

Lösungshinweise zu den Aufgaben zum Stoffgebiet Stochastik in der Klasse 12

S. 143 Nr.1

a)	Grundgesamtheit	Stichprobe
A:	alle Bananen auf dem Frachtschiff	einzelne ausgewählte Bananen
B:	alle Dosen einer bestimmten Sorte einer Tagesproduktion	einige gefüllten Dosen der jeweiligen Sorte
C:	alle Fahrzeuge der neuen Serie	ein Fahrzeug der Serie
D:	das gesamte mathematische Wissen und Können des Schülers	mehrere Fragen zu ausgewählten Themen
E:	alle gezielten Schüsse aller Spieler auf die Torwand	mehrere Schüsse eines jeden Spielers auf die Torwand.

b)	Größe der Stichprobe	Kriterien für Auswahl
A:	Beschränkung durch Prüfkapazität der Kontrolleinrichtung	Beachtung der Lage der Kisten auf dem Schiff und möglicher verschiedener Lieferfirmen
B:	Beschränkung durch Prüfkapazität der Kontrolleinrichtung	Zufällige Auswahl über den Tag verteilt
C:	in der Regel nur ein Auto	ein normales Auto aus der laufenden Produktion
D:	Beschränkung durch Prüfungszeit	Fragen aus möglichst vielen Gebieten
E:	Beschränkung durch Trainingszeit und Ermüdung der Spieler	Nicht zu lange Schussserien und Pausen vorsehen

c)	Schlussweise	Mögliche Fehler
A:	Aus der Qualität der geprüften Bananen wird auf die Qualität der ganzen Ladung geschlossen	Die Qualität wird besser oder schlechter beurteilt als sie in Wirklichkeit ist.
B:	Aus den Messwerten der Stichprobe wird auf die Inhalte der Dosen der ganzen Tagesproduktion geschlossen.	Die Einhaltung der Norm wird bestätigt, obwohl dies nicht zutrifft. Es wird eine Abweichung von der Norm festgestellt, obwohl diese in Wirklichkeit eingehalten wird.
C:	Aus den Testergebnissen für ein Fahrzeug wird auf alle Fahrzeuge der Serien geschlossen.	Die Fahrzeuge der Serie sind nicht so sicher bzw. sie sind sicherer als es das Testergebnis aussagt.
D:	Aus den Antworten auf die Fragen wird auf das gesamte mathematische Wissen und Können des Schülers geschlossen.	Der Schüler erhält eine zu gute oder eine zu schlechte Bewertung als er sie in Wirklichkeit verdient hat.
E:	Aus den Schussleistungen im Test wird auf das tatsächlich vorhandene Können geschlossen.	Die Trefferwahrscheinlichkeit eines Spielers wird höher oder geringer eingeschätzt als sie in Wirklichkeit ist.

S. 143 Nr.2

z. B. Testen der Sicherheit eines Autos durch einen Crashtest

S. 143 Nr. 3

	Merkmal	Ausprägungen	Stichprobe von n Vorgängen	konstante Bedingungen
a)	Qualität bei der Ernte	Klasse 1; nicht Klasse 1	100 Äpfel von verschiedenen Bäumen	– gleiche Sorte – gleiche Bodenverhältnisse
b)	Masse der Brötchen	normgerecht; nicht normgerecht	50 Brötchen an verschiedenen Tagen	– gleiche Zutaten – gleiche Backzeiten
c)	Volumen des Inhalts	normgerecht; nicht normgerecht	100 Flaschen einer Tagesproduktion	– gleiche Füllmaschine – gleiches Getränk
d)	Wirkung des Antibiotikums	wirkt; wirkt nicht	50 erkrankte Schüler	– gleiche Altersgruppe – gleiche Konstitution
e)	Prüfungserfolg	schafft Prüfung; fällt durch	10 Fahrschüler	– gleiche Voraussetzungen – gleiche Lernfähigkeiten

