Sicheres Wissen und Können

Die Schülerinnen und Schüler wissen, dass

- ein (bestimmtes)<sup>2</sup> Integral (im Riemannsches Sinne) in der Mathematik als gemeinsamer Grenzwert zweier Folgen von Summen von Teilprodukten (Ober- und Untersummen) erklärt wird,
- das Integral der Funktion in dem Intervall geometrisch als Inhalt der Fläche zwischen dem Funktionsgraphen und der x-Achse aufgefasst werden kann, wenn der Graph einer Funktion in einem Intervall oberhalb der x-Achse liegt,
- das Integral der Funktion  $f$  den aufsummierten Gesamtbestand der Größe  $G$  in dem Integrationsintervall angibt, wenn eine Funktion  $f$  das Änderungsverhalten einer Größe  $G$  in Bezug auf die auf der x-Achse dargestellten Größe in Anwendungssituationen beschreibt. Die Art der Größe  $G$  kann durch Multiplikation der beiden auf der y- und x-Achse dargestellten Größen ermittelt werden.
- das Bestimmen einer Stammfunktion eine Umkehrung des Differenzierens ist.

---

<sup>2</sup> Die Unterscheidung von bestimmten und unbestimmten Integralen ist aus fachlicher, linguistischer und didaktischer Sicht problematisch. Das so genannte „bestimmte“ Integral ist das eigentliche Integral im Riemannsches Sinne. Ein „unbestimmtes“ Integral ist kein Integral, sondern nur eine Bezeichnung für eine Klasse von Stammfunktionen. Das Wort Integral und das Integralzeichen haben somit zwei unterschiedliche Bedeutungen. Es ist in den meisten Schul- und Fachbüchern üblich, auf diese Doppelbedeutung zu verzichten, was ohne Probleme möglich ist. Allerdings wird die Integration ohne Grenzen in einigen CAS zugelassen, so auch im CAS auf den CAS-Rechnern von TI. Die Schüler sollten deshalb über diese Schreibweise und Methode zur Bestimmung von Stammfunktionen informiert werden.



Die Schülerinnen und Schüler können

- Stammfunktionen für einfache Potenzfunktionen bestimmen,
- die Schreibweise für das bestimmte Integral benutzen,
- den Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung auf einfache inner- und außermathematische Aufgabenstellungen anwenden,
- einfache Integrationsregeln (Summen-, Faktor- und Potenzregel) anwenden,
- Rotationskörper um die  $x$ -Achse realisieren und identifizieren.

### **Reaktivierbares Wissen und Können**

Die Schülerinnen und Schüler kennen

- die Zusammenhänge zwischen Ableitung, Ableitungsfunktion, Integral, Integralfunktion und Stammfunktion,
- ein Verfahren zur Berechnung von Flächeninhalten zwischen Funktionsgraphen,
- ein Verfahren zur Berechnung des Volumens von Rotationskörpern.

Die Schülerinnen und Schüler können:

- in Sachzusammenhängen und innermathematisch positive und negative Werte von bestimmten Integralen deuten,
- Flächenberechnungen zwischen Graphen in Intervallen vornehmen, insbesondere auch Berechnungen von zusammengesetzten Flächen,
- Anwendungsaufgaben lösen, die die geometrische Bedeutung des Integrals und seine Bedeutung als aufsummierten Bestand einer Größe betreffen,
- bei Rotation um die  $x$ -Achse zu einem Rotationskörper den erzeugenden Funktionsgraphen angeben und umgekehrt,
- das Volumen von Rotationskörpern, die bei der Rotation um die  $x$ -Achse entstehen, berechnen.

### **Exemplarisches**

Die Schüler haben an einprägsamen Beispielen erste Vorstellungen und Einsichten zu folgenden Sachverhalten gewonnen:

- Die Berechnung des bestimmten Integrals kann als Grenzwert von Ober- und Untersummen hergeleitet werden.
- Es gibt komplexe Anwendung der Integralrechnung in der Praxis.
- Die Berechnung der Bogenlänge oder der Mantelfläche ist eine Anwendung der Integralrechnung.

## Aufgaben

### Sicheres Wissen und Können

1. Ermitteln Sie Schranken für den Inhalt der Fläche, die der Graph der Funktion  $f(x) = 4 - x^2$  mit der x-Achse einschließt, indem Sie Ober- und Untersummen für eine Unterteilung des Integrationsintervalls in 2 bzw. 4 gleichgroße Intervalle berechnen.

2. Berechnen Sie folgende Integrale durch geometrische Überlegungen.

$$\text{a) } \int_0^3 x \, dx =$$

$$\text{b) } \int_{-2}^3 x \, dx =$$

$$\text{c) } \int_2^5 x \, dx =$$

3. Berechnen Sie folgende Integrale und deuten Sie den Wert geometrisch.

$$\text{a) } \int_0^3 x \, dx =$$

$$\text{b) } \int_0^2 (x+3) \, dx =$$

$$\text{c) } \int_0^2 (-x+3) \, dx =$$

$$\text{d) } \int_0^5 (x-3) \, dx =$$

4. Berechnen Sie folgende Integrale und entscheiden Sie, für welche Flächen die Integrale als Flächenmaßzahl interpretiert werden können.

$$\text{a) } \int_{-1}^0 (x^2 + 1,5x) \, dx =$$

$$\text{b) } \int_{-2}^2 \left( \frac{1}{48} (x^4 - 24x^2 + 80) \right) \, dx =$$

$$\text{c) } \int_0^3 (2x-3) \, dx =$$

$$\text{d) } \int_{-5}^{-1} (x+3)^2 \, dx =$$

$$\text{e) } \int_{-1}^1 (x+1)^2 (x-1) \, dx =$$

$$\text{f) } \int_0^{2,5} (-2x^2 + 5x) \, dx =$$

5. Skizzieren Sie den Graphen einer Funktion und beschriften Sie Flächen zwischen dem Graphen und der x-Achse, so dass für die Inhalte  $A_1$ ,  $A_2$  bzw.  $A_3$  der entstehenden Flächen folgende Beziehung gilt.

$$\text{a) } \int_a^b f(x) \, dx = A_1 - A_2$$

$$\text{b) } \int_a^b f(x) \, dx = -A_1 + A_2 - A_3 = -A_1$$

6. Bestätigen Sie durch Integration geeigneter Funktionen folgende Flächeninhaltsformeln.

$$\text{a) Rechteck: } A = a \cdot b \quad \text{b) Dreieck: } A = \frac{1}{2} g \cdot h_g \quad \text{c) Trapez: } A = \frac{1}{2} (a + c) \cdot h$$

