**Spaß mit Mathe**

**Möglichkeiten zur Einbeziehung von**

**unterhaltsamen Aufgaben**

**in den Mathematikunterricht**

Zusammenstellung der Aufgaben und Lösungen:

Prof. Dr. Hans-Dieter Sill

Universität Rostock

Institut für Mathematik

Inhaltsverzeichnis

[1 Vorwort 2](#_Toc468894178)

[1. Mündliches Rechnen mit natürlichen Zahlen 3](#_Toc468894179)

[1.1 Finden von Rechnungen zu Ergebnissen 3](#_Toc468894180)

[1.1.1 Spiel 40 3](#_Toc468894181)

[1.1.2 Interessante Rechnungen mit nur einer Ziffer 4](#_Toc468894182)

[1.2 Rechenvorteile 6](#_Toc468894183)

[1.3 Bilden von Summen 11](#_Toc468894184)

[1.3.1 Bilden gleicher Summen 11](#_Toc468894185)

[1.3.2 Spröde Zahlen 12](#_Toc468894186)

[1.3.3 Partnertest 13](#_Toc468894187)

[1.4 Wer gehört nicht dazu? 14](#_Toc468894188)

[1.5 Kryptogramme 14](#_Toc468894189)

[1.6 Magische Figuren 16](#_Toc468894190)

[1.7 Trick zur Summe von Quadraten 17](#_Toc468894191)

[2 Schriftliches Rechnen mit natürlichen Zahlen 20](#_Toc468894192)

[2.1 Spaß mit der Lieblingszahl 20](#_Toc468894193)

[2.2 Kaprekarzahlen 21](#_Toc468894194)

[2.3 Kuriose Rechnungen 23](#_Toc468894195)

[3 Rechnen mit Dezimalbrüchen 24](#_Toc468894196)

[3.1 Phönixzahlen 24](#_Toc468894197)

[4 Arbeiten mit Variablen und Termen 27](#_Toc468894198)

[4.1 Rechnungen mit überraschenden Ergebnissen 27](#_Toc468894199)

[4.2 Mathematische Zaubereien – Erraten von Ergebnissen 29](#_Toc468894200)

[4.3 Mathematische Zaubereien – Erraten von gedachten Zahlen 31](#_Toc468894201)

[4.4 Wo liegt der Fehler? 33](#_Toc468894202)

# Vorwort

Es gibt eine fast unübersehbare Anzahl von populärwissenschaftlichen Büchern mit unterhaltsamen Aufgaben und interessanten Texten zu mathematischen Themen. Vieles davon ist durchaus für den „normalen“ Mathematikunterricht geeignet. Bei meinen zahlreichen Hospitationen im Unterricht habe ich es aber eher selten erlebt, dass dieses Potential genutzt wurde. Es ist ein erheblicher Aufwand erforderlich, um in der Literatur Aufgaben zu finden, die ein angemessenes Anforderungsniveau besitzen und in einer angemessenen Zeit bearbeitet werden können. Weiterhin fragen sich viele Lehrkräfte, wo sie die Zeit für unterhaltsame Aufgaben hernehmen sollen.

Mit dieser Aufgabensammlung sollen Lehrkräfte bei der Bewältigung der beiden Aufgaben unterstützt werden. Es wurden Aufgaben ausgewählt, die im normalen Unterricht von allen Schülerinnen und Schülern in den angegebenen Klassenstufen in meist kurzer Zeit bearbeitet werden können. Neben dem generellen Ziel, dass die Aufgaben Spaß machen sollen, wurden sie aber vor allem danach ausgewählt, welchen Beitrag sie zur Entwicklung des mathematischen Wissens und Könnens der Schülerinnen und Schülern leisten können. Deshalb sind die Aufgaben nach mathematischen Könnensbereichen geordnet und es werden jeweils die Lernziele angegeben, die mit ihnen zu erreichen sind.

Die Aufgaben lassen sich an verschiedenen Stellen im Unterricht einsetzen.

* Viele Aufgaben können in täglichen Übungen für ein abwechslungsreiches Kopfrechentraining eingesetzt werden.
* Viele Aufgaben sich auch in den normalen Lernprozess integrierbar.
* Eine weitere Möglichkeit besteht darin, die Aufgaben am Ende einer Stunde in 3 bis 5 Minuten als Belohnung für schnelles Arbeiten und gute Disziplin zu verwenden.

Ich bedanke mich bei den Teilnehmerinnen und Teilnehmern meiner Lehrveranstaltungen zur Elementarmathematik aus schulischer Sicht, die an der Zusammenstellung der Aufgabensammlung mitgewirkt haben sowie bei meiner Kollegin Petra Lämmel, die eine Durchsicht und Bearbeitung der Aufgaben und ihrer Lösungen vorgenommen hat.

Rostock, Dezember 2016

Hans-Dieter Sill

# Mündliches Rechnen mit natürlichen Zahlen

## Finden von Rechnungen zu Ergebnissen

### Spiel 40

**Einsatzmöglichkeiten:**

alle Klassenstufen in der Sekundarstufe I oder II

**Lernziele:**

* Entwicklung von Kopfrechenfertigkeiten zu allen Rechenarten
* Entwicklung der Fähigkeiten im Erkennen der Struktur von Termen
* Entwicklung der Freude am Kombinieren von Zahlen

**Besonderheiten der Aufgabe:**

Rechenspiel mit Wettkampfcharakter

**Benötigte Materialien:**

Würfelbecher mit vier Würfeln

**Spielanleitung:**

Es wird einmal mit vier Würfeln gewürfelt und die Ergebnisse werden angesagt.

Aus diesen 4 Zahlen soll mithilfe aller Rechenoperationen und von Klammern ein Term mit dem Wert 40 gebildet werden. Es dürfen nicht zwei Zahlen zu einer neuen zusammengefasst werden.

Außer den vier Grundrechenoperationen sind je nach Klassenstufe zugelassen: Potenzieren, Wurzelziehen, Logarithmieren sowie Fakultät und Binomialkoeffizient

Die genannten Ergebnisse werden an der Tafel nach Schüler-Diktat notiert.

**Mögliche Bewertungen:**

*Ohne Zeitvorgabe:*Der Erste, der eine richtige Lösung ansagt, erhält 2 Punkte.

Es kann auch der Zweite und Dritte noch einen Punkt erhalten.

*Mit Zeitvorgabe:*

Die Schüler erhalten 1 Minute Zeit. Danach erhält jeder, der einen richtigen Term gefunden hat, 2 Punkte.

*Generell gilt:*

Wird eine falsche Lösung angesagt, gibt es einen Minuspunkt.

Hat keiner die Zahl 40 erreicht, erhalten die, die am dichtesten an der Zahl 40 sind, einen Punkt.

***Lösungen***

**Generelle Hinweise:**

Aufgaben zur Vorbereitung auf das Spiel:

* Stelle 40 als Produkt (Summe, Differenz, Quotient) zweier Zahlen dar.
* Stelle 40 als Term mit vier natürlichen Zahlen von 1 bis 6 dar. Wiederholungen von Zahlen sind erlaubt.

Anhand dieser Aufgaben sollten folgende, oft verwendbare Zerlegungen der Zahl erkannt werden:

40 = 4 ∙ 10 = 5 ∙ 8 = 2 ∙ 4 ∙ 5 = 36 + 4 = 5 ∙ 7 + 5

Bereits in unteren Klassen kann als neuer Operator die Fakultät eingeführt werden. Es ist ausreichend, nur die Fakultäten bis zur Zahl 6 zu berechnen:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 3! = 6 | 4! = 24 | 5! = 120 | 6! = 720 |

Damit lässt sich folgende, oft verwendbare Zerlegung bilden: 40 =

Es gibt insgesamt 126 mögliche Würfelergebnisse. Zu einigen Ergebnissen kann man über 10 verschiedene Terme bilden. Es konnten bisher zu 22 Würfelergebnissen keine Terme gefunden werden.

**Beispiellösungen:**

|  |  |
| --- | --- |
| **1 1 1 1** | keine Möglichkeit |
| **2 2 2 2** | keine Möglichkeit |
| **3 3 3 3** | keine Möglichkeit |
| **4 4 4 4** | 4! + ⬝ ⬝ 4 = **40** |
| **5 5 5 5** | keine Möglichkeit |
| **6 6 6 6** | 6! : (6 + 6 + 6) = **40** |
| **1 2 3 5** | 2 ∙ 5 ∙ (1 + 3) = (32 – 1) ∙ 5 = 23 ∙ 5 ∙ 1 = (2 – 1) = 1 ∙ (3! + 2) ∙ 5 = = = ∙ 2 = ∙ (1 + 3) = **40** |
| **1 2 5 6** | 5(6 + 2) ∙ 1 = = = = = **40** |
| **1 2 6 6** | (6 – 1)∙(6 + 2) = (6 + 1) ⬝ 6 – 2 = : (2 + 1) = = **40** |
| **1 3 4 5** | 5 ∙ 4 ∙ (3 – 1) = (1 + 3) ∙ 5 ∙ = 5 ∙ (4 + 3 + 1) = = ∙ 4 ∙ 1 = **40** |
| **2 4 5 6** | 5(6 + 4 – 2) = 5 ∙ 2 ∙ (6 − ) = 4! + 2 ∙ 5 + 6 = (6 + 2) = = = **40** |
| **3 3 5 6** | = = ∙ = = **40** |
| **3 4 4 4** | (4 + 4) ∙ (3 + ) = ∙ 4∙ (3 + ) = = **40** |
| **4 5 6 6** | 5 ⬝ 6 + 4 + 6 = ⬝ 6 + 4 = = ∙ 6 + 4 = **40** |

### Interessante Rechnungen mit nur einer Ziffer

**Einsatzmöglichkeiten:**

* ab Klasse 5/6 mit Grundrechenarten und Wurzeln
* ab Klasse 9/10 mit Logarithmen

**Lernziele:**

* Entwicklung der Rechenfertigkeiten mit natürlichen Zahlen
* Entwicklung des Könnens im Strukturieren von Termen
* Freude an der Arbeit mit Zahlen und der Suche nach mehreren Lösungen

**Besonderheiten der Aufgabe:**

Es ist zu beachten, dass Schüler der Kl. 5/6 noch nicht in der Lage sind, alle Lösungen zu finden, da sie die Wurzeln, die Logarithmusfunktion und den Fakultätsbegriff noch nicht kennen. Da diese Themen in Klasse 9 behandelt werden, bieten sich diese Aufgaben noch einmal in den Jahrgängen 9/10 an.

**Aufgaben:**

1. Stelle die Zahlen von 1 bis 10 jeweils mit 4-mal der Ziffer 7 dar.   
   Es können auch mehrere Ziffern zu einer Zahl zusammengefasst werden.
2. Stelle die Zahl 6 dar mit
3. 3 Einsen
4. 3 Zweien
5. 3 Dreien
6. 3 Vieren
7. 3 Fünfen
8. 3 Sechsen
9. 3 Sieben
10. 3 Achten
11. 3 Neunen

Die Ziffern dürfen nicht zu einer Zahl zusammengefasst werden.

1. Stelle die Zahl 3 mit 12 Fünfen dar.  
   Es können auch mehrere Ziffern zu einer Zahl zusammengefasst werden.
2. Stelle die Zahl 10 mit 5 Dreien dar.

Es können auch mehrere Ziffern zu einer Zahl zusammengefasst werden.

