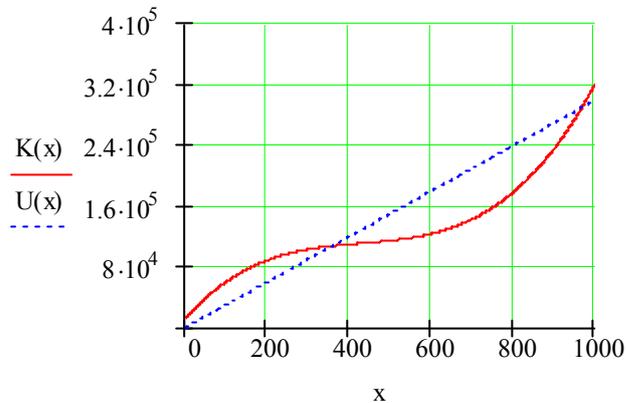


Lösungen zu ausgewählten Aufgaben der Klasse 11

S. 94 Nr. 23

a) $K(x) = 0,001x^3 - 1,29x^2 + 600x + 12000$
 $U(x) = 300x$



x	K(x)	U(x)
0	12000	0
200	88400	60000
400	109600	120000
600	123600	180000
800	178400	240000
1000	322000	300000

b)

Monotonie : $\frac{d}{dx} K(x) \rightarrow 3 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 - 2,58 \cdot x + 600$

$$x^2 - 860x + 200000 = 0 \quad x = 430 \pm \sqrt{-15100} \text{ n.d.}$$

Die erste Ableitung ist immer positiv und damit stets monoton wachsend.
 Die Kosten steigen mit zunehmender Stückzahl ständig.

$$\frac{d^2}{dx^2} K(x) \rightarrow 6 \cdot 10^{-3} \cdot x - 2,580 = 6 \cdot 10^{-3} \cdot x - 2,58 \text{ auflösen, } x \rightarrow 430.$$

$$\frac{d^3}{dx^3} K(x) \rightarrow 6 \cdot 10^{-3} > 0 \text{ Krümmungswechsel von rechts nach links} \quad K(430) = 110986 \quad (\text{nicht nötig})$$

Bei 430 verkauften Monitoren wechselt die Krümmung der Kurve von rechts nach links, dass heißt, dass der Anstieg der Kostenfunktion dort sein Minimum hat.
 Von $x=0$ bis 430 verkauften Monitoren sinkt der Anstieg der Kosten, danach steigt der Anstieg der Kosten wieder. D.h. die Kosten wachsen erst langsam, dann schneller (progressiv/ degressives Wachstum)

$$300x = 0.001 \cdot x^3 - 1.29 \cdot x^2 + 600x + 12000 \quad \left| \begin{array}{l} \text{auflösen, } x \\ \text{gleit, } 5 \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} -34.687 \\ 357.80 \\ 966.89 \end{pmatrix}$$

$$0 = 0.001 \cdot x^3 - 1.29 \cdot x^2 + 300x + 12000$$

Der Betrieb ist von 358 bis 966 verkauften Geräten in der Gewinnzone. Bei weniger oder mehr Geräten macht er Verlust.

c)

$$G(x) := -0.001 \cdot x^3 + 1.29 \cdot x^2 - 300x - 12000$$

$$\frac{d}{dx} G(x) \rightarrow -(3 \cdot 10^{-3}) \cdot x^2 + 2.58 \cdot x - 300$$

$$\frac{d^2}{dx^2} G(x) \rightarrow -(6 \cdot 10^{-3}) \cdot x + 2.58$$

$$-(3 \cdot 10^{-3}) \cdot x^2 + 2.58 \cdot x - 300 = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \text{auflösen, } x \\ \text{gleit, } 5 \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} 138.62 \\ 721.38 \end{pmatrix}$$

$$-(6 \cdot 10^{-3}) \cdot x + 2.58 \text{ ersetzen, } x = 138.62 \rightarrow 1.74828000000000000000$$

<0 Minimum

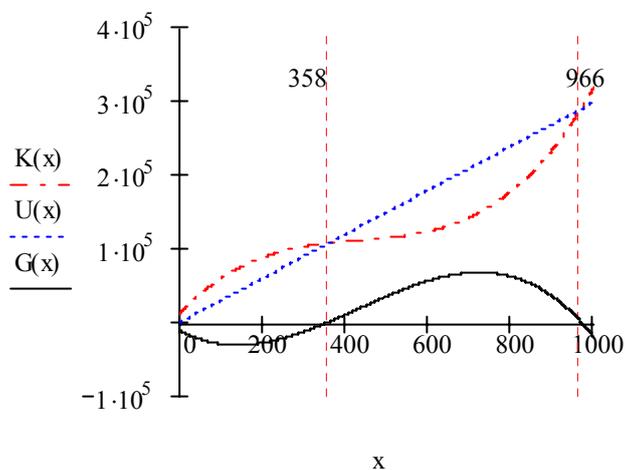
$$-(6 \cdot 10^{-3}) \cdot x + 2.58 \text{ ersetzen, } x = 721.38 \rightarrow -1.74828000000000000000$$

>0 Maximum

Bei 721 verkauften Geräten wird der Gewinn maximal.

d)

$$G(721) = 67489.529 \quad \text{€ Gewinn}$$



e)

explizit $G_n = 82500 \cdot 1.0125^{(n-1)}$ rekursiv $G_{n+1} = G_n \cdot 1.0125$
 $82500 \cdot 1.0125^{(9-1)}$ gleit , 8 \rightarrow 91120.103 Gewinn im 9. Geschäftsjahr

S. 98 Nr. 10

$f(x) = ax^2 + bx + c$ $a = 0,1$; $b = 0$; $c = 0 \Rightarrow f(x) = 0,1 x^2$, $f'(x) = 0,2 x$
 Anstieg des Schanzentisches muss gleich dem Anstieg der geraden Anlaufstrecke im Punkt (6 | 3,6) sein. $f'(6) = 1,2 = m_g$ $g(x) = 1,2 x - 3,6$

S. 98 Nr. 11

$h(x) = ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + fx + g$

mit CAS, $h(x)$, $h'(x)$, $h''(x)$

solve-Befehl: $h(2) = -1$; $h(5) = 2$; $h(8) = 5$; $h'(2) = -\frac{1}{2}$, $h'(8) = -\frac{1}{2}$; $h''(2) = 0$; $h''(8) = 0$

$h(x) = \frac{1}{144}x^5 - \frac{25}{144}x^4 + \frac{55}{36}x^3 - \frac{50}{9}x^2 + \frac{151}{18}x - \frac{47}{9}$

Weg s_1 : $2\sqrt{18} \approx 8,48$:

Weg s_2 : $\int_2^8 \sqrt{1+h'(x)^2} dx \approx 9,7556$ Mehrkosten von 15 % (F5 B, Bogenlänge im Intervall [2;8] im Grafikmodus ermitteln)

S. 98 Nr. 12

Für die Lösung der Aufgabe gibt es mehrere Ansatzmöglichkeiten, eine sei hier vorgestellt:

– Skizze zum Erfassen des Sachverhaltes mit Beschriftung (s. Abb.)

– Finden einer Zielgröße und gedankliche Veränderung der Zielgröße:

Die Länge d sei das Stück, das die Leiter über die Mauer hinausragt. Wird d größer als 2 m, so zerstört die Leiter die Wand aus Pergament. Es ist also das maximal mögliche d gesucht.