7. Es sei  $f'(x) = 0,5x^3 - 2x^2$ . Bestimmen Sie  $f(x)$ .

8. Geben Sie drei verschiedene Stammfunktionen zur Funktion  $f(x) = 5x^3 - 2x + 3$  an.

9. Es sei  $f'(x)$  eine im Intervall  $[a; b]$  integrierbare Funktion. Berechnen Sie für  $x \in [a; b]$

$$\text{das Integral } \int_a^x f'(t) \, dt.$$

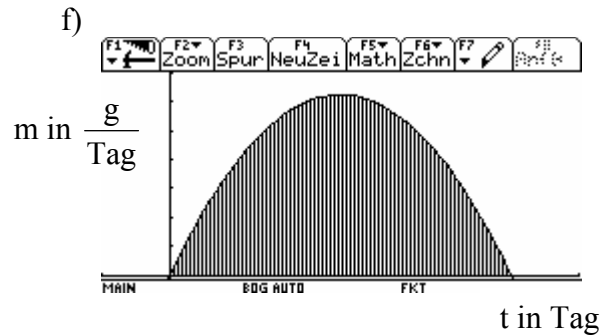
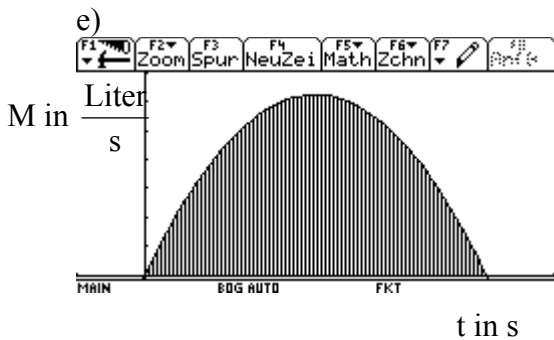
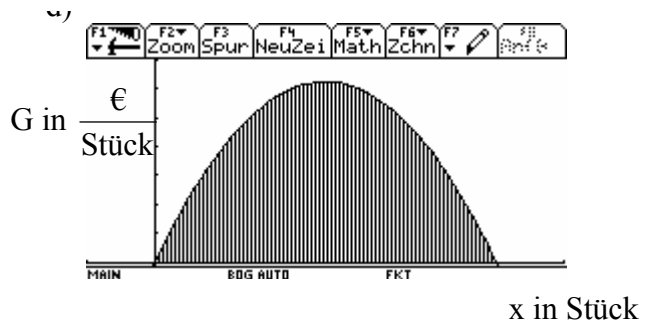
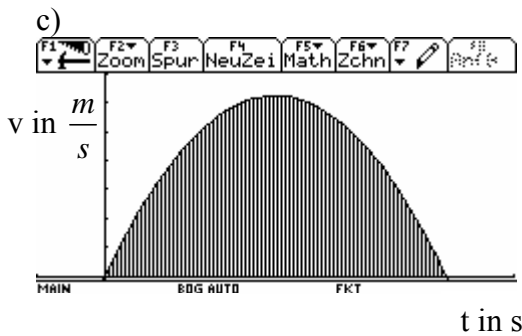
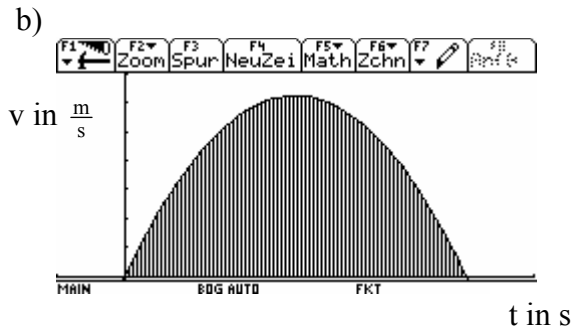
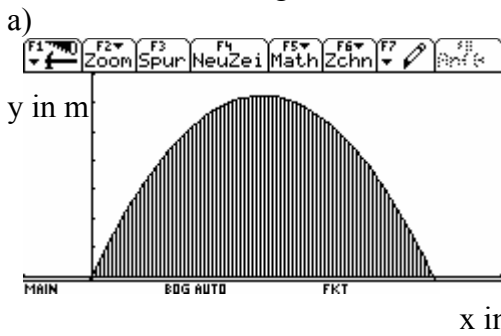
10. Bestimmen Sie die Stammfunktion von  $f(x) = 0,5 \cdot x$ , deren Graph durch  $P(-2 / 4)$  verläuft.

11. Die Stammfunktionen zu  $f(x)$  seien die Funktionen  $F(x) + c$  und zu  $g(x)$  die Funktionen  $G(x) + d$  mit  $c, d \in \mathbb{R}$ . Geben Sie die Stammfunktionen zur Funktion  $h(x) = f(x) + g(x)$  an.

12. Bestimmen Sie zu folgenden Funktionen jeweils alle Stammfunktionen.

- a)  $f(x) = m \cdot x + n$       b)  $f(m) = m \cdot x + n$       c)  $f(n) = m \cdot x + n$

13. Geben Sie einen Sachverhalt an, der zu dem dargestellten Diagramm passt und erläutern Sie die Bedeutung der markierten Flächeninhalte.

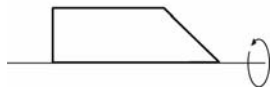


14. In einem Diagramm ist der folgende Zusammenhang zwischen zwei Größen dargestellt. Geben Sie an, welche Bedeutung der Flächeninhalt zwischen der Kurve und der x-Achse in dem angegebenen Intervall hat.

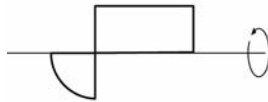
y-Achse	Veränderung des Gewichtes eines Säuglings	Fördermenge einer Pumpe in $\frac{m^3}{h}$	Downloadrate in KByte/s	Querschnitt eines Gefäßes in $cm^2$
x-Achse	Lebensmonate	Zeit in h	Zeit in s	Höhe d. Gefäßes in cm
Intervall	2. bis 6. Monat	1. bis 3. Stunde	20 Sekunden	0 bis 10 cm

15. Beschreiben Sie verschiedene Möglichkeiten, durch Rotation von Flächen bzw. Funktionsgraphen Körper entstehen zu lassen, die aus zusammengesetzten Kegeln bestehen.
16. Skizzieren Sie eine räumliche Darstellung der Körper, die bei Rotation der Flächen um die x-Achse entstehen.

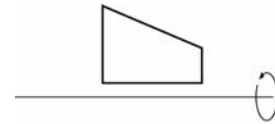
a)



b)



c)



### Reaktivierbares Wissen und Können

17. Die Funktion  $I_a(x) = \int_a^x f(t)dt$  wird als Integralfunktion bezeichnet. Es sei  $f(x) = 2x - 4$ .

- a) Berechnen Sie die Integralfunktion  $I_a(x) = \int_a^x f(t)dt$ .
- b) Stellen Sie die Funktion  $f(x)$  und die Integralfunktionen  $I_a(x)$  für  $a = -1; 0; 2; 4$  in je einem Koordinatensystem dar.
- c) Berechnen Sie folgende Integrale geometrisch sowie mithilfe der entsprechenden Integralfunktion:

$$(1) \int_{-1}^3 f(x)dx$$

$$(2) \int_0^3 f(x)dx$$

$$(3) \int_2^4 f(x)dx$$

$$(4) \int_4^5 f(x)dx$$

18. Es sei  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 3x$ .

a) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von  $f$ .

b) Berechnen Sie das Integral  $\int_{-1}^2 (x^3 - 3x^2 - 3x)dx$ .

c) Bestimmen Sie die Flächenmaßzahl derjenigen Fläche, die vom Graphen der Funktion  $f$  mit der x-Achse im Intervall  $[-1; 2]$  eingeschlossen wird.

d) Vergleichen Sie die Ergebnisse der Aufgabenstellungen a) bis c) miteinander.