***Lösungen:***

**1.**



**2.**



|  |  |
| --- | --- |
| **3.** | **4.** |

## Rechenvorteile

**Einsatzmöglichkeiten:**

ab Klasse 5

**Lernziele:**

* Festigung der Kopfrechenfertigkeiten im Multiplizieren und Addieren maximal zweistelliger Zahlen

**Rechenvorteil bei Aufgabe 1**

* nur anwendbar auf Multiplikation zweier Zahlen im Zahlenbereich 11 bis 19
* Zahlenbeispiele: 13 ∙ 15 = (13 + 5) ∙ 10 + 3 ∙ 5 = 180 + 15 = 195

17 ∙ 19 = (17 + 9) ∙ 10 + 7 ∙ 9 = 260 + 63 = 323

|  |  |
| --- | --- |
| * Begründung: (10 + a) ∙ (10 + b) | = 100 + 10a + 10b + ab |
|  | = (10 + a + b) ∙10 + ab |
|  | = ((10 + a) + b) ∙10 + ab |

**Rechenvorteil bei Aufgabe 2**

* Quadrieren von Zahlen, die eine fünf an der Einerstelle haben
* für alle betreffenden Zahlen anwendbar
* nur im Zahlenbereich 15 bis 195 für die Schule sinnvoll
* Zahlenbeispiele:

75² = 7 ∙ 8 ∙ 100 + 25 = 5625

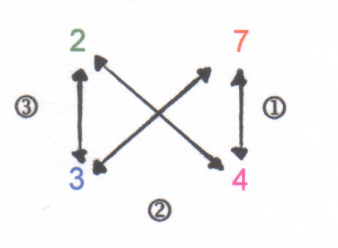
135² = 13 ∙ 14 ∙ 100 + 25 = 18225

* Begründung:

|  |  |
| --- | --- |
| (10a + 5)² | = 100a² + 100a + 25 |
|  | = (a² + a) ∙ 100 + 25 |
|  | = a∙(a + 1) ∙ 100 + 25 |

**Rechenvorteil bei Aufgabe 3**

* Verfahren der kreuzweisen Multiplikation zweistelliger Zahlen:
  1. beide Zahlen mit Zwischenraum untereinander schreiben (später nur in Gedanken)
  2. schrittweise rechnen (s. Beispiel) und immer letzte Ziffer hinschreiben
* Beispiel: 27 ∙ 34 = 918

① Multiplizieren der Einer:

7 ∙ 4 = 28, **8** hinschreiben, *2* als Übertrag merken

② Multiplizieren der Einer und Zehner(kreuzweise);   
 Addieren der Produkte und des Übertrags:

2 ∙ 4 + 3 ∙ 7 + *2* = 31, **1** hinschreiben, *3* als Übertrag merken

③ Multiplizieren der Zehner und Addieren des Übertrags:

2 ∙ 3 + *3* = **9**

**Rechenvorteile bei den Aufgaben 5 bis 10**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Multiplikation |  | Division |  |
| ∙ 5 | : 2 ∙ 10 | : 5 | : 10 ∙ 2 |
| ∙ 25 | : 4 ∙ 100 | : 25 | : 100 ∙ 4 |
| ∙ 125 | : 8 ∙ 1000 | : 125 | : 1000 ∙ 8 |

***Aufgaben***

**Aufgabe 1**

Multipliziere aus.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 13 ∙ 16 = |  | 11 ∙ 17 = |  | 12 ∙ 17 = |  |
| 11 ∙ 19 = |  | 19 ∙ 18 = |  | 18 ∙ 13 = |  |
| 13 ∙ 17 = |  | 14 ∙ 16 = |  | 15 ∙ 11 = |  |
| 14 ∙ 15 = |  | 13 ∙ 12 = |  | 16 ∙ 19 = |  |
| 12 ∙ 18 = |  | 17 ∙ 15 = |  | 11 ∙ 12 = |  |

**Aufgabe 2**

Berechne die Quadrate.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 35² = |  | 65² = |  | 145² = |  |
| 25² = |  | 115² = |  | 55² = |  |
| 15² = |  | 85² = |  | 135² = |  |
| 75² = |  | 45² = |  | 155² = |  |
| 95² = |  | 125² = |  | 195² = |  |

**Aufgabe 3**

Multipliziere kreuzweise.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 19 ∙ 33 = |  | 70 ∙ 53 = |  | 18 ∙ 91 = |  |
| 34 ∙ 61 = |  | 21 ∙ 65 = |  | 31 ∙ 33 = |  |
| 47 ∙ 17 = |  | 86 ∙ 14 = |  | 64 ∙ 22 = |  |
| 98 ∙ 85 = |  | 27 ∙ 77 = |  | 68 ∙ 74 = |  |
| 21 ∙ 12 = |  | 14 ∙ 63 = |  | 80 ∙ 71 = |  |

**Aufgabe 4**

Löse die Aufgaben. Verwende die Rechenvorteile aus Aufgabe 1 bis 3.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 24 ∙ 49 = |  | 135² = |  | 16 ∙ 19 = |  |
| 13 ∙ 17 = |  | 26 ∙ 74 = |  | 14 ∙ 94 = |  |
| 77 ∙ 28 = |  | 99 ∙ 11 = |  | 75² = |  |
| 37 ∙ 45 = |  | 29 ∙ 44 = |  | 73 ∙ 26 = |  |
| 95 ∙ 95 = |  | 17 ∙ 19 = |  | 53 ∙ 78 = |  |

**Aufgabe 5**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 44 ⬝ 5 = |  | 140 ∙ 50 = |  | 16 ∙ 50 = |  |
| 82 ∙ 50 = |  | 8 ∙ 25 = |  | 24 ∙ 250 = |  |
| 32 ∙ 25 = |  | 120 ∙ 250 = |  | 224 ∙ 5 = |  |
| 188 ∙ 50 = |  | 8 ∙ 125 = |  | 56 ∙ 125 = |  |

**Aufgabe 6**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 80 : 5 = |  | 145 : 5 = |  | 230 : 5 = |  |
| 825 : 5 = |  | 175 : 5 = |  | 780 : 5 = |  |

**Aufgabe 7**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 22 ⬝ 5 = |  | 48 ∙ 5 = |  | 5 ∙ 268 = |  |
| 26 ∙ 5 = |  | 135 : 5 = |  | 345 : 5 = |  |
| 640 : 5 = |  | 1350 : 5 = |  | 5 ∙ 240 = |  |
| 805 : 5 = |  | 128 : 5 = |  | 12350 : 5 = |  |
| 56 ∙ 5 = |  | 5 ∙ 98 = |  | 236 : 5 = |  |

**Aufgabe 8**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 12 ⬝ 25 = |  | 25 ∙ 16 = |  | 44 ∙ 25 = |  |
| 36 ∙ 25 = |  | 225 : 25 = |  | 1200 : 25 = |  |
| 3000 : 25 = |  | 5000 : 25 = |  | 28 ∙ 25 = |  |
| 1600 ∙ 5 = |  | 82 000 : 25 = |  | 325 000 : 25 = |  |
| 25 ∙ 36 = |  | 25 ∙ 1020 = |  | 76 000 : 25 = |  |

**Aufgabe 9**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 16 ⬝ 125 = |  | 88 ⬝ 125 = |  | 5000 : 125 = |  |
| 12 000 : 125 = |  | 120 ⬝ 125 = |  | 2500 : 125 = |  |

**Aufgabe 10**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 284 ⬝ 5 = |  | 345 : 5 = |  | 36,4 ∙ 0,5 = |  |
| 28,1 : 0,5 = |  | 88 ⬝ 25 = |  | 11,3 : 25 = |  |
| 56,4 ⬝ 0,25 = |  | 36 : 0,25 = |  | 124 ∙ 25 = |  |
| 72,6 ∙ 0,5 = |  | 17,4 : 0,5 = |  | 825 : 5 = |  |
| 27,2 ∙ 0,5 = |  | 775 : 25 = |  | 39,4 : 0,5 = |  |
| 14750 : 5 = |  | 220 000 : 25 = |  | 96 ⬝ 125 = |  |
| 7500 : 125 = |  | 39,4 : 0,5 = |  | 33 ∙ 25 = |  |

***Lösungen:***

**Aufgabe 1**

Multipliziere aus.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 13 ∙ 16 = | 208 | 11 ∙ 17 = | 187 | 12 ∙ 17 = | 204 |
| 11 ∙ 19 = | 209 | 19 ∙ 18 = | 342 | 18 ∙ 13 = | 234 |
| 13 ∙ 17 = | 221 | 14 ∙ 16 = | 224 | 15 ∙ 11 = | 165 |
| 14 ∙ 15 = | 210 | 13 ∙ 12 = | 156 | 16 ∙ 19 = | 304 |
| 12 ∙ 18 = | 216 | 17 ∙ 15 = | 255 | 11 ∙ 12 = | 132 |

**Aufgabe 2**

Berechne die Quadrate.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 35² = | 1225 | 65² = | 4225 | 145² = | 21025 |
| 25² = | 625 | 115² = | 13225 | 55² = | 3025 |
| 15² = | 225 | 85² = | 7225 | 135² = | 18225 |
| 75² = | 5625 | 45² = | 2025 | 155² = | 24025 |
| 95² = | 9025 | 125² = | 15625 | 195² = | 38025 |

**Aufgabe 3**

Multipliziere kreuzweise.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 19 ∙ 33 = | 627 | 70 ∙ 53 = | 3710 | 18 ∙ 91 = | 1638 |
| 34 ∙ 61 = | 2074 | 21 ∙ 65 = | 1365 | 31 ∙ 33 = | 1023 |
| 47 ∙ 17 = | 799 | 86 ∙ 14 = | 1204 | 64 ∙ 22 = | 1408 |
| 98 ∙ 85 = | 8330 | 27 ∙ 77 = | 2079 | 68 ∙ 74 = | 5032 |
| 21 ∙ 12 = | 252 | 14 ∙ 63 = | 882 | 80 ∙ 71 = | 5680 |

**Aufgabe 4**

Löse die Aufgaben. Verwende die Rechenvorteile aus Aufgabe 1 bis 3.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 24 ∙ 49 = | 1176 | 135² = | 18225 | 16 ∙ 19 = | 304 | 25 ∙ 64 = | 1600 |
| 13 ∙ 17 = | 221 | 26 ∙ 74 = | 1924 | 14 ∙ 94 = | 1316 | 65² = | 4225 |
| 77 ∙ 28 = | 2156 | 99 ∙ 11 = | 1089 | 75² = | 5625 | 12 ∙ 17 = | 204 |
| 37 ∙ 45 = | 1665 | 29 ∙ 44 = | 1276 | 73 ∙ 26 = | 1898 | 69 ∙ 41 = | 2829 |
| 95 ∙ 95 = | 9025 | 17 ∙ 19 = | 323 | 53 ∙ 78 = | 4134 | 52 ∙ 93 = | 4836 |

**Aufgabe 5**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 44 ⬝ 5 = | 220 | 140 ∙ 50 = | 7000 | 16 ∙ 50 = | 800 |
| 82 ∙ 50 = | 4100 | 8 ∙ 25 = | 200 | 24 ∙ 250 = | 6000 |
| 32 ∙ 25 = | 800 | 120 ∙ 250 = | 30 000 | 224 ∙ 5 = | 1120 |
| 188 ∙ 50 = | 9400 | 8 ∙ 125 = | 1000 | 56 ∙ 125 = | 7000 |

**Aufgabe 6**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 80 : 5 = | 16 | 145 : 5 = | 29 | 230 : 5 = | 46 |
| 825 : 5 = | 165 | 175 : 5 = | 35 | 780 : 5 = | 156 |

**Aufgabe 7**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 22 ⬝ 5 = | 110 | 48 ∙ 5 = | 240 | 5 ∙ 268 = | 1340 |
| 26 ∙ 5 = | 130 | 135 : 5 = | 27 | 345 : 5 = | 69 |
| 640 : 5 = | 128 | 1350 : 5 = | 270 | 5 ∙ 240 = | 1200 |
| 805 : 5 = | 161 | 128 : 5 = | 25,6 | 12350 : 5 = | 2470 |
| 56 ∙ 5 = | 280 | 5 ∙ 98 = | 490 | 236 : 5 = | 47,2 |