– Finden einer Gleichung mit der Zielgröße und analysieren der Gleichung:

nach dem Strahlensatz gilt:

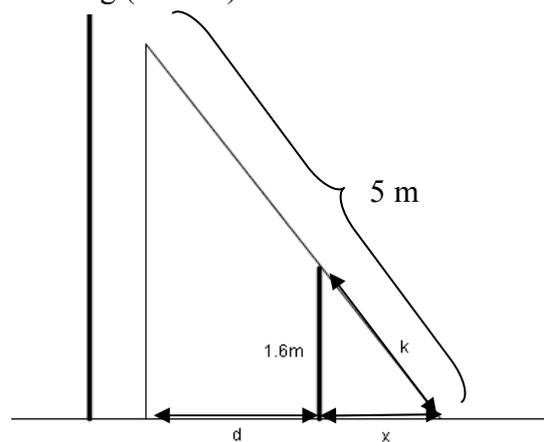
$\frac{k}{x} = \frac{5}{d+x}$ $0 < x < 5$, also

$d = \left(\frac{5}{k} - 1\right) \cdot x$, d hängt außer von x auch von

k ab

– Finden einer Gleichung für den Parameter k durch Analyse der Nebenbedingungen:

– $k^2 = 1,6^2 + x^2 \Rightarrow k = \sqrt{1,6^2 + x^2}$ (Pythagoras)



- Ersetzen von k in der Gleichung für d (Aufstellen der Zielfunktion):

$$d(x) = \frac{5x}{\sqrt{x^2 + 1,6^2}} - x$$

- Untersuchung der Zielfunktion auf lokale Extrema mit CAS:

notwendige Bedingung:

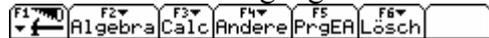
$$d'(x) = 0$$



$\frac{5 \cdot x}{\sqrt{x^2 + (1.6)^2}} - x \rightarrow d(x)$ Fertig
 ■ Löse $\left\{ \frac{d}{dx}(d(x)) = 0, x \right\}$
 $x = 1.70644$ or $x = -1.70644$
Löse $\langle d'(x), x \rangle = 0, x \rangle$
MAIN BGG AUTO FKT 2/30

$x \approx 1,71\text{m}$ $x \approx -1,72\text{m}$ entfällt, da eine negative Länge hier keinen Sinn macht.

hinreichende Bedingung:



$\frac{d}{dx}(d(x)) = 0, x$
 $x = 1.70644$ or $x = -1.70644$
 ■ $\frac{d}{dx}(d(x)) | x = 1$.905614
 ■ $\frac{d}{dx}(d(x)) | x = 2$ -.238177
 $d'(x) | x = 2$ $d'(1) \approx 0,91$
MAIN BGG AUTO FKT 4/30 $d'(2) \approx -0,24$

Es findet ein Monotoniewechsel von wachsend zu fallend statt, es liegt ein lokales Maximum vor.

- Kontrolle am Sachverhalt, Ergebnis:



■ Löse $\left\{ \frac{d}{dx}(d(x)) = 0, x \right\}$
 $x = 1.70644$ or $x = -1.70644$
 ■ $\frac{d}{dx}(d(x)) | x = 1$.905614
 ■ $\frac{d}{dx}(d(x)) | x = 2$ -.238177
 ■ $d(1.7064357677233)$ 1.94102
 $d(1.7064357677233)$
MAIN BGG AUTO FKT 5/30

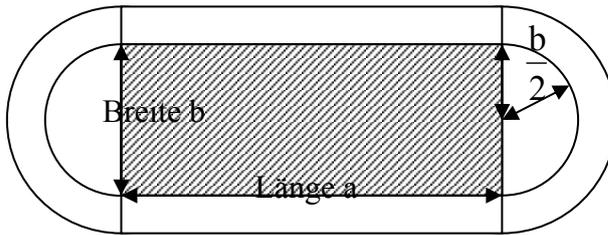
Da $0 \text{ m} < x < 5 \text{ m}$ gelten muss, hat die gefundene Lösung Bestand.

Die Leiter ragt maximal 1,94 m über die Mauer hinaus.

Die Leiter zerstört die Wand nicht, da die Wand 2 m von der Mauer entfernt ist.

S. 98 Nr. 13

1. Skizze zum Erfassen des Sachverhaltes mit Beschriftung:



2. Finden der Zielgröße:

Der Flächeninhalt A des Spielfeldes soll maximal werden.

3. Finden und analysieren einer Gleichung zur Berechnung der Zielgröße:

Das Spielfeld ist ein Rechteck, für die Fläche A des gesuchten Rechtecks gilt:

$A = a \cdot b$. Der Flächeninhalt hängt von 2 Größen, es muss eine weitere Beziehung zwischen ihnen gefunden werden.

4. Aufstellen von Gleichungen zu den Nebenbedingungen:

Die Laufbahn hat eine Länge von 400 m, sie setzt sich zusammen aus zwei

Halbkreisen mit $r = \frac{b}{2}$ und zwei mal der Länge a des Spielfeldes.

$400 \text{ m} = 2 \cdot a + 2 \cdot \frac{\pi \cdot b}{2}$ Dies ist eine Gleichung, in der nur a und b vorkommen.

5. Aufstellen der Zielfunktion:

$A = a \cdot b$ Ersetzen der Variable a mit Hilfe der gefundenen Gleichung:

$$a = 200\text{m} - \frac{\pi \cdot b}{2}$$

$$A(b) = \left(200\text{m} - \frac{\pi \cdot b}{2}\right) \cdot b = -\frac{\pi \cdot b^2}{2} + 200\text{m} \cdot b \quad A(b) = -\frac{\pi \cdot b^2}{2} + 200\text{m} \cdot b \text{ Zielfunktion}$$

6. Untersuchung der Zielfunktion auf lokale Extrema:

$$A'(b) = -\pi \cdot b + 200\text{m}$$

$$\text{notwendige Bedingung: } A'(b) = 0 \quad 0 = -\pi \cdot b + 200\text{m} \quad b = \frac{200\text{m}}{\pi} \approx 63,66\text{m}$$

eine hinreichende Bedingung: $A''(b) \neq 0$

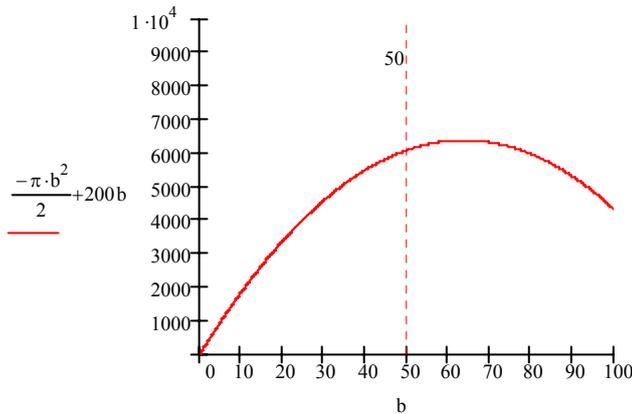
$$A''(b) = -\pi$$

$$A' \left(\frac{200\text{m}}{\pi} \right) = -\pi < 0 \Rightarrow \text{Maximum}$$

$$a = 200\text{m} - \frac{\pi \cdot \frac{200\text{m}}{\pi}}{2} = 100\text{m}$$

7. Kontrolle am Sachverhalt:

Die maximal mögliche Breite des Spielfeldes beträgt 50 m, somit kann die gefundene Lösung nicht gelten.