19. Stellen Sie Beziehungen zwischen den folgenden Begriffen der Differenzial- und Integralrechnung in einer Übersicht dar.

Ableitung einer Funktion an einer Stelle, positiver bzw. negativer Wert der Ableitung an einer Stelle, Ableitungsfunktion, Tangente, Änderungsverhalten einer Größe, Integral einer Funktion in einem Intervall, positiver bzw. negativer Wert des Integrals, Integralfunktion, Flächeninhalt, Bestand einer Größe.

20. (L) Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhaltes der Fläche, die von der Funktion  $f(x)$  und der x-Achse vollständig eingeschlossen ist. Zeichnen Sie diese Flächen mit Ihrem CAS - Rechner. Bestimmen Sie die Flächeninhalte, wenn die Achseneinteilung kartesisch in Metern (Millimetern, Zentimetern) erfolgt.

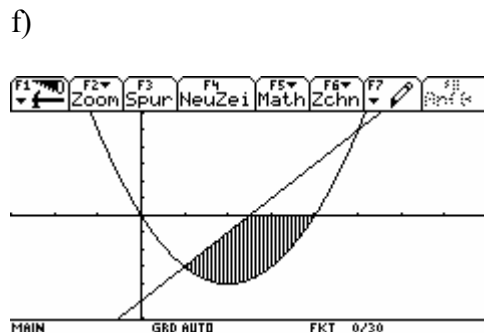
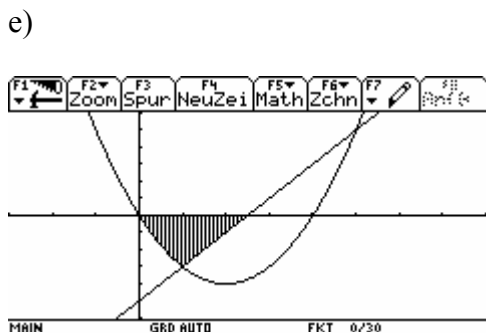
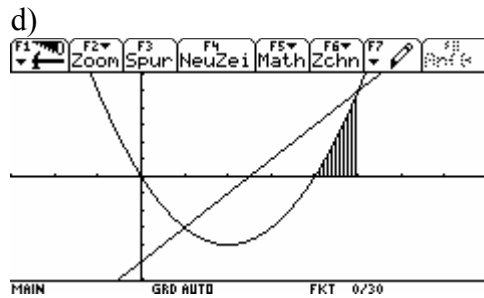
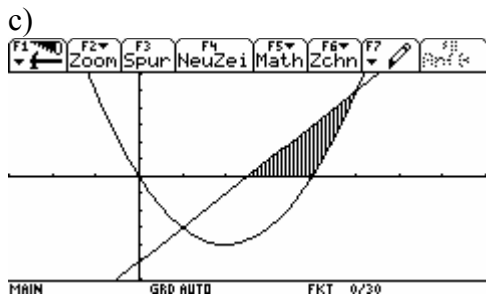
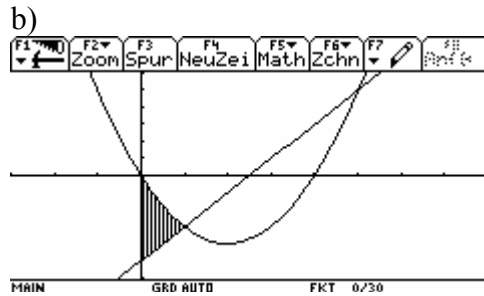
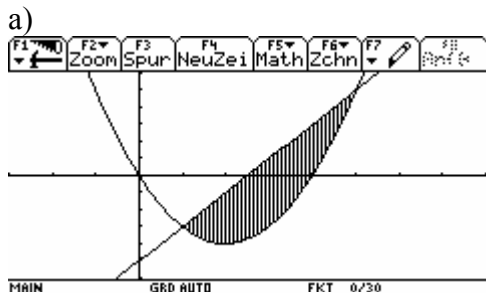
a)  $f(x) = -\frac{1}{8}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + 3$     b)  $f(x) = x^2 - 4$     c)  $f(x) = x^3 - x^2 - 6x$

21. Zeigen Sie, dass für alle  $x \in \mathbb{R}; x > -1$  die Funktionen  $F$  und  $G$  Stammfunktionen der gleichen Funktion sind, indem Sie die Eigenschaften von Stammfunktionen verwenden.

$$F(x) = \sqrt{x+1} \qquad G(x) = \frac{x}{1+\sqrt{x+1}}$$

22. Im Folgenden sind die Funktionsgraphen der Funktionen  $f(x) = x^2 - 4x$  und  $g(x) = 2x - 5$  dargestellt. Die Nullstellen von  $f(x)$  sind  $x_{01} = 0$  und  $x_{02} = 4$ , die von  $g(x)$  ist  $x_0 = 2,5$ . Die Funktionen schneiden einander an den Stellen  $x_{S1} = 1$  und  $x_{S2} = 5$ .

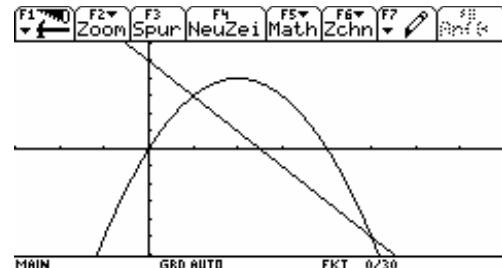
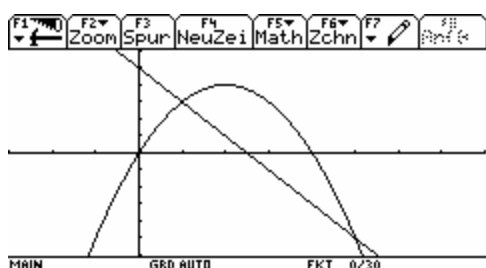
Geben Sie die zur Berechnung der schraffierten Fläche notwendigen Integrale an.



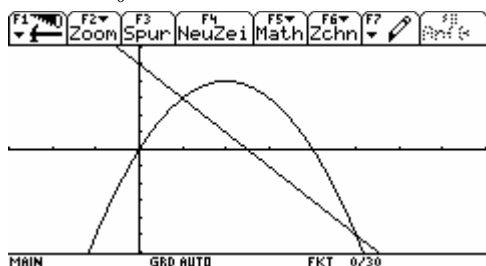
23. In den Abbildungen sind die Graphen der Funktionen  $f(x) = 4x - x^2$  und  $g(x) = 5 - 2x$  dargestellt. Schraffieren Sie die Flächen, die mit den Integralen berechnet werden. Die Nullstellen und Schnittstellen entsprechen denen der vorherigen Aufgabe.

a)  $A_1 = \int_1^5 (f(x) - g(x)) dx$

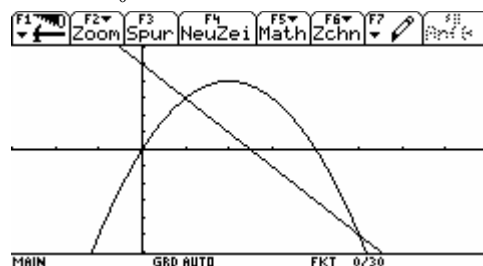
b)  $A_2 = \int_0^1 (g(x) - f(x)) dx + \int_1^{2,5} (f(x) - g(x)) dx$



$$c) A_3 = \int_0^4 f(x) dx$$



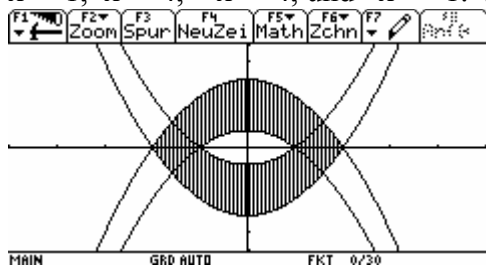
$$d) A_4 = \int_0^{2.5} g(x) dx$$



Hinweis zur Darstellung der Schraffur mit dem Voyage 200:

Analog der Aufteilung der Flächenstücke in Teilflächen erfolgt die Schraffur schrittweise. Da zwischen Funktionsgraph und x-Achse die Schraffur nur oberhalb der x-Achse möglich ist, kann für Flächen unterhalb der x-Achse die Funktion  $y = 0$  eingefügt werden.