**Aufgabe 8**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 12 ⬝ 25 = | 300 | 25 ∙ 16 = | 400 | 44 ∙ 25 = | 1100 |
| 36 ∙ 25 = | 900 | 225 : 25 = | 9 | 1200 : 25 = | 48 |
| 3000 : 25 = | 120 | 5000 : 25 = | 200 | 28 ∙ 25 = | 700 |
| 1600 ∙ 5 = | 40 000 | 82 000 : 25 = | 3280 | 325 000 : 25 = | 13 000 |
| 25 ∙ 36 = | 900 | 25 ∙ 1020 = | 25500 | 76 000 : 25 = | 3040 |

**Aufgabe 9**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 16 ⬝ 125 = | 2000 | 88 ⬝ 125 = | 11 000 | 5000 : 125 = | 40 |
| 12 000 : 125 = | 96 | 120 ⬝ 125 = | 15 000 | 2500 : 125 = | 20 |

**Aufgabe 10**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 284 ⬝ 5 = | 1420 | 345 : 5 = | 69 | 36,4 ∙ 0,5 = | 18,2 |
| 28,1 : 0,5 = | 56,2 | 88 ⬝ 25 = | 2200 | 11,3 : 25 = | 0,452 |
| 56,4 ⬝ 0,25 = | 14,1 | 36 : 0,25 = | 144 | 124 ∙ 25 = | 3100 |
| 72,6 ∙ 0,5 = | 36,3 | 17,4 : 0,5 = | 34,8 | 825 : 5 = | 165 |
| 27,2 ∙ 0,5 = | 13,6 | 775 : 25 = | 31,00 | 39,4 : 0,5 = | 78,8 |
| 14750 : 5 = | 2950 | 220 000 : 25 = | 8800 | 96 ⬝ 125 = | 12 000 |
| 7500 : 125 = | 60 | 39,4 : 0,5 = | 78,8 | 33 ∙ 25 = | 825 |

## Bilden von Summen

### Bilden gleicher Summen

**Einsatzmöglichkeiten:**

Aufgabe 1 und 2 bereits in Grundschule, Aufgabe 3 nach Addition von Dezimalbrüchen

**Lernziele:**

* Entwicklung von Fertigkeiten im mündlichen Addieren maximal zweistelliger natürlicher und gebrochener Zahlen

***Aufgaben***

**Aufgabe 1**

Zerschneide die Zahlenkarten mit einem geraden Schnitt so, dass die Summe der Zahlen auf beiden Teilen gleich groß ist.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| |  |  | | --- | --- | | 7 | 3 | | 5 | 9 | | |  |  | | --- | --- | | 13 | 26 | | 25 | 14 | | |  |  |  | | --- | --- | --- | | 5 | 7 | 9 | | 2 | 6 | 11 | | |  |  |  | | --- | --- | --- | | 11 | 13 | 29 | | 15 | 17 | 21 | |

**Aufgabe 2**

Die Gutscheine sind so auf drei Personen zu verteilen, dass jeder den gleichen Geldbetrag erhält.

a) b)

Gutschein

14 €

Gutschein

13 €

Gutschein

8 €

Gutschein

25 €

Gutschein

15 €

Gutschein

10 €

Gutschein

35 €

Gutschein

50 €

Gutschein

18 €

Gutschein

17 €

Gutschein

35 €

Gutschein

45 €

**Aufgabe 3**

Wie kann man die folgenden Figuren mit einem geraden Schnitt so zerlegen, dass die Summen der Zahlen in beiden Teilen gleich sind?

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| |  |  | | --- | --- | | 48 | 35 | | 53 | 66 | | |  |  | | --- | --- | | 8,1 | 0,4 | | 0,6 | 7,9 | | 0,4 2,8  0,9  1,7 0,6  3,5  1,1 | 0,9  1,2  1,4  0,7 |

**Aufgabe 4**

Denke dir selbst ein Rechteck mit vier Zahlen aus, so dass beim Zerlegen mit einem geraden Schnitt die Summen der Zahlen in beiden Teilen gleich groß sind.

***Lösungen:***

1.

a) b) c) d)

|  |  |
| --- | --- |
| 7 | 3 |
| 5 | 9 |

|  |  |
| --- | --- |
| 13 | 26 |
| 25 | 14 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 5 | 7 | 9 |
| 2 | 6 | 11 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 11 | 13 | 29 |
| 15 | 17 | 21 |

a) 7 + 5 = 3 + 9 b) 13 + 26 = 25 + 14 c) 5 + 7 + 2 + 6 = 9 + 11 11 + 13 + 29 =15 + 17 + 21

2.

a) b)

Gutschein

25 €

Gutschein

14 €

Gutschein

13 €

Gutschein

8 €

Gutschein

15 €

Gutschein

10 €

Gutschein

35 €

Gutschein

18 €

Gutschein

17 €

Gutschein

50 €

Gutschein

45 €

Gutschein

35 €

a) 10 € + 60 € = 15 € + 45 € = 25 € + 35 € b) 8 € + 13 € + 14 € = 17 € + 18 € = 35 €

3. a) b) c) d)

|  |  |
| --- | --- |
| 48 | 35 |
| 53 | 66 |

|  |  |
| --- | --- |
| 8,15 | 0,41 |
| 0,64 | 7,92 |

0,9

1,2

1,4

0,7

0,4 2,8

0,9

1,7 0,6

3,5

1,1

3

a) 35 + 66 = 48 + 53 b) 8,15 + 0,41 = 0,64 + 7,92 c) 1,1 + 3,5 + 0,9 = 1,7 + 2,8 + 0,6 + 0,4

d) 1,4 + 0,7 = 0,9 + 1,2

### Spröde Zahlen

**Einsatzmöglichkeiten:**

AbKlasse 5, nach Addition von Dezimalbrüchen

**Lernziele:**

* Entwicklung der Kopfrechenfertigkeiten im Addieren und Subtrahieren von natürlichen Zahlen und Dezimalbrüchen

***Aufgabe***

Die Zahl einer Gruppe soll als „spröde“ bezeichnet werden, wenn sie sich nicht als Summe oder Differenz zweier anderer Zahlen der Gruppe darstellen lässt. Finde jeweils die „spröde“ Zahl.

Beispiel: 17; 5; 30; 13 (17 + 13 = 30) d. h. 5 ist spröde

1. 32; 8; 24; 28
2. 1,3; 2,3; 100; 98,7
3. 3,7; 8,1; 4,4; 3,6
4. 3,47; 1,39; 4,85; 2,08

***Lösung***

1. 32; 8; 24; **28** 28 ist spröde, denn 24 + 8 = 32
2. 1,3; **2,3**; 100; 98,7 2,3 ist spröde, denn 1,3 + 98,7 = 100
3. 3,7; 8,1; 4,4; **3,6** 3,6 ist spröde, denn 3,7 + 4,4 = 8,1
4. 3,47; 1,39; 4,85; 2,08 4,85 ist spröde, denn 1,39 + 2,08 = 3,47

### Partnertest

**Einsatzmöglichkeiten:**

AbKlasse 5

**Lernziele:**

* Entwicklung der Kopfrechenfertigkeiten im Addieren von bis zu zweistelliger Zahlen
* Freude am Rechnen mit Zahlen und an der eigenen Entwicklung eines Zahlentricks

***Aufgabe***

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 2 | 8 | 15 | 2 | 12 |
| 6 | 12 | 19 | 9 | 16 |
| 14 | 20 | 27 | 17 | 24 |
| 9 | 15 | 22 | 12 | 19 |
| 3 | 9 | 16 | 6 | 13 |

Zwei Schüler, die überprüfen wollen, ob sie zusammenpassen, suchen in dem Schema aus jeder Zeile und jeder Spalte genau eine Zahl heraus und addieren die 5 Zahlen.

Nach dem überraschenden Ergebnis versuchen die Schüler mit Hilfe des Lehrers, eine Erklärung dafür zu finden.

***Lösung***

Wenn die Schüler richtig addiert haben, erhalten beide das Ergebnis 66.

Das selbständige Finden einer Erklärung für dieses überraschende Ergebnis ist allerdings nur mit zielgerichteten Hinweisen des Lehrers möglich.

|  |  |
| --- | --- |
| 2 | 8 |
| 6 | 12 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 1 | 7 |
| 1 | 2 | 8 |
| 5 | 6 | 12 |

So könnte als erstes der Hinweis erfolgen, sich Vereinfachung zur zunächst ein Quadrat aus 2 x 2 Zahlen anzusehen, also z. B. das Quadrat oben links. Die Anwendung des Auswahlverfahrens ergibt 2 + 12 = 6 + 8 = 14. Dann muss sicher der Hinweis erfolgen, dass die Zahlen jeweils Summe von 2 Zahlen sind, die am Rand der Tabelle standen. Da sich die Zahl 2 nur als Summe 1 + 1 schreiben lässt, können die anderen Zahlen leicht gefunden werden:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 7 | 14 | 4 | 11 |
| 1 | 2 | 8 | 15 | 5 | 12 |
| 5 | 6 | 12 | 19 | 9 | 16 |
| 13 | 14 | 20 | 27 | 17 | 24 |
| 8 | 9 | 15 | 22 | 12 | 19 |
| 2 | 3 | 9 | 16 | 6 | 13 |

Nun können die Schüler auch die übrigen Zahlen an den Rändern finden und erhalten:

Als Lösung des Zahlentricks ergibt sich damit:

Man sucht 10 Zahlen, deren Summe 66 ergibt. Diese 10 Zahlen teilt in zwei Gruppen zu je 5 Zahlen auf berechnet daraus ein Additionstabelle. Wenn aus dieser Tabelle aus jeder Zeile und jeder Spalte genau eine Zahl ausgewählt wird und diese 5 Zahlen addiert werden, ergibt sich wieder die Summe aller 10 Zahlen.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 7 | 14 | 4 | 11 |
| 1 | 2 | 8 | 15 | 5 | 12 |
| 5 | 6 | 12 | 19 | 9 | 16 |
| 13 | 14 | 20 | 27 | 17 | 24 |
| 8 | 9 | 15 | 22 | 12 | 19 |
| 2 | 3 | 9 | 16 | 6 | 13 |

Beispiel:

66 = 1 + 7 + 14 + 4 + 11 + 1 + 5 + 13 + 8 + 2

5 + 12 + 27 + 19 + 3 =

(1 + 4) + (5 + 7) + (13 + 14) + (11 + 8) + (1 + 2) = 66

## Wer gehört nicht dazu?

**Einsatzmöglichkeiten:**

AbKlasse 6, nach Behandlung der Teilbarkeit

**Lernziele:**

* Schulung des logischen Denkens, insbesondere zur Negation von Aussagen
* Entwicklung der Kopfrechenfertigkeiten im Multiplizieren natürlicher Zahlen durch Zerlegen von Zahlen bis 100

***Aufgabe***

Fünf Zahlen haben jeweils eine gemeinsame Eigenschaft bezüglich der Teilbarkeit. Gib diese Eigenschaft an und nenne die Zahl, die diese Eigenschaft nicht hat.