S. 143 Nr. 4

- a) A: Die Menschen müssen an der Krankheit leiden und bereit sein, sich testen zu lassen.
B: Die Schüler müssen in der entsprechenden Klasse sein und die unterrichtenden Lehrer müssen bereit sein, die Erprobung der neuen Methode durchzuführen.
C: Die Patienten müssen sich einen Zahn ziehen lassen wollen und zu einer Hypnose bzw. einer örtlichen Betäubung bereit sein.
- b) A: das verabreichte Medikament
B: die verwendete Methode zur Behandlung der Bruchrechnung
C: die verwendete Methode zur Vermeidung von Schmerzen beim Ziehen eines Zahnes
- c) A: das Geschlecht, die Altersgruppe, die bisherigen Behandlungen, die Konstitution
B: der bisherige Unterricht, das Können der Lehrer, die Fähigkeiten der Schüler
C: die Art und Lage des Zahnes, der nötige Umfang der Behandlung

S. 144 Nr. 5

Bei einem Test mit 100 der betreffenden Glühlampen sind 10 Glühlampen der Erwartungswert für die Anzahl der Lampen, die weniger als 1500 Stunden brennen. Wenn jedoch 16 oder noch mehr Glühlampen bei diesem Test weniger als 1500 Stunden brennen, liegt eine signifikante Abweichung vom Erwartungswert von 10 Glühlampen auf einem Signifikanzniveau von 5 % vor.

S. 144 Nr. 6

- a) Der Abnehmer kann erwarten, dass höchstens ein Artikel Ausschuss ist.
b) C

S. 144 Nr. 7

Wenn Nadine wie bisher nur maximal die Hälfte der Vokabeln behalten hat, so beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass sie von 20 Vokabeln noch 12 oder sogar mehr richtig wiedergeben kann, etwa 25,2 %. Dies ist keine signifikante Abweichung vom Erwartungswert von 10 richtig wiedergegebenen Vokabeln. Nach diesem Test kann man deshalb nicht behaupten, dass die neue Lernmethode besser ist. Wenn Nadine 15 oder mehr Vokabeln richtig wiedergegeben hätte, so könnte man die neue Lernmethode als signifikant besser bezeichnen, da die Wahrscheinlichkeit, noch 15 oder mehr Vokabeln zu wissen unter der Annahme von $p = 0,5$ nur etwa zwei Prozent beträgt.

S. 144 Nr. 8

Die Wahrscheinlichkeit, dass nur 10 oder weniger Tiere geheilt werden, beträgt unter der Annahme einer Heilungsquote von mindestens 70 % nur 4,8 %. Deshalb kann man auf dem Signifikanzniveau von 5 % von einer signifikanten Abweichung vom Erwartungswert von 14 Tieren sprechen und damit einen Widerspruch gegen die Behauptung der Firma ableiten.

S. 144 Nr. 9

- a) Der Gripeschutzimpfstoff sollte auf dem Signifikanzniveau von höchstens 1 % getestet werden, da man für einen Impfstoff mit einer größeren Sicherheit als bei einem Vitaminpräparat wissen möchte, ob es wirksamer als bisherige Produkte ist.
- b) Die Zuverlässigkeit der Genauigkeit eines Navigationsgerätes ist höher einzuschätzen als die versprochene Einsparung bei einer Energiesparlampe, deshalb sollten in der Erprobung des Navigationsgerätes ein Signifikanzniveau von 1 % verwendet werden.
- c) Die Wirksamkeit einer Unterrichtsmethode kann aufgrund der vielfältigen Faktoren, die auf den Unterrichtserfolg Einfluss haben, nur mit einem Signifikanzniveau von mindestens 5 % getestet werden.

S. 145 Nr. 10

- a) Die Tagesproduktion kann mit der angegebenen Fehlerquote ausgeliefert werden.
b) Die Tagesproduktion kann nicht mit der angegebenen Fehlerquote d. h. eventuell im Wert gemindert ausgeliefert werden. Im Produktionsprozess sind Veränderungen erforderlich.