24. Das gekennzeichnete Flächenstück wird begrenzt durch Parabeln mit den Gleichungen  $x^2 - 1$ ,  $x^2 - 4$ ,  $-x^2 + 4$ , und  $-x^2 + 1$ . Wie groß ist der Flächeninhalt?



25. Eine Fläche ist umschlossen von

- den Geraden mit den Gleichungen  $x = 0,5$  bzw.  $x = 4$ ,
- dem Graphen der Funktion  $f$  mit  $f(x) = \frac{2}{x^2}$ ,
- dem Graphen der Funktion  $g$  mit  $g(x) = 0,5x$ ,
- dem Graphen der Funktion  $h$  mit  $h(x) = \frac{x^3 + 4}{2x^2}$ .

Erläutern Sie die Berechnung des Inhalts dieses Flächenstückes.

26. Gegeben wird die Funktion  $f$  mit  $f(x) = \frac{2}{x^2}$ . Die Tangente an den Graphen von  $f$  im Punkt  $P(1 / f(1))$ , die Gerade  $x = -2$  und die x-Achse umschließen ein Flächenstück, dessen

Inhalt zu berechnen ist.

27. Gegeben sei die Funktion  $f$  mit  $f(x) = \frac{8}{x^2} + 2$ . Der Graph von  $f$ , die x-Achse und die

Geraden  $x = 1$  und  $x = 4$  schließen ein Flächenstück ein. Bestimmen Sie eine Gerade, die diese Fläche halbiert. Geben Sie ihre Gleichung an.

28. Es wird die Funktion  $f$  mit der Gleichung  $f(x) = \frac{4x^2 - 4}{x^2}$  gegeben. Die waagerechte

Asymptote des Graphen von  $f$ , die Geraden  $x = 1$ ,  $x = 2$  und die x-Achse umschließen ein Rechteck. Die Kurve von  $f$  zerlegt dieses Rechteck in zwei Teilflächen. Berechnen Sie jeweils den Inhalt dieser Teilflächen.

29. Der Graph der Funktion  $f$  mit der Gleichung  $f(x) = x^3 - 5x^2 + 9x$  zerlegt das Quadrat mit den Eckpunkten  $A(0 | 0)$ ,  $B(4 | 0)$ ,  $C(4 | 4)$  und  $D(0 | 4)$  in vier Teilflächen.

Berechnen Sie den Flächeninhalt der einzelnen Teilflächen.

30. Gegeben wird die Funktion  $f$  mit der Gleichung  $f(x) = \frac{x^3 - 8}{4x^2}$ . Lösen Sie folgende

Flächenprobleme.

- Der Graph von  $f$ , die  $x$ -Achse und die Gerade  $x = 3$  begrenzen eine Fläche. Berechnen Sie den Flächeninhalt.
- Die Geraden  $x = 2$ ,  $x = 4$ ,  $y = 0$  und  $y = 1$  umschließen ein Flächenstück. In welchem Verhältnis teilt der Graph der Funktion  $f$  die Fläche dieses Rechtecks?
- Es sei  $z > 2$ . Dann begrenzen die Geraden  $x = 2$ ,  $x = z$ ,  $y = 0,25x$  und der Graph von  $f$  ein Flächenstück. Berechnen Sie  $z$  so, dass der Inhalt dieser Fläche  $0,8$  FE beträgt.

31. (L) Die Gravitationsfeldstärke beträgt auf der Erde am Äquator etwa  $G = 9,801 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)$ .

An den Polen beträgt  $G = 9,83 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)$ . Vergrößert sich der Abstand zum Erdmittelpunkt,

so wird die Gravitationsfeldstärke kleiner. Es gilt:  $G(x) = \frac{3,987 \cdot 10^{14}}{x^2}$ . Dabei ist  $x$  der

Abstand zum Erdmittelpunkt in Metern.

Um die Kraft berechnen zu können, die gebraucht wird, um z.B. eine Rakete von der Erde „wegzuschießen“, wird die Funktion  $F(x) = G(x) \cdot m$  verwendet. Die Größe  $m$  ist die Masse des Körpers in kg, der transportiert wird. Im Folgenden soll  $m = 100$  (kg) sein. Der Zahlenwert der Fläche zwischen den Geraden  $x = x_1$ ,  $x = x_2$ , dem Graphen von  $F(x)$  und der  $x$ -Achse beschreibt die Arbeit, die verrichtet werden muss, um einen Körper von einem Abstand  $x_1$  zu einem Abstand  $x_2$  zum Erdmittelpunkt zu heben. Der Erdradius beträgt  $R = 6,37 \cdot 10^6$  (m).

- Zeichnen Sie die Funktion  $F(x)$  und kennzeichnen Sie die Arbeit, die verrichtet werden muss, um den Körper von  $x_1 = R$  zu  $x_2 = 2 \cdot R$  zu bringen.
- Berechnen Sie die Arbeit, die verrichtet werden muss, um den Körper von  $x_1 = R$  zu  $x_2 = 2 \cdot R$  zu bringen und die Arbeit, die verrichtet werden muss, um den Körper von  $x_3 = 4 \cdot R$  zu  $x_4 = 5 \cdot R$  zu bringen.
- Vergleichen Sie beide Werte und finden Sie Gründe für den Unterschied.
- Berechnen Sie die Arbeit, die der Körper verrichtet, wenn er von  $x_4 = 5 \cdot R$  zu  $x_3 = 4 \cdot R$  „fällt“. Deuten Sie das Vorzeichen der berechneten Arbeit.

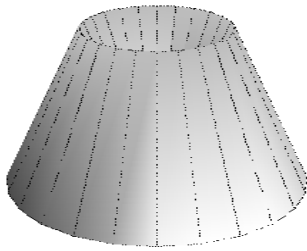
32. Eine Schale hat als Begrenzungen zwei Rotationskörper, die durch Drehung der Graphen von  $f$  und  $g$  um die  $x$ -Achse zwischen  $x = 0$  und  $x = 5$  entstehen. Die Funktionen  $f$  und  $g$  haben die Gleichung  $f(x) = \sqrt{5x}$  und  $g(x) = \sqrt{5x - 10}$ . Berechnen Sie das Volumen der Schale.