* 1. {4; 8; 24; 33; 42; 44}
  2. {15; 25; 40; 50; 60; 72}
  3. {7; 14; 28; 49; 57; 98}
  4. {12; 24; 32; 42; 66; 90}
  5. {13; 19; 21; 28; 49; 97}
  6. {16; 25; 27; 49; 64; 81}

1. {7; 11; 13; 19; 21; 23}
2. {26; 65; 79; 130; 143; 169}

***Lösung:***

Es gibt mehrere zutreffende Antworten. Es sind jeweils nur 2 angegeben.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Mögliche Antworten (gemeinsame Eigenschaft; Zahl) | |
| 1. {4; 8; 24; 33; 42; 44} | durch 2 teilbar; 33 | nicht durch 12 teilbar; 24 |
| 1. {15; 25; 40; 50; 60; 72} | durch 5 teilbar; 72 | nicht durch 9 teilbar; 72 |
| 1. {7; 14; 28; 49; 57; 98} | durch 7 teilbar; 57 | nicht durch 4 teilbar; 28 |
| 1. {12; 24; 32; 42; 66; 90} | durch 6 teilbar; 32 | nicht durch 11 teilbar; 66 |
| 1. {13; 19; 21; 28; 49; 97} | nicht durch 2 teilbar; 28 | nur in 2 Faktoren zerlegbar; 28 |
| 1. {16; 25; 27; 49; 64; 81} | Quadratzahl; 27 | nicht durch 5 teilbar; 25 |
| 1. {7; 11; 13; 19; 21; 23} | nicht in Faktoren zerlegbar; 21 | nicht durch 3 teilbar; 21 |
| 1. {26; 65; 79; 130; 143; 169} | durch 13 teilbar, 79 | in Faktoren zerlegbar; 79 |

## Kryptogramme

**Einsatzmöglichkeiten:**

AbKlasse 5

**Lernziele:**

* Festigung der Kopfrechenfertigkeiten mit natürlichen Zahlen
* Festigung der Eigenschaften von Rechenoperationen
* Lösen von Aufgaben durch Probieren

**Hinweise zu den Aufgaben:**

Ein Kryptogramm besteht aus einer oder aus mehreren Gleichungen, in denen alle oder einige Ziffern oder auch Operationszeichen fehlen. Die fehlenden Ziffern oder Operationszeichen sind durch Zeichen (Buchstaben oder Figuren) ersetzt. Für diese Zeichen sind Ziffern so einzusetzen, dass die im Kryptogramm enthaltenen Gleichungen alle richtig sind. Dabei gilt, dass gleiche Zeichen für gleiche Ziffern stehen.

Man benötigt keine speziellen Methoden für das Entschlüsseln von Kryptogrammen. Wer die Grundrechenarten beherrscht, kann sie lösen. Es gibt keinen allgemeinen Lösungsweg, man muss sich für jedes Rätsel eine neue Strategie überlegen. Man kommt mit einer Kombination aus Probieren und logischem Schließen zum Ziel.

Kryptogramme sind meist sehr anspruchsvoll, die folgenden Beispielen können aber leicht im Kopf gelöst werden.

**Aufgaben:**

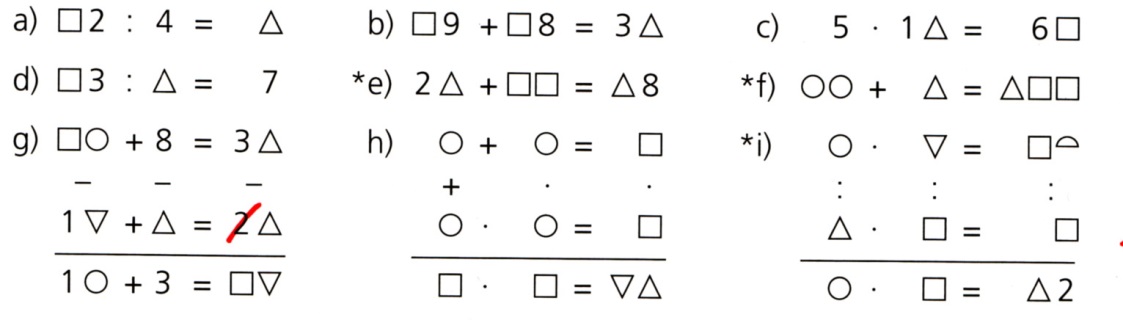
1. Löse die folgenden Kryptogramme. Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Ziffern.
2. AA + B = BCC
3. AA ⋅ ABA = AAAA
4. AB − BA = A
5. Setze für 🞏 jeweils ein Operationszeichen ein, so dass eine wahre Aussage entsteht.
   1. 35 🞏 10 🞏 7 = 52
   2. 75 🞏 25 🞏 0 = 50
   3. (1 🞏 0) 🞏 1 = 0
   4. (8 🞏 6) 🞏 2 = 1
6. Setze in den Gleichungen für a, b, c eine der Zahlen 2, 3, 4 oder 6 ein, so dass wahre Aussagen entstehen. Die Zahlen a, b, c sollen stets verschieden sein.

a) a − b − c = 0 e) a − b + c = 5

b) a + b − c = 1 f) a + b − c = 7

c) a + b − c = 3 g) a + b − c = 8

d) a + b − c = 4 h) a + b + c = 9

1. Setze für die Zeichen eine der Zahlen 0 bis 9 ein. Gleiche Zeichen bedeuten gleiche Zahlen, verschiedene Zeichen bedeuten verschiedene Zahlen.

1

***Lösungen***

1. 2.
2. 99 + 1 = 100 a) 35 + 10 + 7 = 52
3. 11 ⋅ 101 = 1111 b) 75 − 25 + 0 = 50
4. 98 – 89 = 9 c) (1  0)  1 = 0

d) (8 − 6) : 2 = 1

3.

a) 6 − 4 − 2 = 0 e) 4 − 2 + 3 = 5

b) 3 + 4 − 6 = 1 f) 6 + 4 − 3 = 7

c) 2 + 4 − 3 = 3 g) 6 + 4 − 2 = 8

d) 6 + 2 − 4 = 4 h) 2 + 3 + 4 = 9

4. a) 32 : 4 = 8 b) 19 + 18 = 37 c) 5  12 = 60

d) 63 : 9 = 7 \*e) 25 + 33 = 58 \*f) 99 + 1 = 100

g) 27 + 8 = 35 h) 2 + 2 = 4 \*i) 4  9 = 36

− − − +     

10 + 5 = 15 2  2 = 4 1  3 = 3

17 + 3 = 20 4  4 = 16 4  3 = 12

## Magische Figuren

**Einsatzmöglichkeiten:**

AbKlasse 5

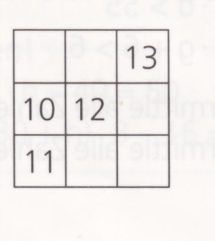
**Lernziele:**

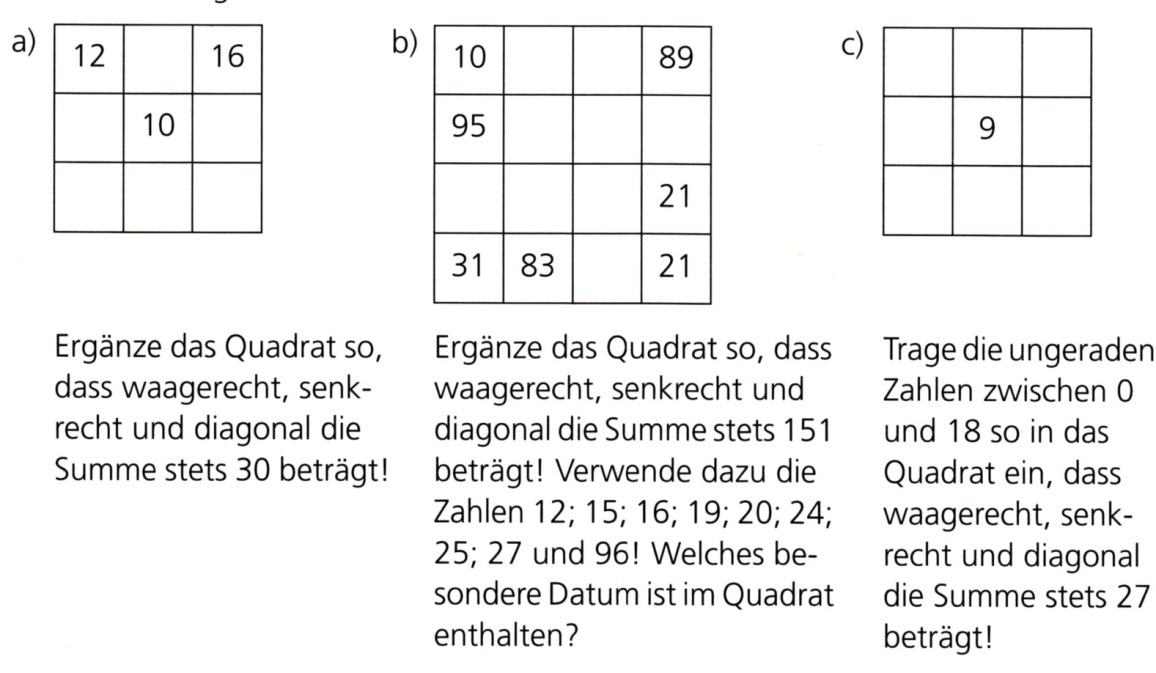
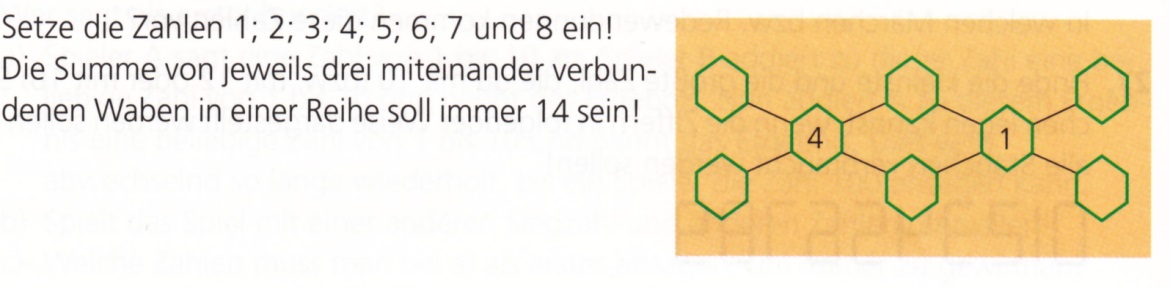
* Festigung der Kopfrechenfertigkeiten mit natürlichen Zahlen
* Festigung der Eigenschaften von Rechenoperationen
* Lösen von Aufgaben durch Probieren

***Aufgaben***



1. Verteile die Zahlen 4, 5, 6, 7, 8, 9 so auf die Seiten des Dreiecks, so dass die Summe der Zahlen an jeder Seite 17 ergibt.



1. Wenn in einem Quadrat aus Zahlen die Summen in den Spalten, Zeilen und Diagonalen immer gleich sind, spricht man von einem „magischen“ Quadrat.  
   Welche Zahlen fehlen, damit sich ein magisches Quadrat ergibt?
2. Ergänze die magischen Quadrate.
3. 

***Lösungen***

1.

**4**

**9**

**7**

**5**

**6**

**8**

**7**

**6**

**8**

**4**

**5**

**9**

2.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 15 | 8 | 13 |
| 10 | 12 | 14 |
| 11 | 16 | 9 |

3. a) b) c)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 12 | 2 | 16 |
| 14 | 10 | 6 |
| 4 | 18 | 8 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 10 | 25 | 27 | 89 |
| 95 | 24 | 12 | 20 |
| 15 | 19 | 96 | 21 |
| 31 | 83 | 16 | 21 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 3 | 17 | 7 |
| 13 | 9 | 5 |
| 11 | 1 | 15 |

4. Die Zahlen lauten von links nach rechts:

2 7 5

4 1

3 8 6

## Trick zur Summe von Quadraten

**Einsatzmöglichkeiten:**

In Klasse 5 werden Potenzen und im Speziellen auch Quadratzahlen besprochen. Als Einführung in dieses Stoffgebiet lässt sich der Trick gut verwenden, denn zur Durchführung werden lediglich Berechnungen der Quadratzahlen im kleinen Einmaleins benötigt.