S. 145 Nr. 11

Wenn der Sportlehrer nur bei maximal 40 Schülern eine richtige Voraussage treffen kann, so ist seine Behauptung abzulehnen. Ansonsten kann sie nicht abgelehnt werden.

S. 145 Nr. 12

Die Entscheidung der Handelsfirma ist falsch, die tatsächliche Fehlerquote ist höchstens 1 %.

- c) Herstellerfirma: Die Firma wird zu Unrecht einer schlechten Qualität verdächtigt. Sie kann ihre Ware nicht verkaufen, obwohl sie in Ordnung ist. Handelsfirma: Sie muss einen neuen Lieferanten finden und erneut den Test durchführen. Es geht ihr ein guter Partner verloren.

S. 145 Nr. 13

- a) C; E; F
- b) C; E; F

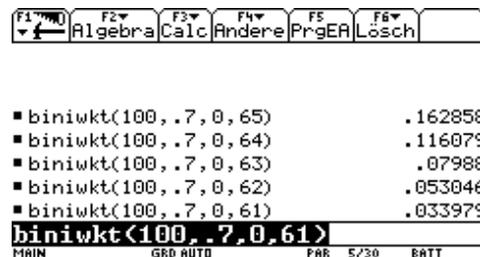
S. 146 Nr. 14

- a) A: Der Pilzsammler hält den Pilz für essbar und wird ihn für ein Pilzgericht verwenden.
B: Die Firma nimmt die Investitionen vor und erhöht den Preis der neuen Ware.
C: Das Forschungsergebnis wird publiziert, der neue Impfstoff wird in den Markt eingeführt.
- b) A: Der Pilzsammler wird den Pilz nicht essen.
B: Die Firma nimmt keine Investitionen vor, um ein neues Produkt mitverbesserter Qualität herzustellen.
C: Der Impfstoff wird in dieser Form nicht in den Markt eingeführt, die Forschungsarbeiten werden nicht veröffentlicht und müssen fortgesetzt werden.
- c) A: Der Pilzsammler isst einen giftigen Pilz.
B: Die Firma nimmt erhebliche Investitionen vor, entwickelt ein neues Produkt mit erhöhtem Preis und das Produkt findet nur geringen Absatz.
C: Der neue Impfstoff wird hergestellt und die Produktion des bisher verwendeten Impfstoffes wird eingestellt, obwohl der neue Impfstoff nicht besser ist.
- d) A: Der Pilzsammler erleidet eine Pilzvergiftung.
B: Die Firma hat erhebliche finanzielle Verluste.
C: Das Forscherteam publiziert ein falsches Forschungsergebnis. Die bisherige Theorie zur Bekämpfung der Tierseuche wird als falsch bezeichnet, obwohl sie richtig ist. Es müssen unnötige Investitionen zur Herstellung und zum Vertrieb eines neuen Produktes vorgenommen werden.
- e) A: Der Pilzsammler isst den Pilz nicht, obwohl er nicht giftig ist.
B: Die Firma nimmt keine Investitionen zur Herstellung eines neuen Produktes mit einem höheren Preis vor, obwohl die Verbraucher einen höheren Preis akzeptieren würden.
C: Ein eigentlich richtiges Forschungsergebnis wird nicht publiziert und ein neuer Impfstoff mit einer höheren Wirksamkeit wird nicht in die Praxis eingeführt. Die erheblichen Projektmittel sind umsonst ausgegeben worden.
- f) A: Dem Pilzsammler geht ein Pilz für seine Mahlzeit verloren.
B: Die Firma nutzt eine Möglichkeit zur Erhöhung ihres Gewinns nicht und muss weitere Überlegungen für ihre Produkte anstellen.
C: Die Forschungsarbeiten müssen weitergeführt werden, dazu werden weitere Projektmittel benötigt.