Das Randmaximum ist zu wählen mit $b = 50$ m.

Es ergibt sich eine Länge von $a = 200\text{m} - \frac{\pi \cdot 50}{2} \approx 121,46\text{m}$

Die Fläche erreicht unter den genannten Bedingungen den Wert von $A \approx 50\text{m} \cdot 121,46\text{m} \approx 6072,5\text{m}^2$.

Das Spielfeld sollte die maximal mögliche Breite von 50 m haben, wodurch sich eine Länge von etwa 120 m ergibt. Der Flächeninhalt beträgt dann etwa 6000 m².

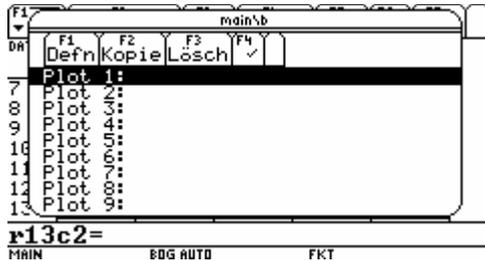
S. 99 Nr. 14

1. Eintragen der Daten in Dat./Matrix

	F2	F3	F4	F5	F6	F7
DATN	PlotEinSt	Zell	ÜbSchr	Calc	Div	Stat
7	c1	c2	c3	c4	c5	
8	174	79				
9	165	70				
10	162	56				
11	167	62,5				
12	165	59,5				
13	168	66				

r13c2=

2. Darstellen der Daten als Punktwolke: F2 (PlotEinSt)



r13c2=

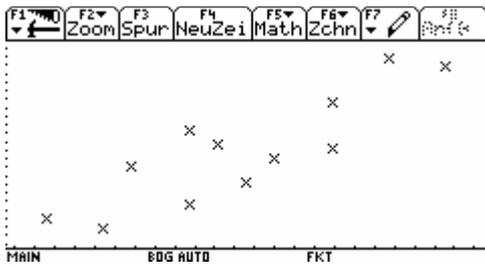


F1 (Defn)



Enter, Enter

Darstellung im geeigneten Intervall



3. Regressionsgerade :
in Dat./Matrix F5 (Calc) aufrufen:

main/b Berechne

BerechnungsTyp.... ZweiVar →

x.....

y.....

Parabola speichern nicht-

Mit Häufigk. u. Klassen? NEIN→

Häufigkeit.....

Klassen.....

Mit Klassen.....

Enter=SICH ESC=ABBR

MIT ← ODER → UNTERMENU OFFNEN

, lineare Regression einstellen

main/b Berechne

BerechnungsTyp.... ZweiVar →

x.....

y.....

Parabola speichern nicht-

Mit Häufigk. u. Klassen? NEIN→

Häufigkeit.....

Klassen.....

Mit Klassen.....

Enter=SICH ESC=ABBR

MIT ← ODER → UNTERMENU OFFNEN

Enter, Enter

F1 P1 F2 F3 F4 F5 F6 F7 Stat

DATN	c1	STATISTIK VAR
7	174	y=a·x+b
8	165	a =1.607826
9	162	b =-201.155652
10	167	corr =.863234
11	165	R² =.745174
12	168	
13		

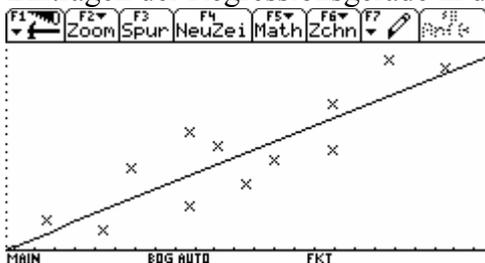
Enter=OK

r13c2=

MAIN BDG AUTO FKT

Die Regressionsgerade heißt $y = 1,607826x - 201,155652$

Eintragen der Regressionsgerade in die Punktwolke:



F1 Algebra F2 Calc F3 Andere F4 PrgEA F5 Lös

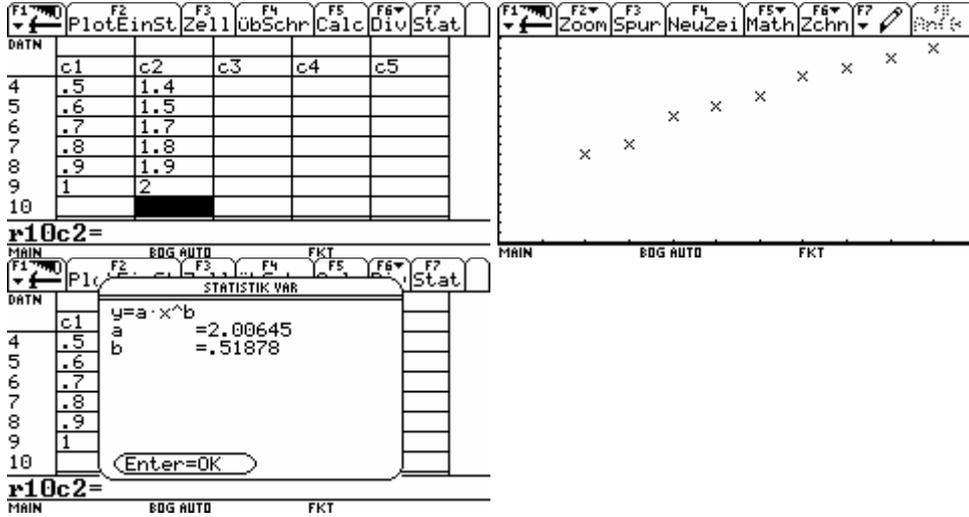
■ y1(160) 55.6956

y1(160)

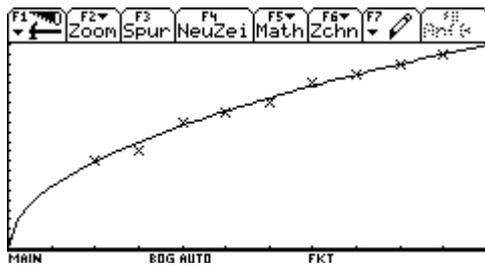
MAIN BDG AUTO FKT 1/30

Bei einer Größe von 160 cm würde man eine Masse von etwa 56 kg voraussagen.

S. 99 Nr. 15

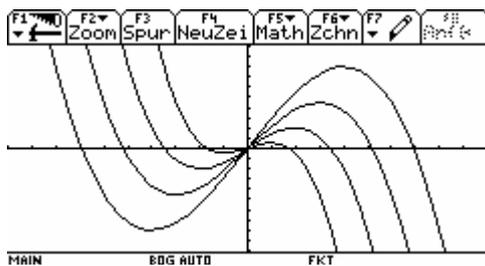


Vermuteter Zusammenhang: $T = 2\sqrt{I}$
Darstellung des vermuteten Zusammenhangs mit Punktwolke



S. 99 Nr. 17

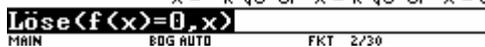
Lösungen ($k > 0$):



Die Graphen haben eine ähnliche Form, sind aber mit höherem k in Richtung der x - und y -Achse gestreckt.