Außerdem kann der Trick jederzeit als Übung des Kopfrechnens herangezogen werden, besonders wenn überprüft werden soll, ob es für jede Zahl zwischen 1 und 200 funktioniert.

**Lernziele:**

* Berechnungen der Quadratzahlen von 1 bis 10
* Kopfrechenübungen
* Addieren zweier zweistelliger Zahlen im Kopf
* Üben des systematischen Probierens
* Erkennen von Zahlenmustern

**Besonderheiten der Aufgabe:**

Aufgaben mit überraschendem Ergebnis, Zaubertrick

**Benötigte Materialien:**

ein beliebiges Buch

**Der Trick**

Der Vorführende behauptet, von einem Buch mit über 200 Seiten, das erste Wort auf jeder Seite auswendig zu wissen. Er bittet einen der Zuschauer, sich eine beliebige Zahl zwischen 1 und 200 zu denken. Von dieser Zahl soll er im Kopf die Summe der Quadrate der einzelnen Ziffern bilden und die so ent­standene neue Zahl seinem Nebenmann ins Ohr flüstern. Dieser hat erneut von allen Ziffern der genannten Zahl die Quadrate zu bilden, sie zu addieren und die Summe seinem Nachbarn zuzu­flüstern.

Da beim Erreichen der Zahl 1 der Prozess des Bildens neuer Zahlen abbrechen würde, soll derjenige, dem eine 1 zugeflüstert wird, die Zahl 2 weitergeben. Nachdem mindestens 10 Zuschauer an dieser Aktion beteiligt waren, kann einer (oder auch mehrere nach ihm folgende) seine gebildete Zahl laut bekannt geben und der "Ge­dächtniskünstler" nennt sofort das erste Wort der entsprechenden Seite.

***Aufgaben***

1. Untersuche alle Zahlen von 1 bis 200 mit dieser Vorschrift auf systematische Weise.   
   Was stellst du fest?
2. Erkläre mit den Ergebnissen von a) den Zaubertrick.

***Lösung***

Die Lösung kann durch *systematisches Probieren* gefunden werden. Die Anzahl der Fälle mit zunächst 200 zu betrachten­den Zahlen ist recht umfangreich, deshalb sollte man sich um ein ratio­nelles Aufschreiben bemühen und stets überlegen, ob sich die Anzahl der Fälle reduzieren lässt. Man probiert zunächst die Zahlen von 2 bis 9 systematisch durch und erhält die folgenden Zahlenketten.

2 ‑ 4 ‑ 16 ‑ 37 ‑ 58 ‑ 89 ‑ 145 ‑ 42 ‑ 20 ‑ 4 ‑ 16 ‑ ...

3 ‑ 9 ‑ 81 ‑ 65 ‑ 61 ‑ 37 ‑ 58 ‑ ...

4 ‑ 16 ‑ ...

5 ‑ 25 ‑ 29 ‑ 85 ‑ 89 ‑ ...

6 ‑ 36 ‑ 45 ‑ 41 ‑ 17 ‑ 50 ‑ 25 ‑ 29 ‑ 85 ‑ 89 ‑ ...

7 ‑ 49 ‑ 97 ‑ 130 ‑ 10 ‑ 1 ‑ 2 ‑ 4 ‑ ...

8 ‑ 64 ‑ 52 ‑ 29 ‑ 85 ‑ 89 ‑ ...

9 ‑ 81 ‑ 65 ‑ 61 ‑ 37 ‑ ...

Zu erkennen ist, dass man stets in den Zyklus der 8 Zahlen 4; 16, 37, 58; 89; 145; 42 und 20 gelangt. Sofern diese Regel für alle Zahlen von 1 bis 200 gilt ist der Trick gefunden. Der Künstler kennt also nicht die ersten Worte aller Seiten, sondern nur die dieser 8 Seiten.

Damit ist klar, dass der Trick ergiebiger ist als manch anderer, denn man kann ihn mehrmals durchführen, ohne ihn sofort zu durchschauen, da man ja nicht immer bei derselben Zahl landet. Allerdings muss man um sicherzugehen sämtliche Zahlen zwischen 1 und 200 überprüfen, wobei es keine allgemeine Vorschrift zur Kontrolle gibt. Das ist eine Fleißarbeit, die man nicht unbedingt im normalen Unterricht machen sollte, es sei denn man bespricht einen Lösungsweg und verteilt die Aufgaben in der Klasse. Hierzu kann man eine Tabelle anlegen, in der getestete Zahlen nur abgehakt werden:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 0 |  | v | v | v | v | v | v | v | V | v |
| 1 | v |  |  |  |  |  | v | v |  |  |
| 2 | v |  |  |  |  | v |  |  |  | v |
| 3 |  |  |  |  |  |  | v | v |  |  |
| 4 |  |  | v |  |  |  |  |  |  | v |
| 5 | v |  | v |  |  |  |  |  | V |  |
| 6 |  | v |  |  | v | v |  |  |  |  |
| 7 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 8 |  | v |  |  |  | v |  |  |  | v |
| 9 |  |  |  |  |  |  |  | v |  |  |
| 10 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 11 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 12 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 13 | v |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 14 |  |  |  |  |  | v |  |  |  |  |
| 15 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 16 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 17 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 18 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 19 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Als effizientes Vorgehen können die Schüler sich folgende Punkte überlegen:

* Alle in den überprüften 8 Zahlenfolgen schon vorgekommenen Zahlen können bereits abgehakt werden.
* Da 16 in der Summe der Quadrate ihrer Ziffern das gleiche ergibt wie 61 können zusätzlich Zahlen als getestet angesehen werden, die die gleichen Ziffern haben. Damit brauchen nur Zahlen auf und oberhalb einer Diagonalen getestet werden. (s. u. für Zahlen größer 100)
* Nun werden die restlichen Zahlen untersucht und es sind jeweils 2 Zahlen abstreichbar. Dabei ist es nur notwendig auf irgendeine bekannte Zahl zu stoßen, z.B. folgt aus 14 die 17 und diese ist abgehakt. Oft genügt ein Schritt, aber in anderen Fällen sollten die Zahlenfolgen unbedingt mitnotiert werden, da dabei bisher unbekannte Zahlen auftauchen, die ebenfalls sofort in der Tabelle markiert werden können, z.B. 19 - 82 - 68 - 100 - 1 - 2 - … )
* Will man sich die Arbeit teilen, sollte man genau darauf achten wie man teilt, damit genannte Vorteile nicht verloren gehen.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 11 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 12 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 13 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 14 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 15 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 16 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 17 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 18 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 19 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

So ist die Überprüfung der vielen Zahlen in relativ kurzer Zeit und nur mit Hilfe vom Kopfrechnen zu bewältigen. Allerdings müssen die Lösungsstrategien im Vorhinein besprochen werden, was Zeit kostet, aber im Rahmen eines Exkurses zu vorteilhaftem Arbeiten möglich wäre.

# Schriftliches Rechnen mit natürlichen Zahlen

## Spaß mit der Lieblingszahl

**Einsatzmöglichkeiten:**

Klasse 5/6, schriftliche Multiplikation

**Lernziele:**

* Entwicklung der Freude am Umgang mit Zahlen und an der Suche nach Gesetzmäßigkeiten in Zahlenmustern
* Entwicklung der Rechenfertigkeiten und des Verfahrens der schriftlichen Multiplikation

**Besonderheiten der Aufgabe:**

Aufgabe mit einem überraschenden Ergebnis

**Benötigte Materialien:**

Arbeitsblatt für die Lieblingszahl und die Lösungen

***Aufgaben***

*Für alle Aufgaben:*

Von den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ist meine **Lieblingszahl**: \_\_\_

Versuche nach jeder Rechnung eine Begründung für das überraschende Ergebnis zu finden.

**Aufgabe 1**

Multipliziere deine Lieblingszahl mit 3, anschließend mit 37 und nenne mir das Ergebnis dieser Aufgabe. Ich sage dir dann, welche Lieblingszahl du dir gedacht hast.

**Aufgabe 2**

Ich möchte, dass du dir eine einstellige Zahl denkst, die du dann mit 41 und dann noch mit 271 multiplizierst. Sage mir das Ergebnis und ich rate dann deine gedacht einstellige Zahl.

**Aufgabe 3**

Denke dir eine einstellige Zahl, multipliziere sie mit 273 und dann mit 407. Nenne mir das Ergebnis und ich sage dir, welche Zahl du dir gedacht hast.

**Aufgabe 4**

Fast jeder Mensch hat eine Lieblingszahl. Durch eine einfache Rechenoperation könnte ich die Lieblingszahl z. B. eines Freundes vervielfachen.

Denke dir eine einstellige Lieblingszahl, schreibe die Zahl 12345679 auf einen Zettel, multipliziere sie anschließend mit 9 und dann mit der gedachten Lieblingszahl und nenne mir das Ergebnis.

***Lösungen***

**Aufgabe 1**

Der Trick dieser Aufgabe besteht darin zu erkennen, dass 3⬝ 37 = 111 ergibt.

Das Vielfache von 111 ergibt die Lieblingszahl.

Beispiel: genannte Zahl 888 = 111 ⬝ 8   
8 ist gedachte Zahl

**Aufgabe 2**

Das Verfahren ist analog zur ersten Aufgabe, nur dass das Ergebnis von 41⬝ 271 = 11111 ist.

Das Vielfache von 11 111 ergibt die Lieblingszahl.

Beispiel: genannte Zahl 44 444 = 11 111 ⬝ 4  
4 ist gedachte Zahl

**Aufgabe 3**

Das Ergebnis von 273 ⬝ 407 = 111 111.

Beispiel: 333 333 = 111 111 ⬝ 3  
3 ist gedachte Zahl

**Aufgabe 4**

Man schreibt auf einen Zettel zunächst die Zahl 1 2 3 4 5 6 7 9. Wichtig ist, dass die 8 fehlt!

Beispiel: Lieblingszahl 4

4 ⬝ 9 ⬝ 12345679 = 444444444

Die Lieblingszahl erscheint nun in neunfacher Ausfertigung.

Einsatz als Spiel: Erraten der Lieblingszahl oder Üben des sauberen Schreibens einer besonders undeutlich geschriebenen Zahl von 1 bis 9 (8 ist ausgeschlossen)

**Weiterführende Frage:**

Gibt es auch einen Trick mit folgenden Zahlen:

1. 1111 (11 · 101)
2. 1 111 111 (239 · 4649)
3. 11 111 111 111 (11 · 73 · 101 · 137)

## Kaprekarzahlen

**Einsatzmöglichkeiten:**

* ab Klasse 5/6, schriftliche Subtraktion mit großen Zahlen
* Beweisaufgabe ab Klasse 8

**Lernziele:**

* Entwicklung der Freude am Umgang mit Zahlen und an der Suche nach Gesetzmäßigkeiten in Zahlenmustern
* Entwicklung der Rechenfertigkeiten und des Verfahrens der schriftlichen Subtraktion

**Besonderheiten der Aufgabe:**

Aufgaben mit einem überraschenden Ergebnis

**Hinweise zur Aufgabe**

Kaprekarzahlen beschreiben eine interessante Eigenschaft von Zahlen. Sie wurden im Jahr 1949 von dem indischen Mathematiker Shri Dattathreya Ramachandra Kaprekar, 1905-1986 entdeckt und lassen sich durch fortgesetzte Subtraktionen finden.