Hinweis zu Nr. 14: Die Aufgabenteile a-f sollten für die einzelnen Testsituationen nacheinander besprochen werden, damit sich der Schüler in eine Situation hineinversetzen kann. Aus der Aufgabe können auch 3 Aufgaben gemacht werden.

S. 146 Nr. 15 Lösungshinweise:

Die numerischen Lösungen bei dieser und den folgenden Aufgaben können mit dem Voyage 200 mithilfe des Befehls `biniwkt(n,p,von,bis)` gefunden werden, wobei oft mit verschiedenen Anzahlen probiert werden muss. So könnte bei dieser Aufgabe mit dem Intervall von 0 bis 65 Tieren angefangen und die obere Intervallgrenze schrittweise verringert werden. Dadurch erhielte man die abgebildeten Bildschirmanzeigen und als Lösungsintervall 0 bis 61 Tiere.



S. 146 Nr. 16

- a) 8,5 %
- b) mindestens 21 Schüler

S. 146 Nr. 17

Bei einem Test werden 100 der betreffenden Glühlampen zufällig ausgewählt und ihre Brenndauer geprüft. Wenn 7 oder noch mehr Glühlampen bei diesem Test weniger als 1500 Stunden brennen, liegt eine signifikante Abweichung vom Erwartungswert von 3 Glühlampen auf einem Signifikanzniveau von 5 % vor. Dann sollte die Firma ihre Produktion überprüfen und verbessern, da sie ihre Vorgaben nicht mehr garantieren kann.

S. 147 Nr. 18

- a) Karl werden 20 Vokabeln zum Übersetzen vorgelegt. Als Nullhypothese wird angenommen, dass Karl mindestens 80 % der Vokabeln richtig aufschreibt. Wenn er nur 13 Vokabeln oder noch weniger richtig hat, wird seine Behauptung auf einem Signifikanzniveau von 5 % abgelehnt.
- b) 1. Fehlentscheidung (Ergebnis im Ablehnungsbereich): Karl wird zu Unrecht des schlechten Lernens verdächtigt.
Konsequenz für Karl: Er bekommt schlechte Noten, obwohl seine Leistungen in Ordnung sind.
Konsequenz für Lehrerin: Sie schätzt einen Schüler schlechter ein als er ist.
2. Fehlentscheidung (Ergebnis im Annahmebereich): Karl ist schlecht, fällt aber bei dem Test nicht durch.
Konsequenz für Karl: Er bekommt bessere Noten, obwohl seine Leistungen nicht in Ordnung sind.
Konsequenz für Lehrerin: Sie muss ihre Meinung über Karl revidieren, obwohl sie nicht falsch war.

S. 147 Nr. 19

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Verkäufer 130 oder mehr Kunden zum Abschluss überreden kann beträgt 8,4 %. Auf einem Signifikanzniveau von 10 % könnte die Behauptung, dass es sich nur um eine zufällige Abweichung handelt, abgelehnt und das gute Ergebnis auf das besondere Geschick des Verkäufers zurückgeführt werden. Wenn man diese Aussage auf einem Signifikanzniveau von 5 % treffen möchte, müssten noch mindestens 2 Abschlüsse dazu kommen.

S. 147 Nr. 20 Lösungshinweise:

Die Wahrscheinlichkeitsangaben wurden auf 4 wesentliche Ziffern (alle Ziffern außer den Nullen, die links stehen) gerundet.

- b) $0,2 \cdot 0,8 = 0,16$
 c) $450 \cdot 0,16 \cdot 10 \cdot 0,15 \text{ €} = 108 \text{ €}$
 d) $n = 100, p = 0,20$ (1) 0,09090 (2) 0,9977 (3) 0,5595 (4) 0,4617
 e) $1 - 0,8^n > 0,95, n > 13,4$, bei mindestens 14 Teilnehmern
 f) 58 Portionen des Fischgerichtes und 208 Portionen des Fleischgerichtes
 g) insgesamt 29 (15 + 14) Portionen

S. 147 Nr. 21 Lösungshinweise:

Durch diese Aufgabe sollen die Schüler durch konkrete Rechnungen ein Gespür dafür bekommen, welche Bedeutung es hat, dass Kurven mit wachsendem n relativ zu n immer schmaler werden.