33. Der Graph der Funktion  $f$  mit der Gleichung  $f(x) = 0,5x\sqrt{4 - x^2}$  umschließt zusammen mit der  $x$ -Achse ein Flächenstück vollständig, das um die  $x$ -Achse rotiert.

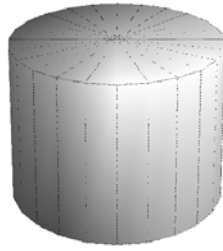
- Berechnen Sie das Volumen des entstandenen Drehkörpers.
- Der betrachtete Rotationskörper soll aus einem möglichst kleinen Zylinder mit gleicher Achse hergestellt werden. Wie viel Prozent Abfall entsteht dabei?

34. Die dargestellten Körper (nicht maßstabsgerecht) haben alle die Höhe 4 Einheiten, der Grundkreisradius bei a) bis c) beträgt 4 Einheiten, bei d) bis f) 3 Einheiten.

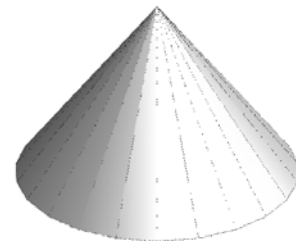
a)



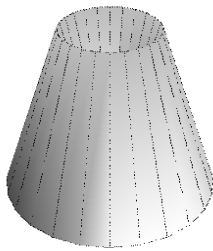
b)



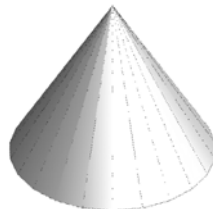
c)



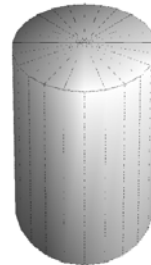
d)



e)

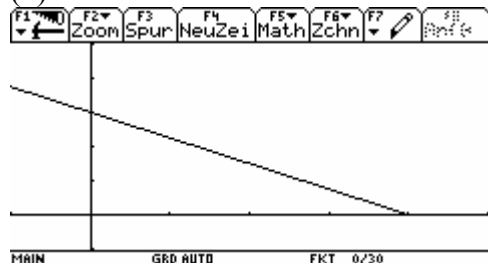


f)

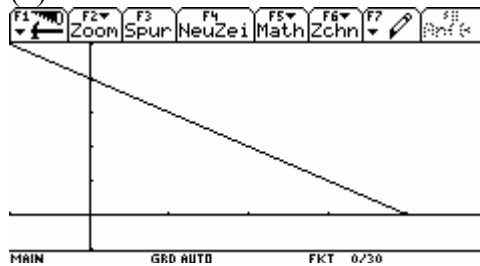


Die Körper entstehen bei Rotation der dargestellten Funktionsgraphen (1) bis (6) für nichtnegative Argumente um die x-Achse.

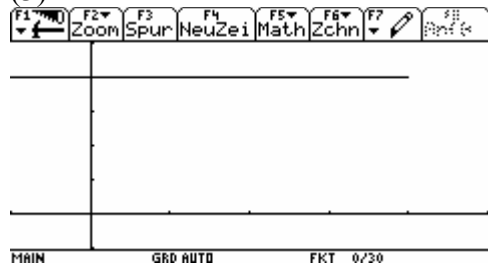
(1)



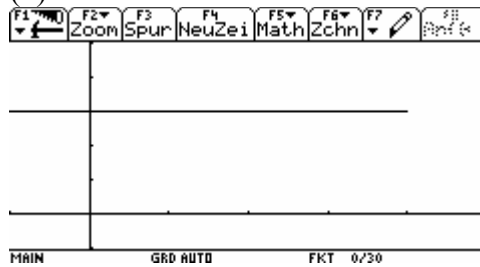
(2)



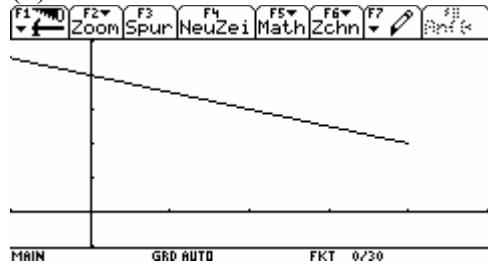
(3)



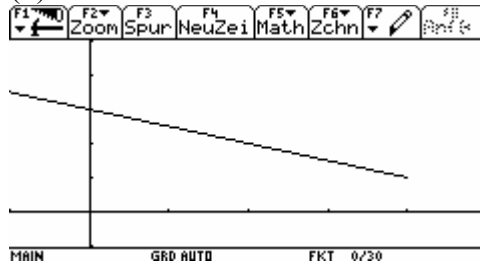
(4)



(5)



(6)



- a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen für die dargestellten Funktionen.
- b) Ordnen Sie die Rotationskörper den erzeugenden Funktionsgraphen zu.



- 35.** Es ist das Volumen des Rotationskörpers zu berechnen, der durch Rotation des Graphen von  $f$  in den Grenzen von  $a$  bis  $b$  um die  $x$ -Achse entsteht.
- $f(x) = 3x - x^2$ ;  $a, b$  sind die Nullstellen von  $f$
  - $f(x) = \sqrt{4-x}$ ;  $a = 0$  und  $b = 2$
  - $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ;  $a = 1$  und  $b = 4$
- 36.** Es ist das Volumen des Rotationskörpers zu berechnen, der durch Rotation der von den Graphen von  $f$  und  $g$  eingeschlossenen Fläche um die  $x$ -Achse entsteht. Die Funktionsgleichungen sind:  $f(x) = 2\sqrt{x}$  und  $g(x) = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$ .
- 37.** Gegeben wird die Funktion  $f$  mit der Gleichung  $f(x) = (0,25x+0,5)e^{2-x}$ . Der Graph von  $f$ , die Koordinatenachsen und die Gerade  $x = 3$  begrenzen in Flächenstück, das um die  $x$ -Achse rotiert.  
Berechnen Sie das Volumen des entstandenen Rotationskörpers näherungsweise, wobei Sie den Graphen von  $f$  durch die Kurventangente im Punkt  $P(2 / f(2))$  ersetzen.

### Exemplarisches

Berechnung eines bestimmten Integrals als Grenzwert der Ober- und Untersumme

Ein Beispiel wird unter [www.mathe-mv.de](http://www.mathe-mv.de). (Zusätzliche Aufgaben zum Exemplarischen Lernen in Klasse 11) vorgestellt.

Berechnung der Bogenlänge

Ein Beispiel wird unter [www.mathe-mv.de](http://www.mathe-mv.de). (Zusätzliche Aufgaben zum Exemplarischen Lernen in Klasse 11) vorgestellt.

- 38.** (L) Toni erlernt das Bogenschießen. Er stellt fest, dass es ein großer Unterschied ist, ob er den Bogen um 10 cm oder um 50 cm spannen will. Die Profis wissen genau, dass die aufzuwendende Kraft  $F$  (in N) quadratisch mit dem Spannen der Bogensehne wächst. Es gilt:

$$F(x) = D \cdot x^2. \quad D \text{ ist } \left( \text{in } \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right) \text{ eine Konstante und hängt vom jeweiligen Bogen ab, } x \text{ (in$$

m) ist das Stück, um das man den Bogen spannen will. (Rechnung ohne Einheiten!)