**Wie findet man Kaprekarzahlen?**

Man nehme eine beliebige Zahl, bei der nicht alle Ziffern gleich sind und ordne die Ziffern der Größe nach absteigend. Von der so entstehenden Zahl subtrahiere man die Zahl, die bei aufsteigender Anordnung der Ziffern entsteht. Mit der neuen Zahl wird die Rechnung so lange wiederholt, bis sich nach der Subtraktion wieder die vorherige Zahl ergibt. Dies ist dann eine Kaprekarzahl.  
Ergibt sich als Differenz eine Zahl mit weniger Ziffern als die Ausgangszahl, werden für die fehlenden Ziffern Nullen verwendet.

*Beispiele:*

1) geg.: 123 2) geg.: 2405

größte Zahl: 321 größte Zahl: 5420

kleinste Zahl: 123 kleinste Zahl: 0245

321 – 123 = 198 5420 – 0245 = 5175

981 – 189 = 792 7551 – 1557 = 5994

***Aufgaben***

**Ab Klasse 5:**

1. Beginne mit einer beliebigen dreistelligen Zahl und führe die fortgesetzte Subtraktion so lange durch, bis sich die Zahl nicht mehr ändert.  
   Probieren auch mit anderen dreistelligen Zahlen.
2. Beginne mit einer beliebigen vierstelligen Zahl und führe die fortgesetzte Subtraktion so lange durch, bis sich die Zahl nicht mehr ändert.  
   Probieren auch mit anderen vierstelligen Zahlen.
3. Untersuche, ob es auch zweistellige Kaprekarzahlen gibt.
4. Untersuche, ob es auch fünfstellige Kaprekarzahlen gibt.

**Ab Klasse 8:**

1. Begründe, dass es genau eine dreistellige Kaprekarzahl gibt.

***Lösungen***

**Aufgaben 1 und 2**

1. Ausgangszahl: 123 2. Ausgangszahl: 2405

321 – 123 = 198 5420 – 0245 = 5175

981 – 189 = 792 7551 – 1557 = 5994

972 – 279 = 693 9954 – 4599 = 5355

963 – 369 = 5945553 – 3555 = 1998

954 – 459 =495 9981 – 1899 = 8082

8820 – 0288 = 8532

8532 – 2358 =6174

**Aufgabe 3**

Zweistellige Startzahlen führen in den Zyklus 09, 81, 63, 27, 45, 09, ...

**Aufgabe 4**

Fünfstellige Startzahlen führen in die Zyklen

53955, 59994

oder 63954, 61974, 82962, 75933, 63954, ...

oder 83952, 74943, 62964, 71973, 83952, ...

**Aufgabe 5**

*Voraussetzung:* dreistellige Zahl abc gegeben, mit den Ziffern a ≠ b ≠ c und a < b < c

Bildungsvorschrift für Kaprekarzahlen: cba – abc = def

*Behauptung:* Es existiert genau eine Kaprekarzahl:

*Beweis:*

Variante I: 100a + 10b + c – (100c + 10b + a) = 99(a – c)

da a ≠ c gibt es folgende 9 Ergebnisse für a – c = 1, 2, 3, …. 9

mit 99(a – c) ergeben sich folgende dreistellige Zahlen.

198; 297; 396; 495; 594; 693; 792; 891

Einzelprüfungen ergeben immer die Kaprekarzahl 495

Variante II: a b c mit a > b > c

− c b a

a – (c + 1) 9 10 + c − a

→ Eine Ziffer muss 9 sein. Dies kann nur a sein, da a die größte Ziffer ist.

→ Ergebnis hat die Ziffern d = 8 – c e = 9 und f = 1 + c

Die erste oder letzte Ziffer muss wieder c oder b sein

1. Fall: 8 – c = c und 1 + c = b → c = 4 und b = 5

2. Fall: 8 – c = b und 1 + c = c → Wid.

## Kuriose Rechnungen

**Einsatzmöglichkeiten:**

* ab Klasse 5/6, schriftliches Rechnen mit natürlichen Zahlen

**Ler**n**ziele:**

* Festigung der Fertigkeiten im mündlichen und schriftlichen Rechnen mit natürlichen Zahlen
* Entwicklung der Freude am Umgang mit Zahlen sowie an der Suche nach Gesetzmäßigkeiten in Zahlenmustern

**Aufgaben:**

1. Berechne und suche nach Zusammenhängen der Zahlen oder Ziffern in der Aufgabe.
2. 1738 ∙ 4 =
3. 186 ∙ 39 =
4. 198 ∙ 27 =
5. Berechnen und suche nach Besonderheiten der Zahlen oder Ziffern in der Aufgabe.
6. 35853² =
7. 84648² =
8. 121² =
9. 11² =
10. 111² =
11. 1111² =
12. 11111² =
13. 83 =
14. Berechne und vergleiche, suche nach Besonderheiten und Mustern.
    1. 9 + 9 und 9 · 9
    2. 47 + 2 und 47 · 2
    3. 24 + 3 und 24 · 3
    4. 497 + 2 und 497 · 2
    5. 12 ∙ 42 und 21 ∙ 24
    6. 24 ∙ 84 und 42 ∙ 48
    7. 12² und 21²
    8. 13² und 31²
15. Berechne und vergleiche, suche nach Besonderheiten und Mustern.   
    Findest du weitere Rechnungen dieser Art?
16. 95 : 5 und 9 + 5 + 5
17. 36 : 3 und 3 + 6 + 3
18. 35 : 7 und 3 – 5 + 7
19. 72 : 4 und 7 · 2 + 4
20. 45 : 15 und 4 – 5 – 1 + 5
21. 121 : 11 und 12 – 1 + 1 – 1
22. Schreibe hinter eine beliebige dreistellige Zahl die gleiche Zahl noch einmal, sodass eine sechsstellige Zahl entsteht. Dividiere diese Zahl durch 7, dann das Ergebnis durch 11 und das dann erhaltene Ergebnis durch 13. Was stellst du fest?   
    Suche nach einer Erklärung für das überraschende Ergebnis.

***Lösungen***

1. 1738 ∙ 4 = 6952
2. 186 ∙ 39 = 7254
3. 198 ∙ 27 = 5346

Besonderheiten: In jeder Aufgabe treten die Ziffern von 1 bis 9 jeweils genau einmal auf.

1. 35853² = 1285437609 Im Ergebnis treten alle Ziffern von 0 bis 9 genau einmal auf.
2. 84648² = 7165283904 Im Ergebnis treten alle Ziffern von 0 bis 9 genau einmal auf.
3. 121² = 14641 Das Ergebnis ist eine Spiegelzahl.
4. 11² = 121 Das Ergebnis ist eine Spiegelzahl.
5. 111² = 12321 Das Ergebnis ist eine Spiegelzahl.
6. 1111² = 1234321 Das Ergebnis ist eine Spiegelzahl.
7. 11111² = 123454321 Das Ergebnis ist eine Spiegelzahl.
8. 83 = 512 8 ist die Quersumme der Kubikzahl 512.
   1. 9 + 9 und 9 · 9
   2. 47 + 2 und 47 · 2
   3. 24 + 3 und 24 · 3 Die Ergebnisse haben vertauschte Ziffernfolgen.
   4. 497 + 2 und 497 · 2
   5. 12² und 21²
   6. 13² und 31²
   7. 12 ∙ 42 und 21 ∙ 24 Die Ziffern in der Aufgaben sind vertauscht, die Ergebnisse sind gleich.
   8. 24 ∙ 84 und 42 ∙ 48 Die Ziffern in der Aufgaben sind vertauscht, die Ergebnisse sind gleich.
9. 95 : 5 und 9 + 5 + 5
10. 36 : 3 und 3 + 6 + 3
11. 35 : 7 und 3 – 5 + 7 Die Reihenfolgen der Ziffern in den Aufgaben sind gleich.
12. 72 : 4 und 7 · 2 + 4 Die Ergebnisse sind gleich.
13. 45 : 15 und 4 – 5 – 1 + 5 Als Zwischenergebnisse treten auch negative Zahlen auf.
14. 121 : 11 und 12 – 1 + 1 – 1

Weitere Beispiele:

2 + 2 = 2 · 2 = 4; 12 : 4 = 1 − 2 + 4 = 3; 25 : 5 = 2 · 5 – 5 = 5

1. Es ist 7 ∙ 11 ∙ 13 = 1001 und abc ∙ 1001 = abc abc.

# Rechnen mit Dezimalbrüchen

## Phönixzahlen

**Einsatzmöglichkeiten:**

abKlasse 6 nach Behandlung der periodischen Dezimalbrüche

**Lernziele:**

* Entwicklung der Freude am Umgang mit Zahlen und an der Suche nach Gesetzmäßigkeiten in Zahlenmustern
* Entwicklung der Rechenfertigkeiten, insbesondere zum Verfahrens der schriftlichen Multiplikation
* Umwandeln von gemeinen Brüchen in periodische Dezimalbrüche durch schriftliche Division

**Benötigte Materialien:**

Es sollten Papierstreifen mit den 6-, 16- und 18-stelligen Phönixzahlen für den Lehrer und für Schüler bereitgestellt werden.

***Aufgaben***

**Aufgabe 1:**

1. Es gibt Zahlen mit einer ganz besonderen Eigenschaft, auf Grund derer sie den Namen „Phönixzahlen“ erhielten. Phönix ist ein Vogel in der griechischen Mythologie.  
   Die kleinste Phönixzahl ist 142 857. Multipliziere diese Zahl mit den Zahlen 2, 3, 4, 5, 6 und 7 und versuche Besonderheiten in den Ergebnisse zu erkennen.
2. Finde die Geschichte des Vogels „Phönix“ heraus und erläutere, warum die Zahl 142 857 wohl nach ihm benannt ist.
3. Untersuche weitere Eigenschaften der Phönixzahl 142 857. Bilde dazu z. B. Zweier- und Dreiergruppen ihrer Ziffern.
4. Wandle den Bruch  in einen Dezimalbruch um und suche nach Beziehungen zur Zahl 142 857.

**Aufgabe 2:**

Die Phönixzahl 142 857 kannst du für einen Zaubertrick verwenden. Schreibe dazu die Ziffern mit etwas Abstand auf einen Papierstreifen und klebe ihn zu einem Ring zusammen, so dass die Ziffern sich innen befinden und so nicht sichtbar sind.   
Bitte nun einen Zuschauer mit einem Würfel eine beliebige Zahl von 2 bis 6 zu würfeln (Bei einer Eins wird noch einmal gewürfelt) und damit die Zahl 142 857 schriftlich zu multiplizieren.   
Bestimme im Kopf die letzte Ziffer des Ergebnisses und schneide den Ring an der betreffenden Stelle durch. Dann kannst du den erstaunten Zuschauer das Ergebnis der Rechnung präsentieren.

**Aufgabe 3:**

1. Die nächstgrößere Phönixzahl ist 0 588 235 294 117 647. Die führende Null muss bei den folgenden Rechnungen mit betrachtet werden.   
   Untersuche die „Phönixeigenschaft“ dieser Zahl, indem du sie mit den Zahlen 2, 3, 4, … multiplizierst. Bis zu welcher Zahl bleibt die Eigenschaft erhalten?
2. Die dritte Phönixzahl ist 052 631 578 947 368 421. Mit dieser 18-stelligen Zahl kannst du wieder einen Zaubertrick analog zur Aufgabe 2 durchführen. Dieses Mal musst du 3 Würfel verwenden und die Augenzahlen addieren, um so eine beliebige Zahl von 3 bis 18 zu erhalten. Mit dieser Augensumme muss dann ein Zuschauer die Phönixzahl multiplizieren. Du kannst dann wieder durch Zerschneiden des Bandes an der richtigen Stelle den Zuschauern das Ergebnis präsentieren.
3. Ermittle die Periode der Dezimalbrüche und stelle fest, ob es Phönixzahlen sind.