- $-\frac{1}{4 \cdot k} \cdot x^3 + \frac{3}{4} \cdot k \cdot x \rightarrow f(x)$ Fertig
- Löse($f(x) = 0, x$)
 $x = -k \cdot \sqrt{3}$ or $x = k \cdot \sqrt{3}$ or $x = 0$



Die Nullstelle $x = 0$ ist für jede Funktion der Schar vorhanden. Die Nullstellen $x = \pm k \cdot \sqrt{3}$ wandern mit steigendem k nach rechts bzw. links auf der x - Achse, dabei ist der Abstand zum Koordinatenursprung gleich.

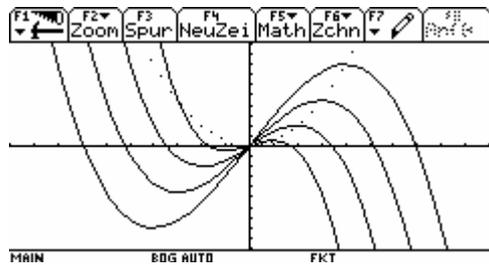
F1 Algebra F2 Calc F3 Andere F4 PrgEA F5 Lösch	F1 Algebra F2 Calc F3 Andere F4 PrgEA F5 Lösch
$\frac{d}{dx}(f(x))$	$\frac{d}{dx^2}(f(x))$
$\frac{3 \cdot k}{4} - \frac{3 \cdot x^2}{4 \cdot k}$	$\frac{-3 \cdot x}{2 \cdot k}$
$\text{Löse}\left(\frac{3 \cdot k}{4} - \frac{3 \cdot x^2}{4 \cdot k} = 0, x\right)$	$\text{Löse}\left(\frac{3 \cdot k}{4} - \frac{3 \cdot x^2}{4 \cdot k} = 0, x\right)$
$x = -k \text{ or } x = k$	$x = -k \text{ or } x = k$
$\text{Löse}\left(\frac{3 \cdot k}{4} - \frac{3 \cdot x^2}{4 \cdot k} = 0, x\right)$	$\text{Löse}\left(\frac{3 \cdot k}{4} - \frac{3 \cdot x^2}{4 \cdot k} = 0, x\right)$
$x = -k \text{ or } x = k$	$x = -k \text{ or } x = k$
$\text{Löse}(3 \cdot k / 4 - 3 \cdot x^2 / (4 \cdot k) = 0, x)$	$\text{Löse}(3 \cdot k / 4 - 3 \cdot x^2 / (4 \cdot k) = 0, x)$
MAIN BDG AUTO FKT 4/30	MAIN BDG AUTO FKT 6/30

$k > 0$

Die Hochpunkte der Schar liegen bei $P_H\left(k \mid \frac{k^2}{2}\right)$. Mit steigendem k rückt der Hochpunkt

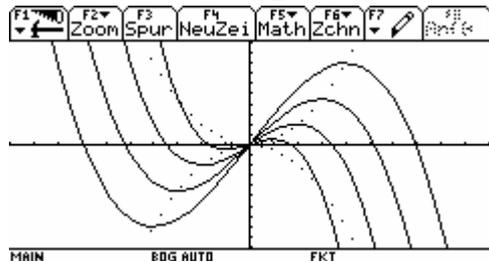
weiter nach rechts und nach oben. Eine genaue Beschreibung liefert die Ortskurve der Hochpunkte: (x -Koordinate des Extrempunktes gleich x setzen, nach k umstellen und das k in y -Koordinate des Extrempunktes einsetzen. k entfällt, es ergibt sich ein Zusammenhang zwischen y und x)

F1 Algebra F2 Calc F3 Andere F4 PrgEA F5 Lösch	
$f(k)$	$\frac{k^2}{2}$
$f(-k)$	$-\frac{k^2}{2}$
$f(x) \mid k = x$	$\frac{x^2}{2}$
$f(x) \mid k = x$	$y = \frac{x^2}{2}$
MAIN BDG AUTO FKT 6/30	

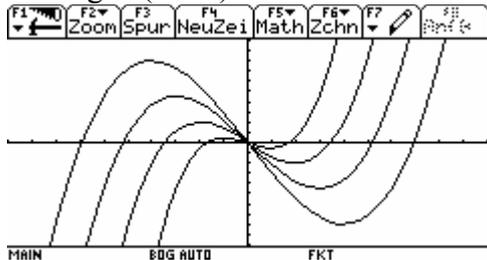


Die Tiefpunkte der Schar liegen bei $P_H\left(-k \mid -\frac{k^2}{2}\right)$. Mit steigendem k rückt der Tiefpunkt

weiter nach links und nach unten. Eine genaue Beschreibung liefert die Ortskurve der Hochpunkte: $y = -\frac{x^2}{2}$.



Lösungen ($k < 0$):



Die Graphen haben eine ähnliche Form, sind aber mit höherem k in Richtung der x - und y -Achse gestreckt.



$$-\frac{1}{4 \cdot k} \cdot x^3 + \frac{3}{4} \cdot k \cdot x \rightarrow f(x) \quad \text{Fertig}$$

$$\text{Löse}(f(x) = 0, x)$$

$$x = -k \cdot \sqrt{3} \text{ or } x = k \cdot \sqrt{3} \text{ or } x = 0$$
Löse(f(x)=0, x)

Die Nullstelle $x = 0$ ist für jede Funktion der Schar vorhanden. Die Nullstellen $x = \pm k \cdot \sqrt{3}$ wandern mit steigendem k nach rechts bzw. links auf der x -Achse, dabei ist der Abstand zum Koordinatenursprung gleich. (Wie $k > 0$)

$$\frac{d}{dx}(f(x)) = \frac{3 \cdot k}{4} - \frac{3 \cdot x^2}{4 \cdot k}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(f(x)) = \frac{-3 \cdot x}{2 \cdot k}$$

$$\text{Löse}\left(\frac{3 \cdot k}{4} - \frac{3 \cdot x^2}{4 \cdot k} = 0, x\right) \quad x = -k \text{ or } x = k$$

$$\frac{d}{dx^2}(f(x)) = \frac{-3 \cdot x}{2 \cdot k} \quad \text{Löse}\left(\frac{-3 \cdot x}{2 \cdot k} = k, x\right) \quad x = -k \text{ or } x = k$$

Löse(3*k/4 - 3*x^2/(4*k)=0, x) **-3*x/(2*k) | x=-k**

Da $k < 0$ liegt der Hochpunkt jetzt links auf der x -Achse.

Die Hochpunkte der Schar liegen bei $P_H\left(k \mid \frac{k^2}{2}\right)$. Mit steigendem k rückt der Hochpunkt

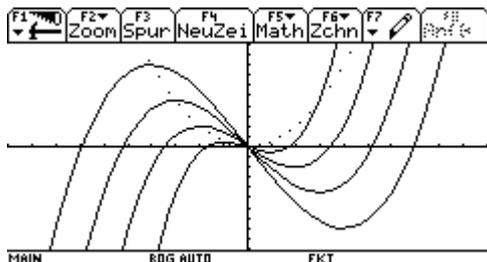
weiter nach links und nach oben. Eine genaue Beschreibung liefert die Ortskurve der Hochpunkte:

$$f(k) = \frac{k^2}{2}$$

$$f(-k) = \frac{-k^2}{2}$$

$$f(x) \mid k = x \quad \frac{x^2}{2}$$
f(x) | k=x

$y = \frac{x^2}{2}$

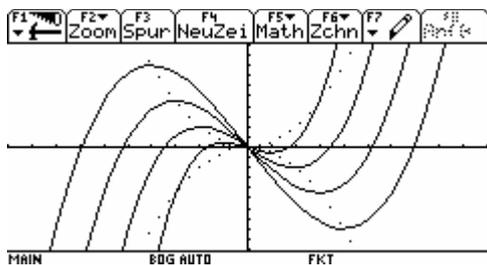


Da $k < 0$ liegt der Hochpunkt jetzt rechts auf der x - Achse.