- Wie groß ist die Kraft  $F$  (in N), die aufzuwenden ist, um einen Bogen mit  $D = 2000$  um 0,1 m (0,3 m; 0,5 m) zu spannen? ( $F$  durch 10 ist etwa die Masse in kg, die Sie vergleichsweise heben müssten.)
- Stellen Sie die Kraft  $F$  in Abhängigkeit von dem „Spannstück“  $x$  (in m) für  $0 \leq x \leq 0,55$  graphisch mit Ihrem CAS dar und kennzeichnen Sie in Ihrer Darstellung die Arbeit  $W$  (in Nm), die Toni dann jeweils verrichten muss.
- Toni bemerkt, dass die Abschussgeschwindigkeit des Pfeils vom Spannen seines Bogens abhängt. Er weiß, dass er Arbeit  $W$  (in Nm) verrichten muss:  $W = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx$ . Die

Formel für die Abschussgeschwindigkeit  $v$  (in  $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ) lautet:  $v = \sqrt{\frac{2W}{m}}$ . Die Masse  $m$

seines Pfeils ist 0,05 kg. Berechnen Sie die Abschussgeschwindigkeiten der Pfeile für  $x_1 = 0,1$  m;  $x_2 = 0,3$  m;  $x_3 = 0,5$  m.

Bestimmen Sie eine Formel für  $v(x)$ , wenn  $D = 2000$  und  $m = 0,05$  (kg) ist.

Wie weit muss der Bogen gespannt werden, damit der Pfeil eine Geschwindigkeit von  $v = 60$  ( $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ) erreicht?

## 2.9 Die e-Funktion – weiterer Ausbau der Differenzial- und Integralrechnung

### Vorwissen

*Aus dem Mathematikunterricht:*

*Sekundarstufe I:*

- Potenzen und Potenzgesetze
- Eigenschaften der Exponentialfunktionen
- Logarithmusbegriff, ausgewählte Logarithmengesetze
- Logarithmusfunktionen als Umkehrfunktionen der Exponentialfunktionen
- Wachstums- und Zerfallsprozesse
- Wachstumsfaktor, Wachstumsrate
- exponentiale Abnahme, Zerfallsrate

*Sekundarstufe II:*

- Bisheriges Wissen (Folgen und Reihen, Differential- und Integralrechnung)

### Ziele

#### Sicheres Wissen und Können

Die Schülerinnen und Schüler wissen, dass

- die Funktion  $f(x) = e^x$  als e-Funktion bezeichnet wird,
- $e$  eine irrationale Zahl mit  $2 < e < 3$  ist,
- für die e-Funktion gilt:  $f'(x) = f(x)$ ,
- die Stammfunktion der e-Funktion  $F(x) = e^x + c$  ist,
- $f(x) = \ln(x)$  die Umkehrfunktion der e-Funktion ist.

Die Schülerinnen und Schüler können

- einfache Exponential- und Logarithmgleichungen zur Basis  $e$  lösen,
- die Funktion  $f(x) = e^x$  sowie einfache Verkettungen und einfache Produkte mit der e-Funktion ableiten sowie einfache Grenzwertberechnungen mit der e-Funktion durchführen

#### Reaktivierbares Wissen und Können:

Die Schülerinnen und Schüler können

- mit Funktionen, in denen die e-Funktion vorkommt, Kurvenuntersuchung vornehmen und Extremwertaufgaben lösen entsprechend den zum Thema „Kurvenuntersuchungen“ und „Anwendung der Differenzialrechnung“ dargestellten Anforderungen, insbesondere Diskussion von Funktionen der Form  $f_\lambda(x) = e^{\lambda x}$ ,
- $\int e^{a \cdot x + b} dx$  händisch (ohne CAS) berechnen,

- Aufgaben zu gebrochen rationalen Funktionen lösen, bei denen eine Anwendung vom  $\int \frac{1}{x} dx$  möglich ist,
- Flächen- und Volumenberechnung mit Funktionen vornehmen, in denen die e-Funktion vorkommt entsprechend den Anforderungen zum Thema „Integralrechnung“,
- Anwendungsaufgaben zu Wachstums- und Zerfallsprozessen lösen.

**Exemplarisches**

Die Schüler haben an einprägsamen Beispielen erste Vorstellungen und Einsichten zu folgenden Sachverhalten gewonnen:

- Es gibt Verfahren zur Bestimmung der Zahl  $e$  sowie der Stammfunktion zu  $f(x) = \frac{1}{x}$ .
- Die Logarithmusfunktion  $f(x) = \ln(x)$  wird als Umkehrung der Funktion  $f(x) = e^x$  gewonnen. Der allgemeingültige Zusammenhang zwischen der Ableitung der Umkehrfunktion und der Ableitung der Funktion wird am Beispiel von Logarithmus- und e-Funktion erlebt.
- Auf reale Wachstumsprozesse kann man verschiedene Wachstumsmodelle anwenden.
- Die Berechnung uneigentlicher Integrale ist durch Grenzwertbetrachtungen möglich.
- Einfache partielle Integration kann man händisch unter Nutzung der Regel vornehmen.

## Aufgaben

### Sicheres Wissen und Können

1. Vereinfachen Sie.

a)  $e^{\ln 3}$     b)  $\ln e^{0,3}$     c)  $e^{-2 \ln a}$     d)  $\ln \sqrt[3]{e^5}$     e)  $e^{4 \ln a} f) e^{-0,5 \ln x}$

2. Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichungen.

a)  $(x+1)e^x = 0$     b)  $e^{2x} - 4e^x = 0$     c)  $\ln(x-1) = 0$     d)  $2 \ln x^2 = 4$

3. Bilden Sie die erste Ableitung folgender Funktionen.

a)  $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x+1}$     b)  $f(x) = x^3e^{-x}$

c)  $f(x) = e^{3x}(e^x + x)$     d)  $f(x) = 2e^{3x+1}$

e)  $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

4. Geben Sie die Grenzwerte an.

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x$     b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (5 - e^x)$     c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2e^{-x}$

d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (5 + e^x)$     e)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3e^x$     f)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (4 - e^{x-2})$

### Reaktivierbares Wissen und Können

5. Gegeben ist die Exponentialfunktion  $f(x) = e^{-x}$ . Die Punkte  $P(x_a / f(x_a))$  mit  $x_a > 0$  und der Ursprung sind die gegenüberliegenden Eckpunkte eines Rechtecks, von dem 2 Seiten auf den Koordinatenachsen liegen.

- Bestimmen Sie  $x_a$  so, dass der Flächeninhalt des Rechtecks maximal wird.
- Wie groß ist im Falle a) der Inhalt zwischen der oberen Rechteckseite, dem Graphen von  $f$  und der  $y$ -Achse?
- Die Tangente  $t$  in einem Kurvenpunkt  $Q$  im 1. Quadranten und die Koordinatenachsen begrenzen ein Dreieck. Bestimmen Sie die Lage von  $Q$  so, dass der Flächeninhalt des Dreiecks ein Extremum annimmt.