***Lösungen***

**Informationen zu Phönixzahlen:**

Eine Phönixzahl oder in der Fachsprache eine zyklische Zahl ist eine n-stellige natürliche Zahl (wobei meist Nullen am Anfang mit zu berücksichtigen sind), welche die folgende ungewöhnliche Eigenschaft besitzt. Bei der Multiplikation dieser Zahl mit einer natürlichen Zahl von 1 bis n entsteht eine Zahl, in der die gleichen Ziffern wie in der Ausgangszahl in zyklischer Reihenfolge vertauscht auftreten.

Zyklische Zahlen sind Perioden von periodischen Dezimalbrüchen, die bei der Umwandlung von Brüchen der Form entstehen, wobei p stets eine Primzahl ist. Zyklische Zahlen entstehen zum Beispiel für p = 7; 17; 19; 23, 29, 47, 59, 61, 97, 109, 113, 131 und 149. Es ist bis heute nicht bekannt, wie viele zyklische Zahlen es gibt. Vermutlich sind es unendlich viele.

**Aufgabe 1 und 2:**

|  |  |
| --- | --- |
| 2 ∙ 142 857 = 285 714 | 5 ∙ 142 857 = 714 285 |
| 3 ∙ 142 857 = 428 571 | 6 . 142 857 = 857 142 |
| 4 ∙ 142 857 = 571 428 | 7 ⬝ 142 857 = 999 999 |

Die Ziffern der Phönixzahl treten in den ersten 5 Produkten in vertauschter Reihenfolge auf.

1. Der Vogel Phönix soll der Sage zufolge im Abstand von mehreren hundert Jahren erscheinen, bei Sonnenaufgang in der Glut der Morgenröte verbrennen und aus seiner Asche verjüngt wieder auferstehen. Bei der Multiplikation entstehen die Ziffern der Phönixzahl immer wieder „aus ihrer Asche“ und durch zyklische Vertauschung „verjüngt“

Es gilt: 14 = 2 ∙ 7 28 = 4 ∙ 7 57 = 8 ∙ 7 + 1

1 + 4 + 2 + 8 + 5 + 7 = 27 und 2 + 7 = 9 14 + 28 + 57 = 99 142 + 857 = 999

142 857 = 143 ∙ 999 = 9 ∙ 11 ∙ 13 ∙ 37

Aus der Beziehung 142 857 143 ∙ 7 = 1 000 000 001 lassen sich Zaubertricks gewinnen.

Man kann die Ziffern kreisförmig anordnen. Zwei gegenüberliegende Ziffern ergeben zusammen immer 9.

Die Ziffern findet man auch auf der Tastatur eines Taschenrechners oder der Zehnertastatur bei einem PC in den beiden linken Ziffernspalten.

1. Es ist: 1 : 7 =  Unsere Phönixzahl ist also die Periode des Dezimalbruchs von .

**Aufgabe 3:**

1. Bei einer Multiplikation mit einer Zahl von 2 bis 16 ergeben sich die Ziffern der Ausgangszahl in zyklisch vertauschter Reihenfolge.
2. Die Produkte der Zahl p = 052 631 578 947 368 421 mit den Zahlen 3 bis 18 lauten:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 3p = 1 578 947 368 421 052 63 | 4p = 21052 631 578 947 368 4 | 5p = 2 631 578 947 368 42105 |
| 6p = 31 578 947 368 4210 52 6 | 7p = 368 421 052 631 578 947 | 8p = 421 052 631 578 947 368 |
| 9p = 47 368 421 052 631 578 9 | 10p = 52 631 578 947 368 421 0 | 11p = 578 947 368 421 052 631 |
| 12p = 631 578 947 368 421 052 | 13p = 68 421 052 631 578 947 3 | 14p = 7 368 421 052 631 578 94 |
| 15p = 78 947 368 421 052 631 5 | 16p = 8 421 052 631 578 947 36 | 17p = 8 947 368 421 052 631 57 |
| 18p = 947 368 421 052 631 578 |  |  |

1. Es ist: 1 : 9 =  1 : 11 =  1 : 13 = 

1 : 17 =  1 : 19 = 

Die Zahlen 1, 09 und 076923 sind keine Phönixzahlen.

Die Perioden der Brüche mit den Nennern 17 und 19 sind die Phönixzahlen aus a) und b).

# Arbeiten mit Variablen und Termen

## Rechnungen mit überraschenden Ergebnissen

**Einsatzmöglichkeit:**

* Klasse 5/6 natürliche Zahlen
* ab Klasse 8 Termumformungen

**Lernziele:**

* Festigung der Fertigkeiten im mündlichen und schriftlichen Rechnen mit natürlichen Zahlen
* Festigung der Fertigkeiten im algebraischen Beschreiben von Zahlen
* Festigung der Fertigkeiten im Umformen von Termen
* Entwicklung der Freude am Umgang mit Zahlen und Variablen sowie an der Suche nach Gesetzmäßigkeiten in Zahlenmustern

**Aufgaben:**

**Aufgabe 1:**

1. Berechne. Was stellst du fest?
2. 20 − 02
3. 31 − 13
4. 42 − 24
5. Finde weitere Differenzen mit dem gleichen Ergebnis.
6. Suchen nach einer Begründung für die überraschenden Ergebnisse.

**Aufgabe 2:**

1. Berechne und vergleiche die Produkte.
   1. 12 · 42 und 21 · 24
   2. 24 · 84 und 42 · 48
2. Verallgemeinere die Rechnung und suche alle Produkte aus zweistelligen Zahlen mit dieser Eigenschaft.

**Aufgabe 3:**

1. Berechne und vergleiche.
2. 3² + 4² und 5²
3. 10² + 11² + 12² und 13² + 14²
4. Suche nach einer Verallgemeinerung der Rechnungen und finde die nächste Gleichung der gleichen Art.
5. Findest du eine allgemeine Darstellung dieser Art von Gleichungen mithilfe von Variablen?

***Lösungen***

**Aufgabe 1:**

Die Aufgaben sollten im Kopf gelöst werden. Eine Begründung des überraschenden Ergebnisses kann durch Betrachtung aller Fälle oder durch Arbeiten mit Variablen erfolgen.

a) Das Ergebnis ist stets 18.

b) Alle weiteren Fälle:

53 – 35 = 18

64 – 46 = 18

75 – 57 = 18

86 – 68 = 18

97 – 79 = 18

c) Begründung mit Variablen:

Für 10a + b mit b = a – 2 und 0 ≤ b ≤ 7 gilt:

10a + b – 10b + a = 9a – 9b = 9a – 9(a – 2) = 9a – 9a + 18 = 18

**Aufgabe 2:**

Die Verallgemeinerung mit Variablen führt auf eine Gleichung mit drei Variablen. Da nur Lösungen im Bereich der einstelligen natürlichen Zahlen gesucht sind, kann man alle Lösungen durch systematisches Probieren finden.

1. a) Die Ergebnisse sind:
2. 12 · 42 = 21 · 24 = 504
3. 24 · 84 = 42 · 48 = 2016

b) 1. Fall: Wie in den Beispielen sind die Einerstellen gleich.   
(10a + b)·(10c + b) = (10b + a)·(10b + c)

🡪 100ac + b² +10bc + 10ab = 100b² + ac +10ab + 10bc

🡪 99ac = 99b²

🡪 ac = b²

alle Lösungen:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| a | b | c | ab ∙ cb | ba ∙ bc | Produkt |
| 1 | 2 | 4 | 12 ∙ 42 | 21 ∙ 24 | 504 |
| 1 | 3 | 9 | 13 ∙ 93 | 31 ∙ 39 | 1209 |
| 2 | 4 | 8 | 24 ∙ 84 | 42 ∙ 48 | 2016 |
| 4 | 6 | 9 | 46 ∙ 96 | 64 ∙ 69 | 4416 |

2. Fall: Alle 4 Ziffern sind verschieden.

(10a + b)·(10c + d) = (10b + a)·(10d + c)

🡪 100ac + bd +10bc + 10ad = 100bd + ac +10ad + 10bc

🡪 99ac = 99bd

🡪 ac = bd

alle Lösungen:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| a | b | c | d | ab ∙ cd | ba ∙ dc | Produkt |
| 1 | 2 | 6 | 3 | 12 ∙ 63 | 21 ∙ 36 | 756 |
| 1 | 2 | 8 | 4 | 12 ∙ 84 | 21 ∙ 48 | 1008 |
| 1 | 3 | 6 | 2 | 13 ∙ 62 | 31 ∙ 26 | 806 |
| 1 | 4 | 8 | 2 | 14 ∙ 82 | 41 ∙ 28 | 1148 |
| 2 | 3 | 6 | 4 | 23∙ 64 | 32 ∙ 46 | 1472 |
| 2 | 3 | 9 | 6 | 23 ∙ 96 | 32 ∙ 69 | 2208 |
| 2 | 4 | 6 | 3 | 24 ∙ 63 | 42 ∙ 36 | 1512 |
| 2 | 6 | 9 | 3 | 26 ∙ 93 | 62 ∙ 39 | 2418 |
| 3 | 4 | 8 | 6 | 34 ∙ 86 | 43 ∙ 68 | 2924 |
| 3 | 6 | 8 | 4 | 36 ∙ 84 | 63 ∙ 48 | 3024 |

**Aufgabe 3:**

1. Es ist 3² + 4² = 5² und 10² + 11² + 12² = 13² + 14²
2. Die nächste Gleichung lautet: 21² + 22² + 23² + 24² = 25² + 26² + 27²
3. Als allgemeine Darstellung dieser Art von Gleichungen ist möglich:

n² + (n + 1)² + (n + 2)² + … + (n + k)² = (n + k + 1)² + (n + k + 2)² + … + (n + 2k)²

Durch geschicktes Zusammenfassen ergibt sich folgende allgemeine Lösung:

n = k (2k + 1)

Damit ergeben sich folgende erste Werte für n und k:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| k | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| n | 3 | 10 | 21 | 36 | 55 |

## Mathematische Zaubereien – Erraten von Ergebnissen

**Einsatzmöglichkeiten:**

* ab Klasse 8 nach Behandlung der Termumformungen
* Üben und Festigen von Termumformungen und Rechenfertigkeiten

**Lernziele:**

1. Festigung der Fertigkeiten im mündlichen und schriftlichen Rechnen mit natürlichen Zahlen
2. Festigung der Fertigkeiten im algebraischen Beschreiben von Zahlen
3. Festigung der Fertigkeiten im Umformen von Termen
4. Entwicklung der Freude am Umgang mit Zahlen und Variablen sowie an der Suche nach Gesetzmäßigkeiten in Zahlenmustern

**Besonderheiten der Aufgabe:**

Es handelt sich um Zaubertricks, die vorgeführt und dann erraten werden sollten. Wenn der Trick gleichzeitig mit mehreren Personen oder zweimal nacheinander mit einer Person durchgeführt wird, ist schnell erkennbar, das sich immer die gleiche Zahl ergibt, woraus die Frage entsteht, warum das so ist.

Es ist darüber hinaus möglich, noch weitergehende „Verpackungen“ der Aufgaben vorzunehmen. Beispielsweise könnte man behaupten, ein beliebiges Buch auswendig zu kennen. Um diese Behauptung zu überprüfen, wird entsprechend der Rechenvorschrift eine „zufällige“ Seitenzahl ermittelt, deren Inhalt dann (nach entsprechender Vorbereitung) wiedergegeben werden kann.

***Aufgaben***

**Aufgabe 1**

Man denke sich eine einstellige natürliche Zahl,   
addiere zu ihr 8,   
verdreifache die Summe und   
addiere 26.   
Dann wird das Doppelte der gedachten Zahl subtrahiert,   
bei der erhaltenen Zahl die Einerziffer weg gestrichen und   
die dann verbleibende Zahl zu 14 addiert.