- a) $p = 0,95; n = 10; E = 9,5; k < 9$, also $k \leq 8; \alpha = 0,08614$
 $p = 0,95; n = 100; E = 95; k < 90$, also $k \leq 89; \alpha = 0,01147$
 $p = 0,95; n = 1000; E = 950; k < 900$, also $k \leq 899; \alpha = 3,908 \cdot 10^{-11}$
- b) $\alpha \leq 0,05; n = 10; k \leq 7$ also weniger als 80 % der Geräte
 $\alpha \leq 0,05; n = 100; k \leq 90$, also weniger als 91 % der Geräte
 $\alpha \leq 0,05; n = 1000; k \leq 937$, also weniger als 93,7 % der Geräte

Diskussion:

- a) Obwohl stets die gleiche Bedingung, weniger als 90 % zu prüfen, eingehalten wird, wird der Fehler 1. Art bei wachsendem n immer kleiner. Das liegt an der Eigenschaft der Binomialverteilung, dass die Kurven mit wachsendem n immer schmaler werden. Immer mehr Ergebnisse liegen bei größerem n in näherer Umgebung des Erwartungswertes $E = n \cdot p$.
- b) Wenn die Bedingung des gleichen Signifikanzniveaus eingehalten wird, wird die Abweichung vom Erwartungswert bei wachsendem n prozentual immer kleiner.

S. 148 Nr. 22

Nullhypothese: Die neue Therapiemethode ist nicht besser als die bisherige. $p_0 = 0,5$

Alternativhypothese: Die neue Therapiemethode ist besser als die bisherige. $p_1 > 0,5$

- a) $n = 30; P(X \geq 22 | p = 0,5) = 0,008062$ und $P(X \geq 21 | p = 0,5) = 0,02139$
 Entscheidungsregel: Wenn von den 30 Patienten 22 oder mehr mit der neuen Methode geheilt werden, kann die Nullhypothese auf einem Signifikanzniveau von 1 % abgelehnt werden.
- b) Fehler 1. Art: Die richtige Nullhypothese wird fälschlicherweise abgelehnt.
 Das Forscherteam publiziert ein falsches Forschungsergebnis. Die bisherige Therapie zur Heilung der Krankheit wird als überholt bezeichnet, obwohl sie nicht schlechter ist. Es müssen unnötige Anstrengungen zur Einführung der neuen Therapiemethode in die Praxis unternommen werden.
- Fehler 2. Art: Die richtige Alternativhypothese wird fälschlicherweise abgelehnt.
 Ein eigentlich richtiges Forschungsergebnis wird nicht publiziert und eine Therapie mit einer

höheren Wirksamkeit wird nicht in die Praxis eingeführt. Die Forschungsmittel sind umsonst ausgegeben worden. Die Forschungsarbeiten müssen weitergeführt werden, dazu werden weitere Mittel benötigt.

- f) Bei Kacheln für Kamine wird es im Allgemeinen akzeptiert, wenn bis zu 10 % der Kacheln kleinere farbliche Abweichungen aufweisen.
Ein Ofensetzer will dies bei einer Lieferung von Kacheln überprüfen und öffnet dazu einen zufällig ausgewählten Karton mit 25 Kacheln. Wenn unter diesen 25 Kacheln bei vier oder mehr Kacheln farbliche Abweichungen auftreten, will er die Lieferung ablehnen.