6. (L) Fichten sind in Europa weit verbreitet. Je nach Standort können sie zwischen 30 m und 50 m hoch werden und erreichen einen Durchmesser von bis zu 120 cm. Der Brusthöhdurchmesser  $d$  wird in einer Höhe von 1,3 m gemessen. Unter der Annahme, dass die Fichte nur einen Durchmesser von 1 m erreicht, lässt er sich näherungsweise als Funktion der Zeit in folgender Form darstellen

$$d(t) = \frac{1,2}{1 + e^{-0,05(t-63)}} \quad t \geq 0 \quad t \text{ in Jahren (a); } d \text{ in m.}$$

- Berechnen Sie den Durchmesser der Fichte bei der Pflanzung.
- Stellen Sie die Funktion mit Ihrem CAS dar und fertigen Sie eine Skizze an.
- Wie groß ist der Durchmesser nach 30, 50 bzw. 100 Jahren?
- Berechnen Sie Wendepunkt und bestimmen Sie das Verhalten im Unendlichen von  $d(t)$ .
- Interpretieren Sie den Verlauf des Graphen von  $d(t)$ !

7. Zeigen Sie: Das Integral  $\int_u^v \frac{1}{x} dx$  ändert seinen Wert nicht, wenn u durch t·u und v durch t·v ersetzt wird, wobei t eine positive reelle Zahl ist. Deuten Sie das Ergebnis geometrisch.
8. Ermitteln Sie die unbestimmten bzw. bestimmten Integrale ohne ein CAS unter Verwendung der folgenden Integrationsregel:  $\int f(mx+n)dx = \frac{1}{m} F(mx+n) + C$  mit  $F'(x) = f(x)$ . Stellen Sie Ihre Lösung ausführlich dar.

a)  $\int e^{2x-1} dx$       b)  $\int e^{3-2x} dx$       c)  $\int e^{0,5x+4} dx$       d)  $\int e^{-x} dx$

e)  $\int 2(e^{2x-1} + e^{-x}) dx$       f)  $\int (3e^{2x}-1)e^{-x} dx$       g)  $\int_{-4}^1 e^{2x} dx$       h)  $\int_0^2 e^{1-2x} dx$

9. Bestimmen Sie die Funktion f(x) in folgenden Gleichungen mithilfe der Integrationsregel aus Aufgabe 10.

a)  $\int f(x)dx = 2e^{3x-23} + e^{-x+1} - e^{1-2x} + c$       b)  $\int f(x)dx = (x+1)e^{2x+1} + c$

10. Berechnen Sie folgende unbestimmten Integrale.

a)  $\int \frac{4x-1}{x} dx$       b)  $\int \frac{3x+4}{2x} dx$       c)  $\int (4x^3-3x^2+5x) : (2x^2) dx$

11. Der Graph der Funktion f mit der Gleichung  $f(x) = (20-10x) : x^2$ , die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung  $x = 1$  begrenzen ein Flächenstück vollständig. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

12. Gegeben sind die Funktionen f und p mit den Gleichungen  $f(x) = (x^3 + 3x^2 - 4) : x$  und  $p(x) = x^2 - x + 6$ . Die Graphen der Funktionen f und p und die Koordinatenachsen begrenzen im ersten Quadranten eine Fläche vollständig. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

13. Berechnen Sie folgende bestimmten Integrale.

a)  $\int_1^2 \frac{x+6}{2x} dx =$       b)  $\int_1^e (x + \frac{2}{x}) dx =$       c)  $\int_1^e \frac{e}{x} dx =$

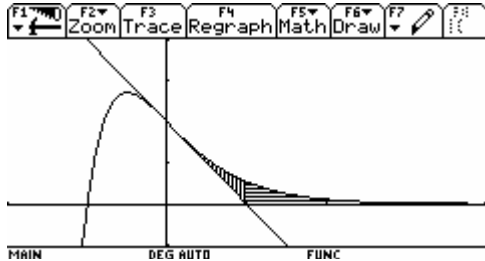
14. Gegeben ist die Funktion f durch die Gleichung  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Zwischen dem Graphen der

Funktion f und der x-Achse werden durch die Geraden mit den Gleichungen  $x = 1, x = 2, x = 3, x = 4$  usw. Flächenstreifen der Breite 1 gebildet. Die Inhalte dieser Flächenstreifen bilden eine Folge  $(a_n)$ . Berechnen Sie  $a_1, a_2$  und  $a_3$ . Geben Sie eine Berechnungsvorschrift für  $a_n$  und  $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  an.

15. Gegeben wird die Funktion f mit  $f(x) = 2e^{0,25x-1}$ . Der Graph von f, die Koordinatenachsen und die Gerade mit der Gleichung  $x = 4$  begrenzen ein Flächenstück vollständig. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieser Fläche. Das eben betrachtete Flächenstück wird durch die Tangente an den Graph von f im Punkt  $B(4 | f(4))$  in zwei Teilflächen zerlegt. Berechnen Sie die Inhalte der beiden Teilflächen.

16. Gegeben sei die Funktion  $f(x) = 2 \frac{x+1}{e^{2x}}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- a) Im 1. Quadranten begrenzen die Wendetangente, die x-Achse, die Gerade  $x = 3$  und der Graph von  $f(x)$  eine Fläche. Berechnen Sie den Flächeninhalt.



- b) Die Fläche, die vom Graphen von  $f(x)$  und den Koordinatenachsen vollständig eingeschlossen wird, rotiert um die x-Achse. Bestimmen Sie das Volumen des Rotationskörpers.

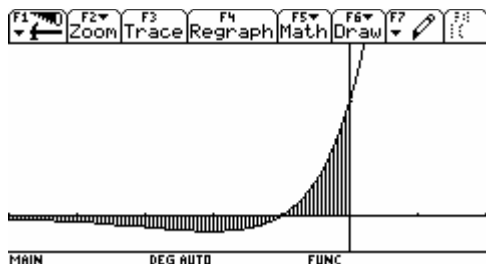
17. Gegeben ist die Funktion  $f(x) = 5 \cdot x \cdot e^{-0,5x}$ . Das zwischen  $x = 0$  und  $x = z$  liegende Flächenstück rotiert um die x-Achse und erzeugt einen Drehkörper. Berechnen Sie sein Volumen.

18. (L) Gegeben ist die Funktion  $f(x) = e^{\frac{-1}{4}x+2}$ . Ihr Graph sei K.

- Bestimmen Sie die Tangente  $t$  an K im Schnittpunkt von K mit der y-Achse
- Zeichnen Sie K und die Tangente für  $-1 \leq x \leq 10$  mit Ihrem CAS und fertigen Sie eine Skizze an.
- Die Kurve schließt mit den Koordinatenachsen und der Geraden  $x = u$  ( $u > 0$ ) eine Fläche  $A(u)$  ein. Berechnen Sie  $\lim_{u \rightarrow \infty} A(u)$ .
- Zeigen Sie, dass die Tangente  $t$  diese Fläche in zwei inhaltsgleiche Teile zerlegt.
- $P(u | v)$  sei ein Punkt der Kurve K. Die Kurventangente in P bildet mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Bestimmen Sie die Koordinaten von P so, dass dieses Dreieck gleichschenkelig ist.

### Exemplarisches

19. Der Graph der Funktion  $f(x) = e^{-x}(x+1)$  und die Koordinatenachsen schließen eine Fläche vollständig ein. In welchem Verhältnis steht dieser Flächeninhalt zur (bis ins Unendliche reichenden) Fläche, die zwischen der x-Achse und dem Graphen gebildet wird in dem Intervall, in dem der Graph unterhalb der x-Achse verläuft?