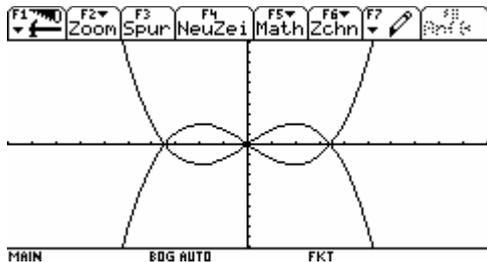
Die Tiefpunkte der Schar liegen bei $P_H \left(-k \mid \frac{-k^2}{2} \right)$. Mit steigendem k rückt der Tiefpunkt

weiter nach rechts und nach unten. Eine genaue Beschreibung liefert die Ortskurve der

Hochpunkte: $y = -\frac{x^2}{2}$.



Direkter Vergleich:



Der Graph von $f_2(x)$ ergibt sich aus der Spiegelung des Graphen von $f_1(x)$ an der x - Achse. Die Nullstellen und Extremstellen sind identisch.

S. 100 Nr. 18

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

I. $b = d = 0$ (Symmetrie zur y -Achse) $f(x) = ax^4 + cx^2 + e$

II. $f(0) = 5$ $e = 5$

III. $f'(2) = 16$ $f'(x) = 4ax^3 + 2cx$ $16 = 32a + 4c$

IV. $f'\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = 0$ $f''(x) = 12ax^2 + 2c$ $0 = 8a + 2c$

■ Löse($16 = 32 \cdot a + 4 \cdot c$ and $0 = 8 \cdot a + 2 \cdot c$, $\{a\}$)
 $a = 1$ and $c = -4$

■ $16 = 32a + 4c$ and $0 = 8a + 2c$, $\{a, c\}$ $f(x) = x^4 - 4x^2 + 5$



- $x^4 - 4 \cdot x^2 + 5 \rightarrow f(x)$ Fertig
- Löse($f(x) = 0, x$) falsch
- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ ∞
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ∞

Löse($f(x) > 0, x$)

Die Funktion hat keine Nullstellen und es gilt $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty$, somit ist $f(x) > 0$. Rudi hat also

nicht die Erde berührt.

Gesucht sind die Tiefpunkte der Funktion:

Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$



- | | | | |
|--|--|--|----|
| ▪ $\frac{d}{dx}(f(x))$ | $4 \cdot x^3 - 8 \cdot x$ | ▪ $\frac{d^2}{dx^2}(f(x)) _{x = -\sqrt{2}}$ | 16 |
| ▪ Löse($4 \cdot x^3 - 8 \cdot x = 0, x$) | $x = -\sqrt{2}$ or $x = \sqrt{2}$ or $x = 0$ | ▪ $\frac{d^2}{dx^2}(f(x)) _{x = \sqrt{2}}$ | 16 |
| ▪ $\frac{d^2}{dx^2}(f(x))$ | $12 \cdot x^2 - 8$ | ▪ $\frac{d^2}{dx^2}(f(x)) _{x = 0}$ | -8 |

$\frac{d}{dx}(f(x), x, 2) |_{x = \sqrt{2}}$

$\frac{d}{dx}(f(x), x, 2) |_{x = 0}$

Die Stellen, an denen Tiefpunkte vorliegen sind $x = \pm\sqrt{2}$, da die hinreichende Bedingung auch erfüllt ist: $f''(\pm\sqrt{2}) = 16 > 0$ $f(\pm\sqrt{2}) = 1$.

Er kam der Erde an den Stellen $x = \pm\sqrt{2}$ am nächsten. Er flog dort 1 LE über dem Boden.

Krümmungswechsel:

Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$ hinreichende Bedingung $f'''(x) \neq 0$



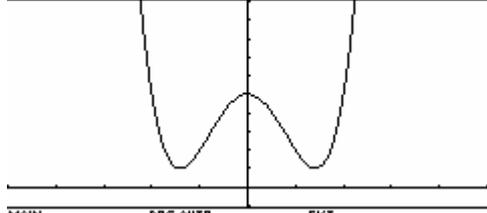
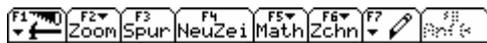
- | | | | |
|-------------------------------------|---|--|---------------------|
| ▪ $\frac{d^2}{dx^2}(f(x))$ | $12 \cdot x^2 - 8$ | ▪ $\frac{d^3}{dx^3}(f(x))$ | $24 \cdot x$ |
| ▪ Löse($12 \cdot x^2 - 8 = 0, x$) | $x = \frac{\sqrt{6}}{3}$ or $x = -\frac{\sqrt{6}}{3}$ | ▪ $\frac{d^3}{dx^3}(f(x)) _{x = \frac{\sqrt{6}}{3}}$ | $8 \cdot \sqrt{6}$ |
| ▪ $\sqrt{2/3}$ | $\frac{\sqrt{6}}{3}$ | ▪ $\frac{d^3}{dx^3}(f(x)) _{x = -\frac{\sqrt{6}}{3}}$ | $-8 \cdot \sqrt{6}$ |

$\frac{d}{dx}(f(x), x, 3)$

$\frac{d}{dx}(f(x), x, 3) |_{x = \sqrt{6}/3}$

Er wechselt bei $x = \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ seine Krümmung von rechts nach links ($f''(\frac{\sqrt{6}}{3}) > 0$) und bei

$x = -\frac{\sqrt{2}}{3} = -\frac{\sqrt{6}}{3}$ von links nach rechts ($f''(-\frac{\sqrt{6}}{3}) < 0$)



Der Weihnachtsmann meint ein W für Weihnachten.

S. 105 Nr. 20

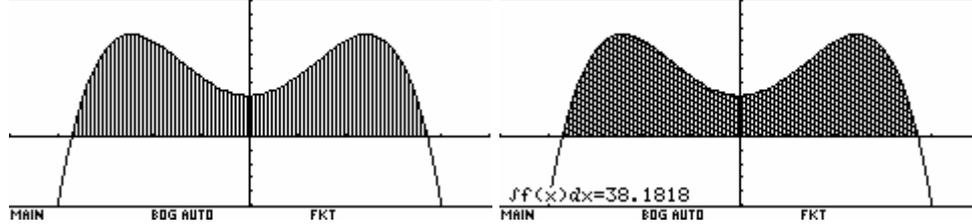
a) Berechnung der Grenzen:



- $-1/8 \cdot x^4 + 3/2 \cdot x^2 + 3 \rightarrow f(x)$ Fertig
- Löse($f(x) = 0, x$)
 $x = -\sqrt{2 \cdot (\sqrt{15} + 3)}$ or $x = \sqrt{2 \cdot (\sqrt{15} + 3)}$
- Löse($f(x) = 0, x$)
 $x = 3.70756$ or $x = -3.70756$