S. 148 Nr. 23

- a) H_1 : Es haben mehr als 10 % kleine Fehler, $A = \{4; 5; 6; \dots 25\}$, Entscheidungen: Wenn unter diesen 25 Kacheln bei vier oder mehr Kacheln farbliche Abweichungen auftreten, wird die Lieferung abgelehnt. Wenn unter diesen 25 Kacheln bei weniger als vier Kacheln farbliche Abweichungen auftreten, wird die Lieferung nicht abgelehnt.
- b) Fehler 1. Art: $\alpha = 0,2364$: Der tatsächliche Anteil fehlerhafter Kacheln beträgt höchstens 10 %, aber das Ergebnis des Testes liegt zufällig im Ablehnungsbereich. Herstellerfirma: Die Firma wird zu Unrecht einer schlechten Qualität verdächtigt. Sie kann ihre Ware nicht verkaufen, obwohl sie in Ordnung ist. Ofensetzer: Er lehnt die Kacheln fälschlicherweise ab, muss einen neuen Lieferanten finden und erneut den Test durchführen. Es geht ihm einen guten Partner verloren.
- c) Fehler 2. Art: Das Ergebnis des Testes liegt im Annahmehbereich, aber die Nullhypothese war falsch. Es waren also im Test unter den 25 Kacheln höchstens 3 mit kleinen Fehlern, aber die Herstellerfirma liefert eigentlich Ware mit einem größeren Anteil fehlerhafter Kacheln als die angegebenen maximalen 10 %. Herstellerfirma: Die Firma wird zu Unrecht eine gute Qualität bescheinigt. Sie kann ihre Ware gut verkaufen, obwohl sie nicht in Ordnung ist. Ofensetzer: Er nimmt die Kacheln fälschlicherweise ab, obwohl sie schlechter sind als angegeben.
 $p = 15 \%: \beta = 47,1; p = 20 \%: \beta = 23,4 \%, p = 25 \%: \beta = 9,6 \%, p = 30 \%: \beta = 3,3 \%$
- d) Sollte ein Fehler 1. Art passieren, ist das für die Herstellerfirma von sehr großem Nachteil aber auch für den Ofensetzer hat es negative Folgen. Ein Fehler 2. Art, erscheint dies zunächst für die Herstellerfirma als positiv. Erst auf lange Sicht wird sie aber die Folgen bemerken: Sie wird ihren Abnehmer verlieren, da er früher oder später den Mangel bemerkt. Der Ofensetzer hat größere Nachteile, da er schlechte Qualität zu einem zu hohen Preis gekauft hat.
- e) $A = \{6; \dots; 25\}$
 $p = 15 \%: \beta = 83,8 \%; p = 20 \%: \beta = 61,7 \%; p = 25 \%: \beta = 37,8 \%; p = 30 \%: \beta = 19,3 \%$
Das bedeutet für den Ofensetzer, dass er unter der Bedingung, dass die Angabe der Firma richtig ist, der Firma mit wesentlich geringerer Wahrscheinlichkeit Unrecht tut. Allerdings erhöht er das Risiko dafür, dass er der Firma die schlechte Ware abnimmt, wenn die Fehlerquote in Wirklichkeit höher liegen sollte.
- f) *Hinweis*: als Zusatz, da aus den bisherigen Teilaufgaben der Zusammenhang der Fehlerarten schon deutlich wird. Es könnten die Ablehnungsbereiche $A = \{3; \dots 25\}$ und $A = \{5; \dots 25\}$ diskutiert werden
 $A = \{3; \dots 25\}$: Fehler 1. Art: $\alpha = 46,3 \%; p = 15 \%: \beta = 25,4 \%; p = 20 \%: \beta = 9,8 \%; p = 25 \%: \beta = 3,2 \%; p = 30 \%: \beta = 0,9 \%$ Für den Hersteller würde dies bedeuten, dass das Risiko, fälschlicherweise abgelehnt zu werden, obwohl die Ware den Vorgaben entspricht, fast 50 % beträgt. Dafür sinkt die Wahrscheinlichkeit, dass der Ofensetzer die Ware abnimmt, obwohl sie nicht den Vorgaben entspricht im Vergleich zu den Fällen c) und e) erheblich.