**Aufgabe 2**

Man denke sich eine zweistellige natürliche Zahl und   
subtrahiere von ihr 8.   
Die erhaltene Zahl wird von 100 subtrahiert und   
vom Ergebnis subtrahiere man 21.   
Danach addiere man den Nachfolger der gedachten Zahl und dividiere die Summe durch 8.

**Aufgabe 3**

Man denke sich eine zweistellige gerade Zahl und schreibe sie auf.   
Davor schreibe man die Hälfte der gedachten Zahl.   
Die so entstandene neue Zahl wird durch 3 dividiert und   
es wird die gedachte zweistellige Zahl addiert.   
Die erhaltene Summe wird durch 2 dividiert und   
der so erhaltenen Quotienten durch die gedachte Zahl.   
Dann addiere man 4.

**Aufgabe 4**

Man denke sich eine natürliche Zahl kleiner als 10,   
multipliziere sie mit 4,   
addiere zum Ergebnis 3 und   
multipliziere die Summe mit 3.   
Dann wird das Doppelte der gedachten Zahl subtrahiert,   
die erste Ziffer des Ergebnisses gestrichen,   
zum verbliebenen Rest 7 addiert und   
aus der Summe die Quadratwurzel gezogen.

**Aufgabe 5**

Eine beliebige dreistellige Zahl z wird aufgeschrieben, deren erste und letzte Ziffer sich um mindestens zwei unter­scheiden.   
Anschließend wird eine neue Zahl durch Umkehren der Reihenfolge der Ziffern von z gebildet und

die kleinere von der größeren Zahl subtrahiert.   
Durch Umkehren der Rei­henfolge der Ziffern der erhaltenen Differenz d wird eine neue Zahl gebildet und zu d addiert.

***Lösungen***

**Aufgabe 1**

*Trick:* Das Ergebnis ist stets 19.

*Algebraische Begründung:* gedachte Zahl: n;

Term: ((n + 8)∙3 + 26) − 2∙n = 3∙n + 24 +26 - 2∙n = 50 + n

Streicht man nun die Einerziffer des Ergebnisses weg, so bleibt immer die Zahl 5 als Rest. Addiert man dazu die Zahl 14, so ergibt sich als Summe 19.

*Finden von Lösungsideen:*

* Es ist eine direkte Übersetzung des Textes mithilfe einer Variablen möglich.
* Im Term 50 + n muss n als Einerziffer erkannt werden.

**Aufgabe 2**

*Trick:* Das Ergebnis ist stets 11.

*Algebraische Begründung:* gedachte Zahl: n

Term: 100 − (n − 8) − 21 + (n + 1) = 100 − n + 8 − 21 + n + 1 = 88

Das Ergebnis ist für jede zweistellige natürliche Zahl die Zahl 88. Dividiert man diese durch 8, so ergibt sich als Quotient 11.

*Finden von Lösungsideen:*

* Es ist eine direkte Übersetzung des Textes mithilfe einer Variablen möglich.

*Trick:* Das Ergebnis ist stets 13.

*Algebraische Begründung:* gedachte Zahl: n;

Term: {[(n + 100 ∙ ) : 3 + n] : 2} : n = 18n : 2n = 9

Das Ergebnis ist also für jede zweistellige gerade natürliche Zahl die Zahl 9. Addiert man zu dieser Zahl die Zahl 4, so ergibt sich als Summe 13.

*Finden von Lösungsideen:*

* Es ist eine direkte Übersetzung des Textes mithilfe einer Variablen möglich, wobei die gedachte Zahl nicht als zweistellige Zahl geschrieben werden muss.
* Um auf die Übersetzung des Textes „Davor schreibe man die Hälfte der gedachten Zahl.“ zu kommen, kann mit konkreten Zahlen probiert werden.

**Aufgabe 4**

*Trick:* Das Ergebnis ist stets 4.

*Algebraische Begründung:* gedachte Zahl: n

Term: (4·n + 3) ∙ 3 – 2 ∙ n = 12n + 9 – 2n = 10n + 9

Das Ergebnis ist eine zweistellige Zahl, deren Zehnerziffer die gedachte Zahl und deren Einerziffer die Zahl 9 ist. Streicht man nun die erste Ziffer des Ergebnisses weg, so bleibt immer die Zahl 9 als Rest. Addiert man dazu die Zahl 7 und zieht aus der Summe anschließend die Quadratwurzel, so ergibt sich  
  =  = 4.

*Finden von Lösungsideen:*

* Es ist eine direkte Übersetzung des Textes mithilfe einer Variablen möglich.

**Aufgabe 5**

*Trick:* Das Ergebnis ist stets 1089.

*Algebraische Begründung:* gedachte Zahl: abc

|  |  |
| --- | --- |
|  | a b c a > c  ‑ c b a  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_  a‑c‑1 9 10+c‑a  10+c‑a 9 a‑c‑1  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_  10 8 9 |

*Finden von Lösungsideen:*

* Eine dreistellige Zahl kann in der Form 100a + 10 b + c oder abc beschrieben werden. Bei Verwendung der ersten Darstellungsart merkt man bald, dass die Rechnungen sehr umständlich werden, obwohl sie auch zum Ziel führen.
* Die Darstellung der Differenzen der Ziffern kann durch Probieren mit Zahlen gefunden werden.

## Mathematische Zaubereien – Erraten von gedachten Zahlen

**Einsatzmöglichkeiten:**

* ab Klasse 8, nach Behandlung der Termumformungen

**Lernziele:**

* Entwicklung der Freude am Umgang mit Variablen
* Aufstellen von Termen zu verbalen Rechenvorschriften
* Entwicklung von Fertigkeiten im Umformen von Termen (Auflösen von Klammern, Ausklammern, Multiplikation von Summen)
* Finden von Lösungsideen durch Analyse der Struktur von Termen und durch Probieren

**Besonderheiten der Aufgaben:**

Es handelt sich um Zaubertricks, die mehrmals vorgeführt und dann begründet werden sollten.

***Aufgaben***

1. Denkt euch ein beliebiges Datum (Tag und Monat), multipliziert die Zahl, die den Tag angibt, mit 3 und addiert zu diesem Produkt 7. Verdreifacht dann die erhaltene Summe und addiert die Tageszahl. Die so ermittelte Zahl multipliziert mit 10 und addiert die Monatszahl.   
   Nennt mir das Ergebnis und ich errate das gedachte Datum.
2. Multipliziert eure Schuhgröße (als ganze Zahl) mit 2, addiert zum Ergebnis 39, multipliziert die Summe mit 50, addiert die Zahl 66 und subtrahiert euer Geburtsjahr.  
   Nennt mir das Ergebnis, ich errate die Schuhgröße und welchen Geburtstag ihr in diesem Jahr feiert bzw. schon gefeiert habt.
3. Bildet das Produkt einer beliebigen einstelligen Zahl mit 9, subtrahiert das Ergebnis vom Zehnfachen eures Alters.   
   Nennt mir das Ergebnis und ich errate das Alter.
4. Multipliziert euer Alter mit einer beliebigen einstelligen Zahl. Addiert zu diesem Produkt die Summe aus Alter und der gedachten Zahl und nennt mir das Ergebnis.   
   Ich errate aus dieser einen Zahl sowohl das Alter als auch die gedachte Zahl.  
   *Hinweis:* Die gedachte einstellige Zahl sollte eine Bedeutung haben, z. B. bei Jugendlichen die Zahl der gewünschten Kinder.

***Lösungen***

**Aufgabe 1**

*Trick:* Vom Ergebnis wird 210 subtrahiert, dann geben die ersten beiden Ziffern den Tag und die zweiten den Monat an.

*algebraische Beschreibung:* Tag: t; Monat: m [(3t + 7) ∙ 3 + t] ∙ 10 + m = 100t + m + 210

*Finden von Lösungsideen:*

* Übersetzen des Textes mithilfe von Variablen, wobei die Tages- und Monatszahl nicht als zweistellige Zahlen geschrieben werden müssen
* Erkennen der Vorschrift durch Einsetzen von konkreten Werten für t und m

**Aufgabe 2**

*Trick:* Die ersten beiden Stellen geben die Schuhgröße und die letzten beiden bei das Alter an, das in dem aktuellen Jahr erreicht wird bzw. schon erreicht worden ist. Die Zahl 66 ist die Differenz aus dem aktuellen Jahr (hier 2016) und dem Jahr 1950, sie muss also jedes Jahr geändert werden.

Als Schuhgröße sollte das europäische System vorgegeben werden. Die Person darf nicht älter als 99 Jahre sein.

*algebraische Beschreibung:* Schuhgröße: s; Geburtsjahr: a

(s ∙ 2 + 39) ∙ 50 + 66 – a = 100s + 1950 + 66 – a = 100s + 2016 – a

*Finden von Lösungsideen:*

* Übersetzen des Textes mithilfe von Variablen, wobei die Schuhgröße und das Geburtsjahr nicht als mehrstellige Zahlen geschrieben werden müssen
* Erkennen der Vorschrift durch Einsetzen von konkreten Werten für s und a, auch a > 99

**Aufgabe 3**

*Trick:* Vom Ergebnis wird die Einerziffer abgetrennt und zur restlichen Zahl addiert, es ergibt sich das Alter.

*algebraische Beschreibung:* beliebige einstelligen Zahl: n; Alter: a

9n − 10a = 10n – 10a + n = 10(n – a) + n

*Finden von Lösungsideen:*

* Übersetzen des Textes mithilfe von Variablen, wobei das Alter nicht als zweistellige Zahl geschrieben werden muss
* Finden des Tricks durch systematisches Probieren mit bekannten Zahlen (auch n = 0) und erkennen der Gesetzmäßigkeit und der Struktur des Endterms
* davon ausgehend Finden einer Möglichkeit zur geschickten Zerlegung des Terms

**Aufgabe 4**

*Trick:* Die vom Zuschauer genannte Zahl wird um 1 erhöht und dann in zwei Faktoren zerlegt. Von jedem Faktor wird 1 subtrahiert und man erhält die gesuchten Zahlen. Da die Zerle­gung in Faktoren nicht eindeutig ist, muss das richtige Zahlen­paar mit Hilfe von Zusatzinformationen (geschätztes Alter, vermutliche Zahl der gewünschten Kinder) ermittelt werden.

*algebraische Beschreibung:* einstelligen Zahl: n; Alter: a a ∙ n + a + n + 1 = (a + 1) (n + 1)

*Finden von Lösungsideen:*

* Übersetzen des Textes mithilfe von Variablen, wobei das Alter nicht als zweistellige Zahl geschrieben werden muss
* Finden des Tricks durch systematisches Probieren mit bekannten Zahlen (auch n = 0) und erkennen der Gesetzmäßigkeit und der Struktur des Endterms oder
* Finden Tricks durch Betrachtung des Terms für n = 1:   
   a + a + 1 + 1 = 2a + 2 = 2(a + 1) = (1 + 1)(a + 1)
* nach Finden der Vermutung und Nachweis durch Ausmultiplizieren von (a + 1) (n + 1)

## Wo liegt der Fehler?

**Einsatzmöglichkeiten:**

* Klasse 8, Rechnen mit Gleichungen, äquivalente Umformungen

**Lernziele:**

* Anwendung der Kenntnisse zu äquivalenten Umformungen
* Förderung des kritischen und aufmerksamen Denkens

***Aufgaben***

Finde den Fehler in den folgenden Rechnungen.

a) b)



***Lösungen***

a)



Fehler: Radizieren ist keine Äquivalenzumformung!

b)

Fehler: Division durch Null!

wenn a = b dann a² - ab = 0