Löse(f(x)=0, x)

$$x_1 = -\sqrt{2(\sqrt{15} + 3)} \approx -3,7 \quad x_2 = \sqrt{2(\sqrt{15} + 3)} \approx 3,7$$

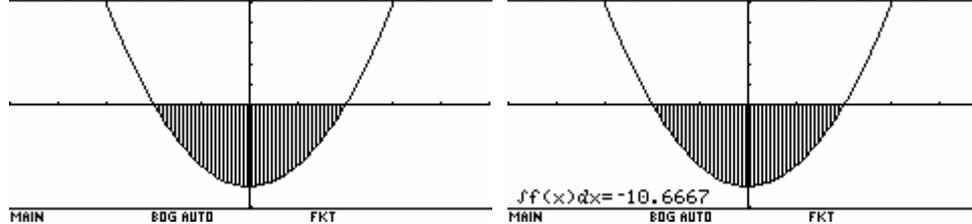


- $\int_{-\sqrt{2 \cdot (\sqrt{15} + 3)}}^{\sqrt{2 \cdot (\sqrt{15} + 3)}} f(x) dx$
 $\frac{4 \cdot (\sqrt{15} + 9) \cdot \sqrt{2 \cdot (\sqrt{15} + 3)}}{5}$
- $\int_{-\sqrt{2 \cdot (\sqrt{15} + 3)}}^{\sqrt{2 \cdot (\sqrt{15} + 3)}} f(x) dx$ 38.1818

2*(J(15)+3), J(2*(J(15)+3))

Der Flächeninhalt A beträgt bei den entsprechenden Skalierungen der Achsen $A \approx 38,18m^2$
 $A \approx 38,18 cm^2$ bzw. $A \approx 38,18 mm^2$

b) Berechnung der Grenzen: $x_1 = -2$ $x_2 = 2$



- $\int_{-2}^2 (x^2 - 4) dx$ -10.6667
- $\left| \int_{-2}^2 (x^2 - 4) dx \right|$ 32/3
- $\int_{-2}^2 |x^2 - 4| dx$ 10.6667

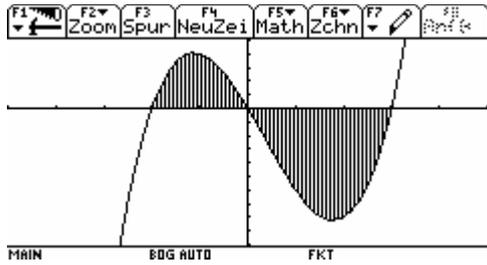
MAIN BDG AUTO FKT 4/30

Der Flächeninhalt A beträgt entsprechend der Achseneinteilung $A = \frac{32}{3} m^2$; $A = \frac{32}{3} cm^2$;

bzw. $A = \frac{32}{3} mm^2$.

c) $f(x) = x^3 - x^2 - 6x$

Berechnung der Grenzen: $x_1 = -2$ $x_2 = 0$ $x_3 = 3$



Die Berechnung erfolgt getrennt:



$$\int_{-2}^0 f(x) dx + \left| \int_0^3 f(x) dx \right| = \frac{253}{12}$$

$$\int_{-2}^0 f(x) dx + \left| \int_0^3 f(x) dx \right| = 21.0833$$



$$\int_{-2}^0 f(x) dx + \left| \int_0^3 f(x) dx \right| = \frac{253}{12}$$

$$\int_{-2}^0 f(x) dx + \left| \int_0^3 f(x) dx \right| = 21.0833$$

$$\int_{-2}^3 f(x) dx = -10.4167$$



Vorsicht!



Der Flächeninhalt A beträgt entsprechend der Achseneinteilung $A \approx 21,1 m^2$; $A \approx 21,1 cm^2$; bzw. $A \approx 21,1 mm^2$

S. 108 Nr. 31

a)



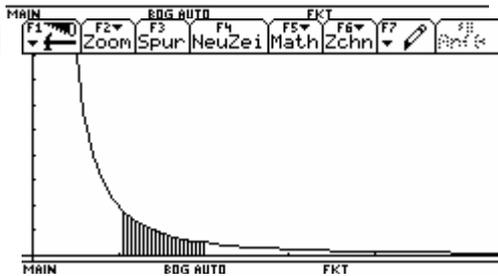
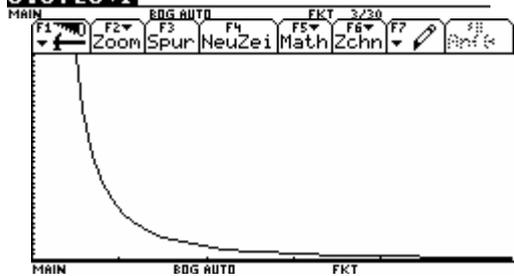
$$\frac{3.987e14}{x^2} \rightarrow g(x) \quad \text{Fertig}$$

$$g(x) \cdot 100 \rightarrow f(x) \quad \text{Fertig}$$

$$6370000. \rightarrow r \quad 6.37e6$$



xmin=-796250.
xmax=35035000.
xsc1=63700000.
ymin=100.
ymax=4000.
yrc1=500.
xres=5.



b) und c)

Die Arbeit, um einen Körper von 100 kg von 1R zu 2R zu transportieren ist viel größer, als die Arbeit, einen Körper von 4R zu 5R zu transportieren. Beide Male beträgt die Entfernung 1R. Die Funktion $F(x)$ ist streng monoton fallend und so wird die Fläche kleiner. Die Erdanziehungskraft wirkt in großer Entfernung nicht mehr so stark. Es wäre von Vorteil, wenn z.B. Raketen von einer Umlaufbahn aus gestartet werden könnten.



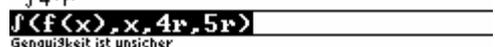
$$\frac{3.987e14}{x^2} \rightarrow g(x) \quad \text{Fertig}$$

$$g(x) \cdot 100 \rightarrow f(x) \quad \text{Fertig}$$

$$6370000. \rightarrow r \quad 6.37e6$$

$$\int_r^{2 \cdot r} f(x) dx = 3.12951e9$$

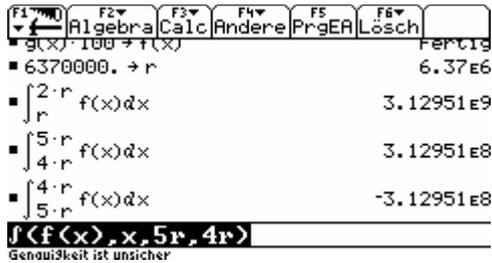
$$\int_{4 \cdot r}^{5 \cdot r} f(x) dx = 3.12951e8$$



Zur Information: Die Einheit der Arbeit ergibt sich aus $\frac{N}{kg} \cdot kg \cdot m = Nm$

d)

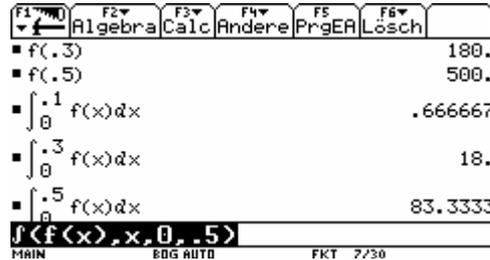
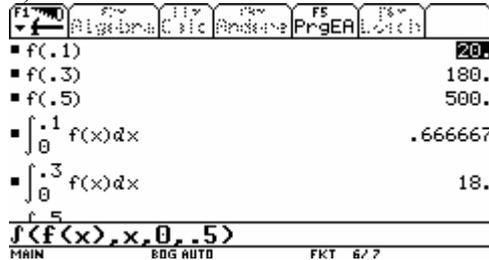
$\underbrace{kg}_{F \text{ in N}} \cdot \underbrace{m}_{x \text{ in m}} = Nm$



Die Arbeit beträgt $A = -3,13 \cdot 10^8 \text{ Nm}$. Das Vorzeichen ist negativ, da der Körper jetzt selbst Arbeit verrichtet. Es ist ein Unterschied, ob der Körper Arbeit verrichtet, oder ob an ihm Arbeit verrichtet wird.