20. Weisen Sie nach, dass die Fläche, die zwischen dem Graphen der Funktion  $f$  mit der Gleichung  $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$  und der positiven  $x$ -Achse liegt, einen endlichen Wert als Flächeninhalt hat und ermitteln Sie diesen Wert.

21. Der Verlauf von Wachstumsvorgängen in der Natur und der Gesellschaft lässt sich oft durch Exponentialfunktionen modellieren. Dabei werden verschiedene Wachstumsmodelle unterschieden, denen jeweils ein bestimmtes momentanes Wachstumsverhalten zugrunde liegt. In vielen Fällen ist das Wachstum durch begrenzte Ressourcen (Futtermitteln, Lebensräume, Bevölkerungszahlen, Rohstoffe) beschränkt. Die obere Grenze der Wachstumsfunktion wird als Kapazität ( $K$ ) oder Sättigung ( $S$ ) bezeichnet.

Wachstumsmodell	Gleichung für die momentane Änderung der Wachstumsfunktion $f(t)$ , $t \geq 0$	Lösung der Wachstumsgleichung
I. Exponentielles Wachstum	$f'(t) = c \cdot f(t)$	$f(t) = f(0) \cdot a^t$
II. Beschränktes Wachstum	$f'(t) = c \cdot (K - f(t))$	$f(t) = K - (K - f(0)) \cdot a^t$
III. Logistisches Wachstum	$f'(t) = c \cdot f(t) \cdot (K - f(t))$	$f(t) = \frac{K \cdot f(0)}{f(0) + (K - f(0)) \cdot a^t}$

- Beschreiben Sie das momentane Wachstumsverhalten bei den drei Modellen.
- Zeigen Sie, dass die angegebenen Funktionen die Gleichungen für die momentane Änderung der Funktionen erfüllen.
- Geben Sie bei allen Modellen eine Gleichung für  $c$  an.
- Geben Sie die Wachstumsgleichungen unter Verwendung der  $e$ -Funktion an.

22. (L) Finnland hat weltweit den größten Anteil von Mobilfunkteilnehmern in der Bevölkerung. Bei einer Bevölkerungszahl von etwa 5,2 Mill. hat sich die Anzahl der Mobiltelefone seit 1990 in erstaunlichem Tempo vergrößert, wie die nebenstehende Tabelle zeigt.

**Anzahl der Mobiltelefone in Finnland**

Jahr	Anzahl in 1000
1990	258
1991	319
1992	386
1993	489
1994	676
1995	1039
1996	1502
1997	2163
1998	2947
1999	3364
2000	3761

- Stellen Sie Daten in einem Diagramm dar und beschreiben Sie den Wachstumsprozess.
- Berechnen und interpretieren Sie die jährlichen Wachstumsraten.
- Modellieren Sie das Wachstum in den ersten Jahren durch eine Exponentialfunktion.  
Hinweis: Verwenden Sie verschiedene Zeitintervalle zur Bestimmung des Wachstumsfaktors  $a$ .
- Modellieren Sie das Wachstumsverhalten ab dem Jahre 1998 durch das Modell des beschränkten Wachstums. Verwenden Sie als Kapazität  $K$  die Zahl von 4 700 000 Mobiltelefonen.
- Geben Sie eine logistische Wachstumsfunktion für den gesamten Wachstumsvorgang an.  
Hinweis: Verwenden Sie zur Bestimmung des Parameters  $a$  die Zahl der Mobiltelefone in den Jahren 1990 und 1998.
- Berechnen Sie bei allen drei Modellen die zu erwartende Anzahl im Jahre 2006 und vergleichen Sie diese Werte mit der tatsächlichen Zahl von 4 700 000.
- Stellen Sie Daten und die Wachstumsfunktionen in einem Diagramm dar und diskutieren Sie die Güte der jeweiligen Modelle.

Die nächsten beiden Aufgaben sind im Zusammenhang zu betrachten. Bei der Untersuchung der ersten Aufgabe gibt der Voyage 200 in der Ableitung  $\sinh$  an. Entweder man stellt im Modus auf APPROX oder man macht die Schüler durch Aufgabe 3 vorher mit der Funktion Sinus Hyperbolicus bekannt. In beiden Aufgaben kann auch ohne CAS gearbeitet werden.

23. Gegeben ist die Funktionenschar  $f_a(x) = \frac{a}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$   $x \in \mathbb{R}$  und  $a > 0$ .

Ihre Graphen bezeichnet man als **Kettenlinien**. Diese Bezeichnung stammt aus der Physik. Es lässt sich physikalisch nachweisen, dass ein an zwei Punkten A und B aufgehängter, sehr dünner, vollkommen biegsamer, nicht dehnbarer, homogener Faden unter dem Einfluss der Schwerkraft die Form derjenigen Kettenlinie annimmt, deren Bogenlänge zwischen den beiden Aufhängepunkten A und B mit der Fadenlänge übereinstimmt.

- Untersuchen Sie Symmetrie-, Monotonie- und Krümmungsverhalten der Graphen von  $f_a$ .
- Bestimmen Sie eventuell vorhandene Extrema und Wendepunkte in Abhängigkeit von  $a$ .
- Zeichnen Sie die Graphen von  $f_{0,5}$ ,  $f_1$  und  $f_{1,5}$  im Intervall  $[-3;3]$ .

24. Gegeben sind die beiden Funktionen

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad x \in \mathbb{R}$$

- Weisen Sie nach, dass  $f(-x) = -f(x)$  und  $g(-x) = g(x)$  gilt.
- Bilden Sie von den beiden Funktionen die 1. und 2. Ableitung und stellen Sie möglichst viele Beziehungen zwischen  $f$ ,  $f'$ ,  $f''$ ,  $g$ ,  $g'$  und  $g''$  her.
- Zeigen Sie, dass für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt:  $[g(x)]^2 = 1 + [f(x)]^2$ .
- Für die Sinus- und die Kosinusfunktion gelten unter anderem folgende Beziehungen:

$$(1) \quad \sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$(2) \quad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$(3) \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$(4) \quad \left(\cos \frac{x}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} (\cos x + 1)$$

Überprüfen Sie, ob diese Beziehungen auch gelten, wenn man  $\sin x$  durch  $f(x)$  und  $\cos x$  durch  $g(x)$  ersetzt.

- Wegen gewisser Ähnlichkeiten mit der Sinus bzw. Kosinusfunktion nennt man die Funktion  $f$  Sinus Hyperbolicus und die Funktion  $g$  Kosinus Hyperbolicus und bezeichnet ihren Funktionswert mit  $\sinh x$  und  $\cosh x$ .

25. Ermitteln Sie die unbestimmten bzw. bestimmten Integrale ohne ein CAS unter Verwendung der folgenden Integrationsregel:  $\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) v(x) dx$ .

Stellen Sie Ihre Lösung ausführlich dar.

$$a) \int 2xe^{2x} dx$$

$$b) \int xe^{2-x} dx$$

$$c) \int 2xe^{0,5x} dx$$

$$d) \int (2x-3)e^x dx$$

$$e) \int_1^2 xe^x dx$$

$$f) \int_0^2 xe^{2x-1} dx$$

$$g) \int_2^4 (2x-3)e^x dx$$