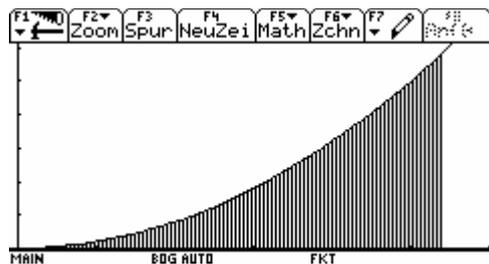
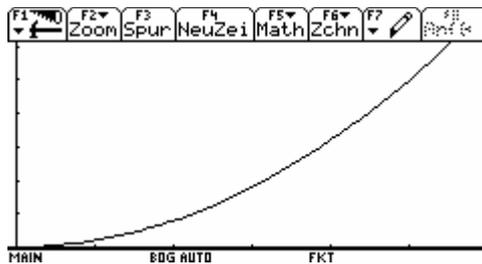
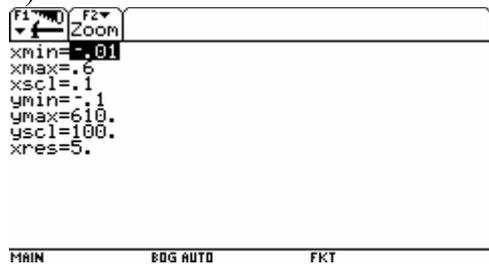
S. 110 Nr. 38

a)



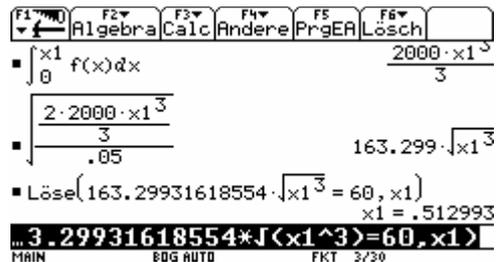
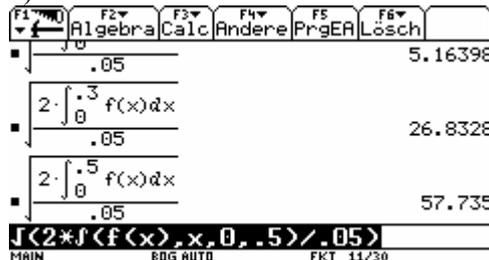
Bei 10 cm muss er eine Kraft von 20 N aufwenden (180 N, 500N) (2 kg, 18 kg, 50 kg)
Die Arbeit hat einen Wert von 0,67 Nm (18 Nm; 83,3 Nm)

b)



Die Arbeit W wird durch die Fläche unter der Kurve dargestellt.

c)



Die Abschussgeschwindigkeiten betragen: $5,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; Man muss den Bogen ca. 51 cm spannen.

$26,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ bzw. $57,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ $v(x) = 163,299 \cdot \sqrt{x^3}$

S. 113 Nr. 6

Lösung in Kurzform:

F1 Zoom F2 Bearb F3 Alles F4 ZeiStil F5 F6 F7

PLOTS -

$$y1 = \frac{1.2}{1 + e^{-0.05 \cdot (x - 63)}}$$

y2=
y3=
y4=
y5=
y6=
y7=
y8=
y2(x)=

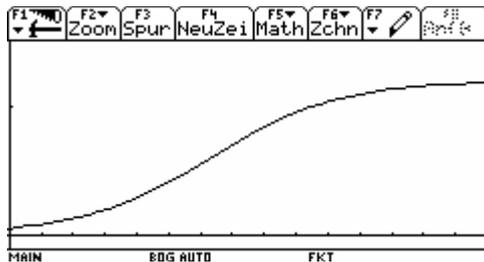
MAIN BDG AUTO FKT

F1 Zoom F2 Zoom

xmin=-5
xmax=150.
xscl=10.
ymin=-.1
ymax=1.5
yscl=1.
xres=5.

MAIN BDG AUTO FKT

Durchmesser in m:



F1 Algebra F2 Calc F3 Andere F4 PrgEA F5 Lösch

$$\frac{1.2}{1 + e^{-0.05 \cdot (t - 63)}} \rightarrow d(t) \quad \text{Fertig}$$

- d(30) .193331
- d(50) .411587
- d(100) 1.03695

d(100)

MAIN BDG AUTO FKT 4/30

Wendepunkt

F1 Algebra F2 Calc F3 Andere F4 PrgEA F5 Lösch

$$1 + e^{-0.05 \cdot (t - 63)}$$

- d(30) .193331
- d(50) .411587
- d(100) 1.03695
- Löse $\left\{ \frac{d^2}{dt^2}(d(t)) = 0, t \right\}$ t = 63.
- d(63) .6

d(63)

MAIN BDG AUTO FKT 6/30

F1 Algebra F2 Calc F3 Andere F4 PrgEA F5 Lösch

- Löse $\left\{ \frac{d^2}{dt^2}(d(t)) = 0, t \right\}$ t = 63.
- d(63) .6
- lim d(t) t → ∞ 1.2
- $-\frac{d}{dt}(d(t)) | t = 63$.015

d(d(t), t) | t = 63

MAIN BDG AUTO FKT 8/30

$P_w(63|0,6)$

Interpretation z.B.

Zunächst nimmt der Durchmesser progressiv zu. Die Größte Zunahme des Durchmessers hat der Baum im 63. Standjahr. Er erzielt dort eine Steigerungsrate von 1,5 cm/Jahr. Danach verlangsamt sich das Wachstum. Der Durchmesser wird nicht größer als 1,20 m. Hinweis: Es handelt sich um ein logistisches Wachstum.

S. 115 Nr. 18

a), b)

Schnittpunkt mit der y-Achse: $P_y(0|e^2)$

Tangente t: $f'(x) = -\frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{1}{4}x+2}$ $f'(0) = m_t = -\frac{1}{4}e^2$ $y = -\frac{1}{4}e^2 \cdot x + e^2$

mögliche Rechneranzeigen:

F1 Algebra F2 Calc F3 Andere F4 PrgEA F5 Lösch

- $e^{-1/4 \cdot x + 2} \rightarrow f(x)$ Fertig
- f(0) e^2
- $\frac{d}{dx}(f(x))$ $-\frac{e^{2-\frac{x}{4}}}{4}$

$2 - \frac{x}{4}$

Löse $(y - e^2) = -e^{2/4}(x-0), y$

MAIN BDG AUTO FKT 5/5

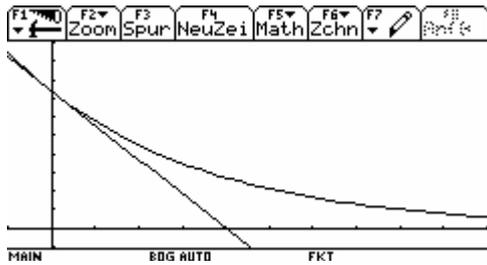
F1 Algebra F2 Calc F3 Andere F4 PrgEA F5 Lösch

- $-\frac{e^{2-\frac{x}{4}}}{4} | x=0$ $-\frac{e^2}{4}$
- Löse $(y - e^2 = -\frac{e^2}{4} \cdot (x - 0), y)$

$y = e^2 - \frac{e^2 \cdot x}{4}$

Löse $(y - e^2) = -e^{2/4}(x-0), y$

MAIN BDG AUTO FKT 5/30



c)

Eine Stammfunktion ist: $\int f(x)dx = -4 \cdot e^{-\frac{1}{4}x+2}$

$$A(u) = \int_0^u f(x) = 4 \cdot \left(e^{\frac{u}{4}} - 1 \right) \cdot e^{2-\frac{u}{4}} \quad (\text{Rechneranzeige})$$

$$A(u) = \int_0^u f(x) = -4 \cdot e^{-\frac{1}{4}u+2} + 4 \cdot e^2 \quad (\text{ohne CAS})$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} A(u) = 4 \cdot e^2$$

d) Tangente t, x-Achse: $0 = -\frac{1}{4}e^2 \cdot x + e^2 \quad x = 4$

Eine Stammfunktion ist: $\int \left(-\frac{1}{4}e^2 \cdot x + e^2 \right) dx = -\frac{e^2}{8}x^2 + e^2 \cdot x$

$$A_1 = \int_0^4 \left(-\frac{1}{4}e^2 \cdot x + e^2 \right) dx = 2 \cdot e^2 \quad 2A_1 = \lim_{u \rightarrow \infty} A(u) = 4 \cdot e^2$$

mögliche Rechneranzeigen:

F1 Algebra F2 Calc F3 Andere F4 PrgEA F5 Lösch	F1 Algebra F2 Calc F3 Andere F4 PrgEA F5 Lösch
$\int f(x)dx$	$\int_0^u f(x)dx$
$\lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^u f(x)dx$	$\int_0^4 \left(-\frac{1}{4}e^2 \cdot x + e^2 \right) dx$
Limes(f(x), x, 0, u), u, ∞	L(-1/4e^2*x+e^2), x, 0, 4

e) Das Dreieck ist rechtwinklig (Koordinatenachsen) und damit nur gleichschenkelig, wenn die beiden Basiswinkel 45° sind, also muss der Winkel mit der positiven Richtung der x-Achse 135° groß sein.

$$P(u | e^{-\frac{1}{4}u+2}) \quad m = f'(u) = -\frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{1}{4}u+2} = \tan(135^\circ) = -1$$

$$-1 = -\frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{1}{4}u+2} \Rightarrow u = 8 - \ln(4) = -8(\ln(2) - 1)$$

mögliche Rechneranzeigen:

F1 Algebra F2 Calc F3 Andere F4 PrgEA F5 Lösch
$\frac{d}{dx}(f(x)) x = u$
$\text{Löse} \left(-1 = \frac{-e^{-\frac{u}{4}+2}}{4}, u \right)$
Löse(-1=-e^(2-u/4)/4, u)

S. 116 Nr. 22

Darstellen der Daten und ermitteln der Funktionswerte im Daten-Matrix-Editor

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Plot	EinSt	Zell	ÜbSchr	Calc	Div	Stat
DATN	Jahr	Anzahl	Hilfs...	Rate	exp.	
	c1	c2	c3	c4	c5	
1	0	258.	undef	undef	258.	
2	1	319.	258.	1.2364	319.92	
3	2	386.	319.	1.21	396.7	
4	3	489.	386.	1.2668	491.91	
5	4	676.	489.	1.3824	609.97	
6	5	1039.	676.	1.537	756.36	
7	6	1502.	1039.	1.4456	937.89	

c1=

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Plot	EinSt	Zell	ÜbSchr	Calc	Div	Stat
DATN	Rate	exp.	exp.	besch...	logis...	
	c4	c5	c6	c7	c8	
1	undef	258.	258.	-9438.	258.	
2	1.2364	319.92	340.56	-6235.	380.91	
3	1.21	396.7	449.54	-3752.	555.21	
4	1.2668	491.91	593.39	-1828.	794.93	
5	1.3824	609.97	783.28	-336.5	1111.1	
6	1.537	756.36	1033.9	819.2	1505.6	
7	1.4456	937.89	1364.8	1714.9	1965.7	

r1c8=258.

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Plot	EinSt	Zell	ÜbSchr	Calc	Div	Stat
DATN	Jahr	Anzahl	Hilfs...	Rate	exp.	
	c1	c2	c3	c4	c5	
6	5	1039.	676.	1.537	756.36	
7	6	1502.	1039.	1.4456	937.89	
8	7	2163.	1502.	1.4401	1163.	
9	8	2947.	2163.	1.3625	1442.1	
10	9	3364.	2947.	1.1415	1788.2	
11	10	3761.	3364.	1.118	2217.4	
12						

r12c1=

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Plot	EinSt	Zell	ÜbSchr	Calc	Div	Stat
DATN	Rate	exp.	exp.	besch...	logis...	
	c4	c5	c6	c7	c8	
6	1.537	756.36	1033.9	819.2	1505.6	
7	1.4456	937.89	1364.8	1714.9	1965.7	
8	1.4401	1163.	1801.5	2409.	2461.3	
9	1.3625	1442.1	2378.	2947.	2951.7	
10	1.1415	1788.2	3139.	3363.9	3397.8	
11	1.118	2217.4	4143.4	3687.	3773.7	
12						

r12c8=

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Zoom	Bearb	Alles	Zell	Stat	Rechnen...	
DATN:main\hand\pfin						
Plot: <input checked="" type="checkbox"/> x:c1 y:c2						
$y_1 = 258 \cdot (1.24)^x$						
$y_2 = 258 \cdot (1.32)^x$						
$y_3 = 4800 - 1853 \cdot (.775)^{x-8}$						
$y_4 = \frac{4800}{1 + 17.6 \cdot (.659)^x}$						

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Zoom	Spur	NeuZei	Math	Zchn		

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Algebra	Calc	Andere	PrgEA	LoGin		
<ul style="list-style-type: none"> y1(16) 8060.58697711 y2(16) 21918.0849208 y3(16) 4558.84901545 y4(16) 4695.44234991 						

y4(16)

Hinweise:

- Die Hilfsspalte c3 entsteht durch Kopieren von c2 und verschieben um eine Zelle nach unten: $c_3 = \text{shift}(c_2, -1)$. Damit können dann die jährlichen Steigerungsraten in c4 ($c_4 = c_2/c_3$) berechnet werden.
- Die Berechnung der Parameter kann mit dem solve-Befehl erfolgen.
- Bei Verwendung von 1990 und 1991 ergibt sich die Funktion $y_1(x)$ (gepunktete Linie).
- Bei Verwendung von 1990 und 1995 ergibt sich die Funktion $y_2(x)$.
- Die Funktion $y_3(x)$ beschreibt das beschränkte Wachstum.
- Der fett gezeichnete Graph ist die logistische Funktion $y_4(x)$, die für 2006 ($x = 16$) eine gute Näherung der tatsächlichen Anzahl liefert aber für die ersten Jahre zu hohe Werte ergibt.